MATERIAL DIDÁCTICO
MATEMÁTICAS **8**

INSTANTÁNEAS DIFERENCIALES

Métodos Elementales de Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Estudio del Problema de Cauchy y Teoría de Ecuaciones y Sistemas Lineales

Óscar Ciaurri Ramírez





INSTANTÁNEAS DIFERENCIALES

MÉTODOS ELEMENTALES DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

ESTUDIO DEL PROBLEMA DE CAUCHY Y TEORÍA DE ECUACIONES Y SISTEMAS LINEALES

MATERIAL DIDÁCTICO

Matemáticas

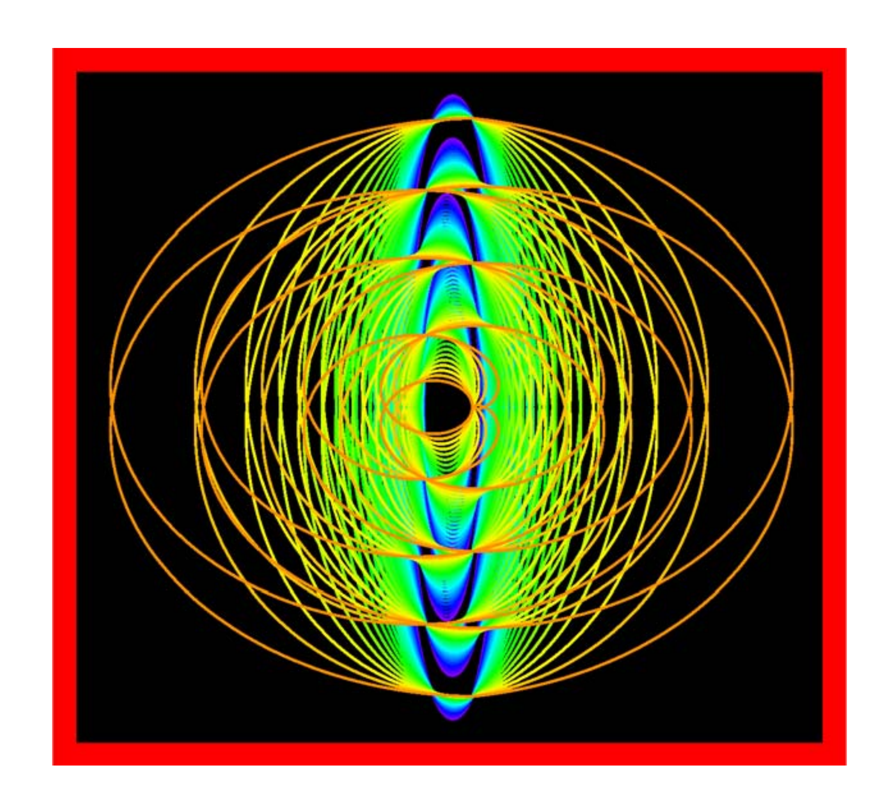
nº 8

Óscar Ciaurri Ramírez

INSTANTÁNEAS DIFERENCIALES

MÉTODOS ELEMENTALES DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

ESTUDIO DEL PROBLEMA DE CAUCHY Y TEORÍA DE ECUACIONES Y SISTEMAS LINEALES

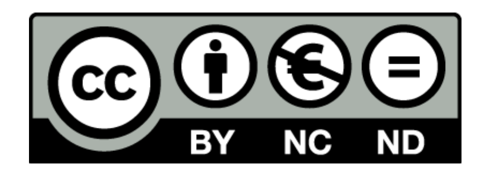


UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
SERVICIO DE PUBLICACIONES
2013

CIAURRI RAMÍREZ, Óscar

Instantáneas diferenciales [Recurso electrónico] : métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias : estudio del Problema de Cauchy y Teoría de Ecuaciones y Sistemas Lineales / por Óscar Ciaurri Ramírez. – Logroño : Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones, 2013.
VI, 452 p. ; v. digital. – (Material didáctico. Matemáticas ; 08)
ISBN 978-84-695-7111-8
1. Ecuaciones diferenciales. I. Título. II. Universidad de La Rioja. Servicio de Publicaciones. III. Serie.

517.9
PBKJ – IBIC 1.1



publicaciones.unirioja.es

E-mail: publicaciones@unirioja.es

ISBN 978-84-695-7111-8

Edita: Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones

Al entregar el premio al “Mejor Profesor del Año” a:

> . . . Julio Estudiante, un profesor de matemáticas que enseñó a jóvenes pandilleros que las ecuaciones diferenciales son más poderosas que las balas.

The Simpsons, temporada 14, capítulo 7.



Introducción

¿Qué son estas *Instántaneas diferenciales*? Desde luego he pretendido que no fuesen un libro de ecuaciones diferenciales al uso. Durante mucho tiempo fueron —en realidad ese fue su origen— una notas que elaboré para mis estudiantes de un curso de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, esas notas iniciales crecieron y tomaron su propio camino, de tal forma que ahora, cuando las entrego a mis estudiantes, debo comenzar advirtiéndoles que todo el material del curso está contenido en estas páginas pero que, con una alta probabilidad, no llegaremos a tratar todas las cuestiones que en ellas hay incluidas.

El comienzo de estas *instantáneas* fue el material recopilado en la memoria docente que elaboré para presentarme a una plaza de profesor titular. Allí aparecían breves resúmenes de cada uno de los temas de los que debía constar una asignatura de ecuaciones diferenciales. Resúmenes que, para decir toda la verdad, había heredado de un compañero, que a su vez los había recibido de alguien que había obtenido la plaza antes que él y así sucesivamente. Eran un pequeño conjunto de notas sobre ecuaciones diferenciales de apenas veinte páginas que varias generaciones de opositores habíamos ido modificando y adaptando a lo largo de los años en función de nuestros gustos personales. El material era escaso pero una buena base para comenzar unas notas que se convirtieron en necesarias con la llegada de un alumno alemán. En el curso 2004–2005 recibimos en nuestra facultad a un estudiante extranjero financiado por una *beca Erasmus*. Recuerdo a este estudiante el primer día de curso, con su escasísimo castellano, intentando tomar notas de lo que yo, en mi habitual estilo expansivo y caótico, iba desgranando en la pizarra. El pobre muchacho estaba desbordado y decidí que podía ser una buena idea convertir aquellos resúmenes de la memoria docente en unos apuntes con algo más de entidad para poder entregárselos ya escritos a los estudiantes. Ni que decir tiene que durante todo aquel curso anduve con la lengua fuera, escribiendo cada día los contenidos del curso que debía explicar al día siguiente. En aquellos momentos ya comencé a ilustrar con algunos gráficos (muy sencillos por entonces) las cuestiones que iba desarrollando y proponiendo ejemplos que intentaba que fuesen lo más representativos posible. Aquel primer curso las notas adquirieron su forma básica. Desde entonces las notas se han desarrollado enormemente, con nuevos añadidos cada curso, con mejoras permanentes en las secciones ya asentadas, con nuevos y más complicados gráficos y esquemas y, en general, con cualquier material relacionado con las ecuaciones diferenciales que haya llamado mi atención por algún motivo puntual. Todo esto

ha contribuido enormemente a mejorar el aspecto final de este trabajo. Esta es una descripción, quizá grosera pero creo que acertada, de estas *instantáneas* que ahora presento. Por supuesto, que nadie dude que el título que he elegido para este trabajo está inspirado por la obra de H. Steinhaus *Mathematical Snapshots*, que traduciríamos al castellano como *Intantáneas matemáticas*.

Los contenidos de estas *instantáneas* son los métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales, el estudio de los problemas de valores iniciales y la teoría lineal de ecuaciones diferenciales. Básicamente pretenden mostrar las técnicas elementales para el estudio de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. A la vez que presentamos esas técnicas, incluimos ejemplos y aplicaciones de las mismas en situaciones clásicas y en otras no tan clásicas, pero que procuramos que sean de interés para los lectores.

Índice general

Capítulo 1

Definiciones y herramientas básicas. Ecuaciones diferenciales elementales

1.1. Comenzando por el principio: definiciones básicas

A lo largo este libro vamos a proceder a desarrollar diversas técnicas o métodos de resolución de ecuaciones diferenciales. Dada una ecuación diferencial, la probabilidad de determinar una o varias soluciones explícitas para ella es realmente baja.[1] Sin embargo, presentaremos diferentes metodologías que nos permitirán obtener soluciones en algunos casos particulares. En cada caso, y siempre que sea posible, procuraremos motivar cada tipo de ecuación que introduzcamos con ejemplos o "modelos" ilustrativos. Para poder plantear las diversas situaciones que nos encontraremos necesitamos algo de nomenclatura con la que poder expresarnos con precisión.

En una ecuación diferencial aparecen las derivadas de una o más funciones con respecto a una o más variables independientes. Cuando se trata de dos o más ecuaciones simultáneas hablaremos de sistema de ecuaciones diferenciales.

Inicialmente las ecuaciones diferenciales se clasifican en función de si contienen derivadas con respecto a una o a varias variables independientes:

a) Hablamos de *ecuaciones diferenciales ordinarias* cuando aparecen en ellas las derivadas de una o más funciones con respecto a una única variable

[1] En el caso más sencillo: encontrar una función $x(t)$, expresada en términos de funciones elementales, verificando la ecuación $x'(t) = f(t)$, donde $f(t)$ es una función continua arbitraria, sabemos que es casi una misión imposible, aunque puede que exista...

independiente. Algunos ejemplos que analizaremos: la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = k_1 P \left(1 - \frac{P}{k_2}\right),$$

donde $P(t)$ es la población de un determinado hábitat en un instante de tiempo t y k_1 y k_2 son constantes positivas; la ecuación de Bessel

$$t^2 x'' + t x' + (t^2 - \mu^2) x = 0,$$

donde suponemos $x = x(t)$ y μ una constante real; la ecuación de van der Pol

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

con α un parámetro real no nulo; o, los sistemas de ecuaciones diferenciales predador-presa que rigen la evolución temporal de dos poblaciones $x(t)$ e $y(t)$ en interacción

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - cxy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -by + dxy, \end{cases}$$

donde a, b, c y d son constantes positivas.

b) Y se trata de *ecuaciones en derivadas parciales* cuando aparecen las derivadas de una o más funciones con respecto a dos o más variables independientes. La ecuación de Laplace[2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0;$$

la ecuación del calor

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = \frac{\partial z}{\partial t};$$

o la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2};$$

son algunos ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales con una sola función.[3] Las ecuaciones de Cauchy-Riemann, fundamentales en el estudio de funciones de una variable compleja,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

nos proporcionan un ejemplo de sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

[2]Los ejemplos que presentamos son bidimensionales en la variable espacial $x = (x_1, x_2)$ pero pueden darse fácilmente generalizaciones a n-dimensiones, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

[3]De hecho estas tres ecuaciones son las ecuaciones en derivadas parciales más estudiadas.

Al máximo orden de derivación que aparece en una ecuación diferencial lo llamaremos *orden de la ecuación diferencial*. La ecuación logística o los sistemas predador-presa son de orden uno, mientras que la ecuación de Bessel o la ecuación de Laplace son de orden dos. La ecuación de Euler-Bernoulli para la flexión $y(x)$ de una viga

$$\frac{d^4y}{dx^4} + a^4y = bw(x),$$

donde a y b son constantes propias del problema y $w(x)$ es la carga a la que está sometida la viga, es de cuarto orden.



Una clásica imagen de L. Euler (1707–1783). Euler es, sin duda, una de las figuras centrales de la historia de las matemáticas. La influencia de su trabajo en una gran variedad de ramas de las matemáticas es palpable hasta nuestros días. Se atribuye a Laplace (matemático francés contemporáneo de Euler aunque algo más joven que él) una frase que resume su omnipresencia: "Leed a Euler, leed a Euler, es el maestro de todos nosotros".

Nuestro objetivo central son las ecuaciones diferenciales ordinarias y por tanto el resto de definiciones que presentaremos a continuación estarán relacionadas con ellas. De todos modos nos encontraremos con algunas ecuaciones en derivadas parciales en diversas situaciones; por ejemplo, aparecerán al buscar *factores integrantes*.

Si suponemos una función de una variable real t con n componentes, $x = (x_1, \dots, x_n)$, y n ecuaciones involucrando derivadas hasta orden r, la correspondiente ecuación (sistema, si $n > 1$) puede representarse por la expresión

$$F\left(t, x, x', \dots, x^{(r)}\right) = F\left(t, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n', \dots, x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}\right) = 0, \tag{1.1}$$

para una cierta función $F(t, z_{1,1}, \dots, z_{1,n}, \dots, z_{r+1,1}, \dots, z_{r+1,n})$ definida sobre un subconjunto de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^{r+1}$ y tomando valores en $\mathbb{R}^n$. Las ecuaciones de la forma anterior se denominan implícitas. El hecho de tomar la imagen de F contenida en $\mathbb{R}^n$ nos dice que tenemos tantas ecuaciones como funciones aparecen en nuestro sistema, y siempre supondremos esto de aquí en adelante.

Si la ecuación aparece resuelta respecto de la derivada de mayor orden, es decir, si se expresa como

$$x^{(r)} = f\left(t, x, x', \dots, x^{(r-1)}\right)$$

donde f está definida sobre un subconjunto de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^r$ y tomando valores en $\mathbb{R}^n$, la llamaremos explícita.

Notad que, al menos de manera teórica, para pasar de una ecuación (sistema) implícita como la dada en (1.1) a una ecuación (sistema) explícita basta, por el teorema de la función implícita, que la función $F = (F_1, \dots, F_n)$ cumpla la condición

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{r+1,1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{r+1,n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial z_{r+1,1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial z_{r+1,n}} \end{vmatrix} \neq 0$$

en un entorno de algún punto.

Para ecuaciones explícitas de orden uno, $x' = f(t, x)$, si f es una función vectorial con n componentes, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, la ecuación puede desglosarse

como

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ \quad\vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

y se corresponde con un sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno. Cuando la ecuación es de orden $r > 1$ y la función f y la variable dependiente x son escalares (situación correspondiente al caso $n = 1$) la ecuación puede transformarse en un sistema de r ecuaciones pero de orden uno. En efecto, sin más que tomar

$$x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_r = x^{(r-1)},$$

la ecuación $x^{(r)} = f(t, x, x', \dots, x^{(r-1)})$ se convierte en el sistema de r ecuaciones

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \quad\vdots \\ x_{r-1}' = x_r, \\ x_r' = f(t, x_1, \dots, x_r), \end{cases}$$

que es de orden uno. Hay que observar que cuando $n > 1$ es posible efectuar la transformación anterior, pero a cambio de una notación más sobrecargada. Por tanto, omitimos los detalles.

De la posibilidad teórica de reducir ecuaciones implícitas a explícitas y del mecanismo descrito para transformar ecuaciones de orden $r > 1$ en otras de orden uno, podemos deducir que no se pierde generalidad al centrarnos, fundamentalmente, en el estudio de ecuaciones del tipo $x' = f(t, x)$, con f definida en un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y tomando valores en $\mathbb{R}^n$.

Una vez que hemos definido la noción genérica de ecuación diferencial y de algunos conceptos relacionados, estableceremos una definición apropiada del concepto de solución de la ecuación $x' = f(t, x)$.[4]

Definición 1. Diremos que una función

$$\phi \colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

es una solución de la ecuación $x' = f(t, x)$ en el intervalo I si es derivable y

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)), \quad \forall\, t \in I.$$

La ecuación diferencial más sencilla que existe es, obviamente, de la forma $x' = f(t)$, para una cierta función f. Es claro que si F es una primitiva de la función f, el conjunto de soluciones viene dado por

$$x(t) = F(t) + C,$$

[4]Una definición análoga puede darse para la ecuación implícita $F(t, x, x') = 0$ con las modificaciones obvias.

donde C es una constante; es decir, existe una familia de soluciones de la ecuación, dependiendo de un parámetro. En el caso de que f sea una función vectorial con n componentes, la constante C será n-dimensional. La determinación del valor de C puede hacerse imponiendo que la solución pase por un determinado punto (t_0, x_0), lo que dará lugar a soluciones distintas dependiendo de la elección del punto. De un modo análogo, para cada ecuación de la forma $x' = f(t, x)$ obtendremos soluciones distintas suponiendo que pasan por puntos distintos. En su forma más general, obtenemos lo que denominamos *solución general* de una ecuación diferencial que se puede expresar como

$$F(t, x, C) = 0, \tag{1.2}$$

donde F es una función definida sobre un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tomando valores en $\mathbb{R}^n$. La determinación de C da lugar a lo que llamaremos *solución particular* de la ecuación.

Hay que hacer notar que hay ecuaciones diferenciales que pueden tener soluciones que no se obtienen asignando un valor determinado a C en la solución general. Este tipo de soluciones se conocen como *soluciones singulares*.

A la vista del comentario anterior parece razonable intentar obtener la solución general de una ecuación diferencial y proceder a obtener soluciones particulares imponiendo que pasen por un determinado punto. Sin embargo, este procedimiento no es, en general, posible. Sólo en algunos casos particulares seremos capaces de encontrar la solución general de una ecuación diferencial. Ante esto, nos plantearemos la posibilidad de asegurar la existencia y, en su caso, unicidad, de la solución de una ecuación diferencial que pasa por un determinado punto. La siguiente definición nos describe de manera exacta el contexto en el que nos plantearemos esta cuestión.

Definición 2. Dada la función $f(t, x)$, definida en un subconjunto D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y un punto $(t_0, x_0) \in D$, el par de condiciones sobre la función incógnita $x(t)$:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

constituye lo que se denomina un problema de valores iniciales o problema de Cauchy para una ecuación explícita de primer orden.

1.2. Dos ecuaciones de solución elemental

Como ya hemos comentado, las ecuaciones diferenciales más sencillas que nos podemos plantear resolver son de la forma $x' = f(t)$, para una cierta función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, donde por simplicidad consideramos $D \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto (desde luego podríamos suponer que la función f toma valores en $\mathbb{R}^n$ y la situación sería absolutamente similar). Según el teorema fundamental del cálculo, si f es continua en D podremos asegurar la existencia y unicidad de solución para

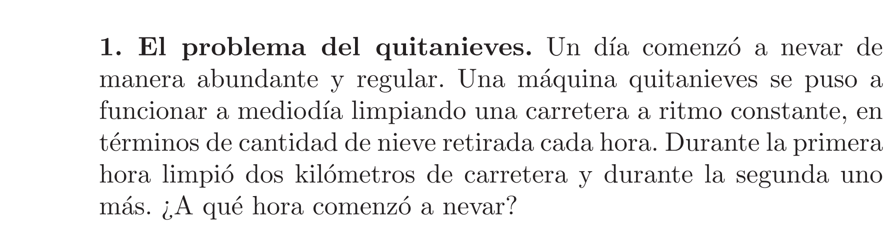
el problema de valores iniciales $x' = f(t)$ y $x(t_0) = x_0$, con $t_0 \in D$. Además,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds, \qquad t \in D.$$

Veamos dos aplicaciones de este simple hecho.



Imagen de una máquina quitanieves que circulaba a mediados de los años cuarenta en el Pirineo aragonés.



1. El problema del quitanieves. Un día comenzó a nevar de manera abundante y regular. Una máquina quitanieves se puso a funcionar a mediodía limpiando una carretera a ritmo constante, en términos de cantidad de nieve retirada cada hora. Durante la primera hora limpió dos kilómetros de carretera y durante la segunda uno más. ¿A qué hora comenzó a nevar?

Por supuesto, para plantearnos una resolución adecuada del problema debemos analizar el enunciado con cierto detalle.

Podemos considerar que la posición en la carretera es una función del tiempo (medido en horas) $x(t)$ definida para $t > 0$ y supondremos $t = 0$ el instante en el que comenzó la nevada. La altura de la nieve en el instante t la expresaremos por $h(t)$. Si denotamos por ΔV el volumen de nieve retirado por la máquina quitanieves en un intervalo de tiempo Δt, suficientemente breve para poder considerar $h(t)$ constante en el intervalo Δx, tendremos que $\Delta V = hL\Delta x$, siendo L la anchura de la pala de la quitanieves, y

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = hL\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

o haciendo $\Delta t \to 0$,

$$\frac{dV}{dt} = hL\frac{dx}{dt}. \tag{1.3}$$

La expresión *limpiando una carretera a ritmo constante, en términos de cantidad de nieve retirada cada hora* nos indica que la variación del volumen por unidad de tiempo de nieve retirado es constante, es decir $\frac{dV}{dt} = \alpha$. Así, de la ecuación (1.3) concluimos que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{Lh};$$

es decir, la velocidad de la máquina quitanieves en el instante t es inversamente proporcional a la altura de la nieve en ese instante. Puesto que nos dicen que nieva de manera regular podemos considerar que $h(t) = ct$ y, por tanto, la ecuación diferencial que describe la posición del quitanieves es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{t},$$

con $A = \frac{\alpha}{Lc}$. Entonces, es claro que

$$x(t) = A \log t + C.$$

Si es $t = T$ el tiempo que ha transcurrido desde que comenzó la nevada hasta que salió la maquina, tendremos que $x(T) = 0$. Lo que nos da la expresión $x(t) = A \log\left(\frac{t}{T}\right)$. Además, según el enunciado propuesto, debe cumplirse que $x(T+1) = 2$ y $x(T+2) = 3$ y esto implica la relación

$$\left(\frac{T+1}{T}\right)^3 = \left(\frac{T+2}{T}\right)^2.$$

La ecuación anterior es equivalente a

$$1 + T = \frac{1}{T},$$

cuyas raíces son $T = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Tomando la solución positiva tenemos que $T = 0.618$ horas ~ 37 minutos; por tanto, comenzó a nevar a las 11:23 a. m.

El problema del quitanieves se popularizó en la literatura sobre ecuaciones diferenciales a raíz de su inclusión en el libro *Differential Equations* de R. P. Agnew, publicado en 1942 por la editorial McGraw-Hill. De hecho, se pueden localizar recursos en Internet que lo denominan *The snowplow problem, by R. P. Agnew*. Sin embargo, resulta curioso observar que existe una versión previa, que podríamos denominar *primitiva*, del problema. En 1937, en la revista *The American Mathematical Monthly* se planteó, como Problema E 275 (pág. 245), resolver la siguiente cuestión: (por mantener la pureza copiamos la propuesta en inglés)

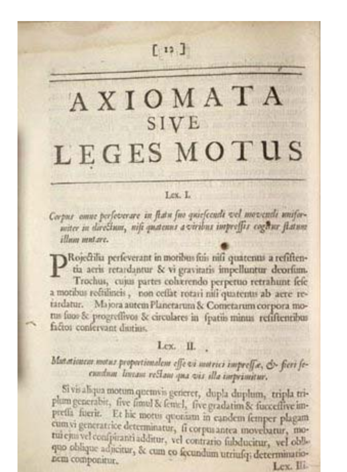
> In a certain town it began snowing before noon and continue at a constant rate until dark. At noon a crew of men set out along the highway, clearing the snow from it as they went. They cleared two miles in the first two hours, but only one mile in the next two hours. If the crew clears equal volumes of snow in equal times, at what time did it begin to snow?

La propuesta aparecía firmada por J. A. Banner. La solución se publicó en diciembre del mismo año (págs. 666–667). Obviamente se trata del mismo problema, con cambios sin importancia en los datos. En este caso la nevada habría dado comienzo a las 10:45. A la propuesta le hemos añadido el calificativo de *primitiva* ya en ella se habla de *hombres-quitanieves*, y en la que ha alcanzado más popularidad ya aparecen *máquinas quitanieves*. Teniendo en cuenta que el Problema E 274 de la revista *The American Mathematical Monthly* (es decir: el anterior a la versión *primitiva* del problema del quitanieves) había sido propuesto por R. P. Agnew y que apareció publicado en la misma página de la revista, podemos asegurar (con poco margen de error) que Agnew conocía la propuesta de Banner y que su aportación fue actualizarla, cambiando *hombres-quitanieves* por máquinas quitanieves.

Más adelante, en el capítulo correspondiente a las ecuaciones lineales de primer orden, analizaremos una propuesta debida a M. Klamkin en la que se plantea una interesante extensión del problema del quitanieves.

2. Propulsión a chorro. Un cohete de masa estructural m_1 contiene una masa m_2 de combustible. Se dispara en línea recta hacia arriba, desde la superficie de la Tierra, quemando combustible a una tasa constante a (es decir, $\frac{dm}{dt} = -a$, donde m denota la masa variable total del cohete) y expulsando los productos de escape hacia atrás, a una velocidad constante b, relativa al cohete. Si se desprecian todas las fuerzas exteriores, excepto una fuerza gravitatoria mg, donde g se supone constante, encontrar la velocidad y la altura alcanzada por el cohete en el momento en el que se agote el combustible, lo que habitualmente se denominan *velocidad de apagado* y *altura de apagado*.

Antes de plantearnos la resolución de este problema, creemos conveniente hacer un breve recordatorio de las leyes de Newton. Estos principios físicos serán la herramienta fundamental para resolver la cuestión que nos hemos propuesto y otras muchas que aparecerán más adelante.


[12]

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusq; determinationem componitur.

Lex. III.

Texto de la versión original en latín de los *Principia Mathematica* en el que aparecen las dos primeras leyes de Newton.

Material complementario

Las leyes de Newton

Para resolver el problema que acabamos de plantear es necesario utilizar las leyes de Newton. Enunciamos a continuación las tres leyes ya que serán una fuente inagotable de ejemplos para los distintos tipos de ecuaciones que analizaremos. Mayoritariamente, a lo largo de estas notas, haremos uso de la segunda ley de Newton. Sin embargo, tendremos oportunidad de ilustrar distintas situaciones teóricas con ejemplos en los que haremos uso de las restantes leyes.

Primera ley. *Un cuerpo permanece en estado de reposo, o de movimiento rectilíneo uniforme (es decir, con velocidad constante) si no actúan fuerzas externas sobre él.*

Segunda ley. *Para un cuerpo de masa m con velocidad v, el producto $p = mv$ suele denominarse momento lineal del cuerpo, entonces la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, $\mathbf{F}$, es igual a la derivada con respecto del tiempo del momento lineal, es decir, $\mathbf{F} = \frac{dp}{dt}$. En particular, para un cuerpo de masa constante m se satisface que $\mathbf{F} = m\frac{dv}{dt} = ma$, donde a es la aceleración del cuerpo.*

Tercera ley. *Si un cuerpo A ejerce una fuerza $\mathbf{F}$ sobre un cuerpo B, entonces el cuerpo B ejerce una fuerza $-\mathbf{F}$ sobre A.*

Nuestro problema plantea la determinación de los valores terminales para la altura y la velocidad de un cohete que se desplaza mediante la denominada *propulsión a chorro*. Este mecanismo consiste esencialmente en una cámara de

combustión, donde se quema el combustible, que dispone de unas aberturas o toberas situadas de la forma adecuada para dirigir los gases procedentes de la combustión en la dirección deseada. Cuando se inicia la combustión, los gases salen expelidos a gran velocidad, o sea, con un cierto momento lineal *hacia atrás*; y, en consecuencia, en virtud del principio de conservación del momento lineal,[5] el cohete adquiere un momento lineal igual *hacia delante*. Esto es el cohete es propulsado en una cierta dirección por la expulsión de una parte de su masa en dirección contraria. Si nos interesamos únicamente por el movimiento del cohete estaremos ante un problema mecánico de masa variable y tendremos que aplicar la segunda ley de Newton en términos de momentos lineales.

La masa del cohete en cada instante de tiempo la denotaremos por m y su velocidad en un instante t por v. La velocidad de los gases expulsados, vista desde un sistema de referencia en Tierra, que es inercial,[6] es $v - b$. El momento del cohete en el instante $t + \Delta t$ será al momento del cohete menos el momento de los gases expulsados, es decir,

$$p(t + \Delta t) = (m + \Delta m)(v + \Delta v) - \Delta m(v - b),$$

por tanto

$$\begin{aligned}\Delta p = p(t + \Delta t) - p(t) &= (m + \Delta m)(v + \Delta v) - \Delta m(v - b) - mv \\ &= m\Delta v + b\Delta m + \Delta m\Delta v\end{aligned}$$

y

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + b\frac{dm}{dt}.$$

Finalmente, usando la segunda ley de Newton, la ecuación del movimiento del cohete es

$$m\frac{dv}{dt} + b\frac{dm}{dt} = -mg,$$

donde $m = m_1 + m_2 - at$.

Algunas manipulaciones elementales nos llevan a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ab}{m} - g = \frac{ab}{m_1 + m_2 - at} - g.$$

Por integración elemental tendremos

$$v(t) = -b\log(m_1 + m_2 - at) - gt + C.$$

Si suponemos que en el instante inicial el cuerpo está en reposo, $v(0) = 0$, concluimos que

$$v(t) = -b\log\left(1 - \frac{at}{m_1 + m_2}\right) - gt.$$

[5]Si sobre una partícula o un sistema de partículas no actúa ninguna fuerza o la resultante de las fuerzas exteriores es nula, el momento lineal permanece constante.

[6]Recordar que un sistema de referencia inercial es aquel que no está acelerado. Las leyes de Newton son válidas para un observador estacionado en un sistema de referencia de este tipo.

Puesto que la cantidad de combustible viene dada por $m_2 - at$, la velocidad de apagado se determinará sustituyendo $t = m_2/a$ ya que en ese instante es cuando se agotará el combustible, con esto obtenemos que

$$v_{\text{apagado}} = v\left(\frac{m_2}{a}\right) = b\log\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) - \frac{gm_2}{a}.$$

Para determinar la altura de apagado basta obtener la altura del cohete en cada instante de tiempo integrando la velocidad y suponiendo que la altura incial es cero. Por tanto,[7]

$$h(t) = -b\left(\left(t - \frac{m_1+m_2}{a}\right)\log\left(1-\frac{at}{m_1+m_2}\right) - t\right) - g\frac{t^2}{2}$$

y

$$h_{\text{apagado}} = h\left(\frac{m_2}{a}\right) = \frac{bm_1}{a}\log\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) + \frac{m_2(2ab - gm_2)}{2a^2}.$$

Tomando los valores $m_2/(m_1+m_2) = 0.87$, $m_1+m_2 = 10^6$ Kg, $b = 3$ Km/sg y $a = 5000$ Kg/sg, llegamos a $v_{\text{apagado}} = 4.4$ Km/sg y $h_{\text{apagado}} = 30$ Km. Para colocar un satélite en órbita circular de altura h sobre la Tierra, hay que darle una velocidad de escape $v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{Tierra}}}{R_{\text{Tierra}}+h}}$, donde G es la constante de gravitación universal. Para $h = 100$ Km, la velocidad de escape es $v_{\text{escape}} = 7.8$ Km/sg. La v_{apagado} con los datos anteriores resulta insuficiente. En la práctica se utilizan cohetes con varias fases, en los que se van soltando sucesivos depósitos (fases) de combustible y se optimiza el ritmo de quemado para conseguir un incremento de la velocidad mayor. Por ejemplo, el Saturno V, que puso al primer hombre en la Luna, tenía tres fases.

1.3. Interpretación geométrica de la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$ para funciones escalares

Una ecuación diferencial ordinaria de la forma $x' = f(t, x)$, con f definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, puede interpretarse en el plano (t, x) como un *campo de pendientes o direcciones*. Este se obtiene asociando a cada punto del dominio D su pendiente,

$$(t, x) \longmapsto f(t, x),$$

y trazando por cada uno de esos puntos un segmento de recta de pendiente $f(t, x)$. Un campo de pendientes sugiere curvas en D con la propiedad de que en cada punto de éstas la recta tangente sigue la dirección del segmento de recta del campo de direcciones en el punto. Este procedimiento revela curvas solución de la ecuación de manera muy semejante a la forma en la que las limaduras de

[7]Usamos que

$$\int \log(1-\alpha t)\,dt = \left(t - \frac{1}{\alpha}\right)\log(1-\alpha t) - t + k.$$

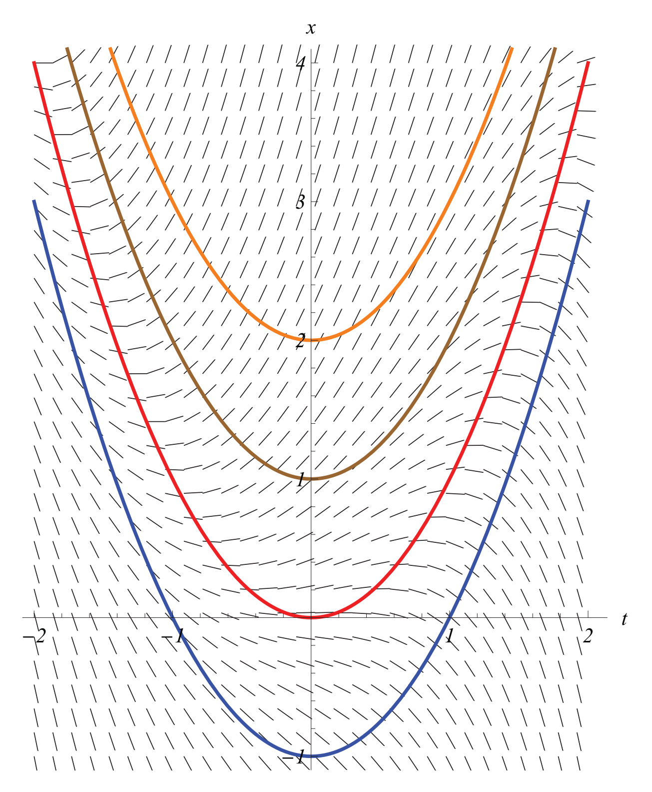


Figura 1.1: Campo de direcciones asociado a la ecuación $x' = x - t^2$ para (t,x) en $(-2,2) \times (-1,4)$ y las isoclinas correspondientes a $c = -1$ (en azul), $c = 0$ (en rojo), $c = 1$ (en marron) y $c = 2$ (en naranja).

hierro esparcidas sobre un papel y atraídas por los polos de un imán dejan ver las líneas del campo magnético.

De especial interés en este sentido son las líneas isoclinas dadas por

$$f(t,x) = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

El conocimiento de las isoclinas permite deducir un retrato aproximado de las soluciones. La isoclina nula, asociada con $c = 0$, resulta de especial importancia ya que sobre ella se producen los cambios en la monotonía de las soluciones $x(t)$.

En la figura 1.1 se muestra el campo de direcciones asociado a la ecuación $x' = x - t^2$ en el rectángulo $(-2,2) \times (-1,4)$ y algunas isoclinas asociadas con esta ecuación. En este ejemplo las isoclinas son parábolas simétricas respecto al eje vertical. La figura 1.2 representa el mismo campo de direcciones al que se ha añadido algunas soluciones de la ecuación con distintas condiciones iniciales. La curva que aparece en rojo corresponde a la isoclina nula $x = t^2$. Se observa claramente que es sobre esta isoclina sobre la que se producen los cambios de crecimiento en las curvas solución.

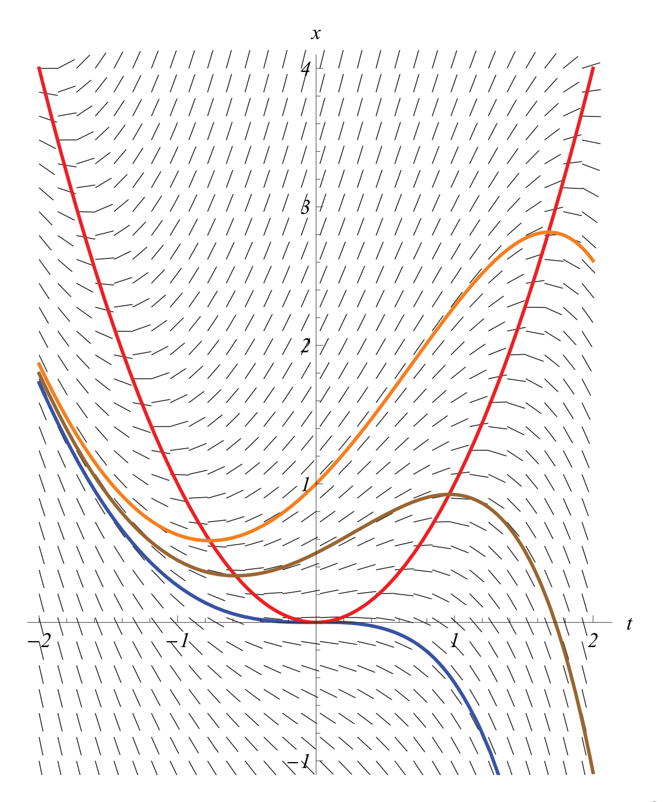


Figura 1.2: Campo de direcciones asociado a la ecuación $x' = x - t^2$ para (t, x) en $(-2, 2) \times (-1, 4)$ junto a las soluciones asociadas con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ (en azul), $x(0) = 1/2$ (en marrón) y $x(0) = 1$ (en naranja). En rojo se muestra la isoclina nula $x = t^2$.

Material complementario

Programando con Mathematica

Es posible utilizar Mathematica para generar campos de direcciones como se ha hecho en las figuras 1.1 y 1.2. En nuestro caso hemos utilizado Mathematica 6.0 y hemos procedido como se indica a continuación. En primer lugar debemos cargar el paquete de Mathematica que nos permite dibujar campos de vectores

```
Needs["VectorFieldPlots‘"]
```

El código que hemos usado para generar el gráfico en la figura 1.1 ha sido

```
Show[VectorFieldPlot[{1, x - t^2}, {t, -2, 2}, {x, -1, 4},
```

```
                    PlotPoints -> 40, HeadLength -> 0,
                    ScaleFunction -> (0.5 &)],
     Plot[{-1 + t^2, t^2, 1 + t^2, 2 + t^2}, {t, -2, 2}],
     PlotRange -> {-1.1, 4.1}, AspectRatio -> Automatic,
     AxesStyle -> Directive[Medium, Italic], AxesLabel -> {t,x}]
```

El comando `VectorFieldPlot` *es el encargado de generar el campo de vectores. La orden* `HeadLength` *se encarga de eliminar la flecha de los vectores y* `Plot` *dibuja las isoclinas. Con* `Show` *se muestran juntos ambos gráficos. Para la figura 1.2 hemos usado*

```
Show[VectorFieldPlot[{1, x - t^2}, {t, -2, 2}, {x, -1, 4},
                    PlotPoints -> 40, HeadLength -> 0,
                    ScaleFunction -> (0.5 &)],
     Plot[{t^2, 2 - 2*Exp[t] + 2*t + t^2,
           (4 - 3*Exp[t] + 4*t + 2*t^2)/2,
           2 - Exp[t] + 2*t + t^2},
          {t, -2, 2}],
     PlotRange -> {-1.1, 4.1}, AspectRatio -> Automatic,
     AxesStyle -> Directive[Medium, Italic], AxesLabel -> {t,x}]
```

En este caso `Plot` *traza las soluciones y la isoclina nula. Para obtener las soluciones de los problemas de valores iniciales asociados con la ecuación que estamos tratando hemos usado la orden* `DSolve` *que permite resolver ciertas ecuaciones diferenciales.*

Para generar el campo de direcciones asociado a una ecuación de la forma $x' = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ *sustituiremos* `{1, x - t^2}` *en* `VectorFieldPlot` *por el vector cuyas componentes son* $(Q(t,x), P(t,x))$.

1.4. Cambios de coordenadas

La solución de un problema de matemáticas, en general, puede obtenerse de diversas formas. Sin embargo, una elección apropiada del contexto en el que se trabaja puede simplificar la resolución de manera importante.[8] En el estudio de las ecuaciones diferenciales podemos usar una herramienta que va a resultar de gran importancia a la hora de abordar algunos tipos de ecuaciones. Nos referimos a los *cambios de coordenadas*. Dados A y B, dos conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^m$, un cambio de coordenadas es un homeomorfismo $g\colon B \to A$ con g y g^{-1} de clase C^q, con $q \geq 0$.

Supongamos que tenemos una ecuación $x' = f(t,x)$, con f definida sobre un subconjunto abierto D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ que contiene a las variables (t,x). Un

[8] Basta recordar cualquier problema de geometría analítica. En estos casos la elección de un sistema de referencia adecuado permite obtener, en muchas ocasiones, unas ecuaciones sumamente simples que, de otro modo, podrían resultar intratables.

cambio de coordenadas que aplique un conjunto D', subconjunto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ que contiene las nuevas coordenadas (s,u), en D mediante un homeomorfismo g, nos transformará la ecuación dada en otra de la forma $\frac{du}{ds}=h(s,u)$.[9] [10] Esto es posible ya que la relación $x=x(t)$ induce una relación de la forma $u=u(s)$. Además, gracias a la regla de la cadena, podemos expresar la derivada $x'=\frac{dx}{dt}$ en términos de $\frac{du}{ds}$. Supuesto que podamos resolver la ecuación en las nuevas coordenadas (s,u), recuperaremos la solución original invirtiendo el cambio de coordenadas.

Uno de los cambios de coordenadas que usaremos más frecuentemente es el denominado cambio a coordenadas polares en el plano. Podemos considerar los conjuntos abiertos

$$B=\{(\theta,r)\colon \theta\in(0,2\pi), r\in(0,\infty)\} \qquad \text{y} \qquad E=\mathbb{R}^2\setminus\{(t,x)\colon x=0, t\geq 0\}.$$

La aplicación

$$\begin{aligned} g : B &\longrightarrow E \\ (\theta,r) &\longmapsto (t,x)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

es un homemomorfismo entre los conjuntos B y E. Geométricamente θ representa el ángulo formado por el vector de coordendas (t,x) con la horizontal $(x=0)$ y r es el módulo de dicho vector. Supuesto que $r=r(\theta)$, la situación se corresponde con el esquema

$$\begin{array}{ccccccccccc} \theta & \leftarrow & r & \nwarrow & & & & \nearrow & r & \rightarrow & \theta \\ & & & & t & \leftarrow & x & & & & \\ & & \theta & \swarrow & & & & \searrow & \theta & & \end{array}$$

De esta forma

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\dfrac{dx}{dr}\dfrac{dr}{d\theta}+\dfrac{dx}{d\theta}}{\dfrac{dt}{dr}\dfrac{dr}{d\theta}+\dfrac{dt}{d\theta}}=\frac{\operatorname{sen}\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\theta}$$

y la ecuación $x'=f(t,x)$, con f definida en un dominio D en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, se convierte en

$$\frac{\operatorname{sen}\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r\operatorname{sen}\theta}=f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta),$$

que puede reescribirse como

$$\frac{dr}{d\theta}=h(r,\theta)$$

para una cierta función h soportada en un conjunto $D'\subseteq(0,\infty)\times(0,2\pi)$.

[9] Para ser precisos, esta transformación ocurre si g es de clase C^q, con $q\geq 1$.

[10] Cuando sólo se produzca un cambio en la variable independiente hablaremos de cambio de variable, si el cambio se produce en la variable dependiente diremos que se trata de un cambio de función y cuando se modifiquen ambas variables nos referiremos al cambio de coordenadas como cambio de variable y función.

1.5. Escarabajos, ecuaciones diferenciales y espirales logarítmicas

Veamos cómo es posible utilizar el cambio a coordenadas polares descrito en la sección anterior para resolver un problema que en un principio puede parecer complicado:

> **El problema de los escarabajos.** Cuatro escarabajos se posan en las esquinas de una mesa cuadrada de lado a. Al mismo tiempo, comienzan a caminar con la misma velocidad, de tal modo que cada uno de ellos se desplaza constantemente hacia el que se encuentra situado a su izquierda. Determinar la trayectoria y la distancia que ha recorrido cada uno de los escarabajos antes de juntarse en el centro de la mesa.

Por la simetría que presenta el problema basta con determinar la ecuación de la trayectoria de uno de los escarabajos y obtener la de los restantes mediante giros de amplitud $\pi/2$ en torno al centro de la mesa. La situación se describe en la figura 1.3. Supongamos un sistema de coordenadas cartesianas con ejes en las diagonales del cuadrado y origen en el centro O del cuadrado. Si $P = (x, y)$ es un punto de la trayectoria del escarabajo que ha partido del vértice A situado en el semieje OX, teniendo en cuenta que siempre se desplaza hacia el escarabajo que ha iniciado su recorrido en el vértice B, resulta sencillo comprobar que el ángulo que forma el vector OP con la recta tangente a la trayectoria del escarabajo en el punto P es $\alpha = 3\pi/4$ y coincide con el formado por el lado AB del cuadrado con el semieje OX. La recta tangente a la trayectoria en el punto P tendrá una pendiente igual a $\tan(\alpha + \theta)$, donde θ es el ángulo formado por el vector OP con el semieje OX, y de esta forma se verificará la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\alpha + \theta).$$

Puesto que el lado derecho de la ecuación depende del ángulo θ parece natural considerar un cambio a coordenadas polares que incorpore dicho ángulo. Tomando $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $r = r(\theta)$, llegamos a que

$$\frac{\frac{dr}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta} = \tan(\alpha + \theta).$$

Ahora, usando la expresión para la tangente del ángulo suma, obtenemos la ecuación

$$\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = -1,$$

que es equivalente a

$$\frac{dr}{d\theta} = -r.$$

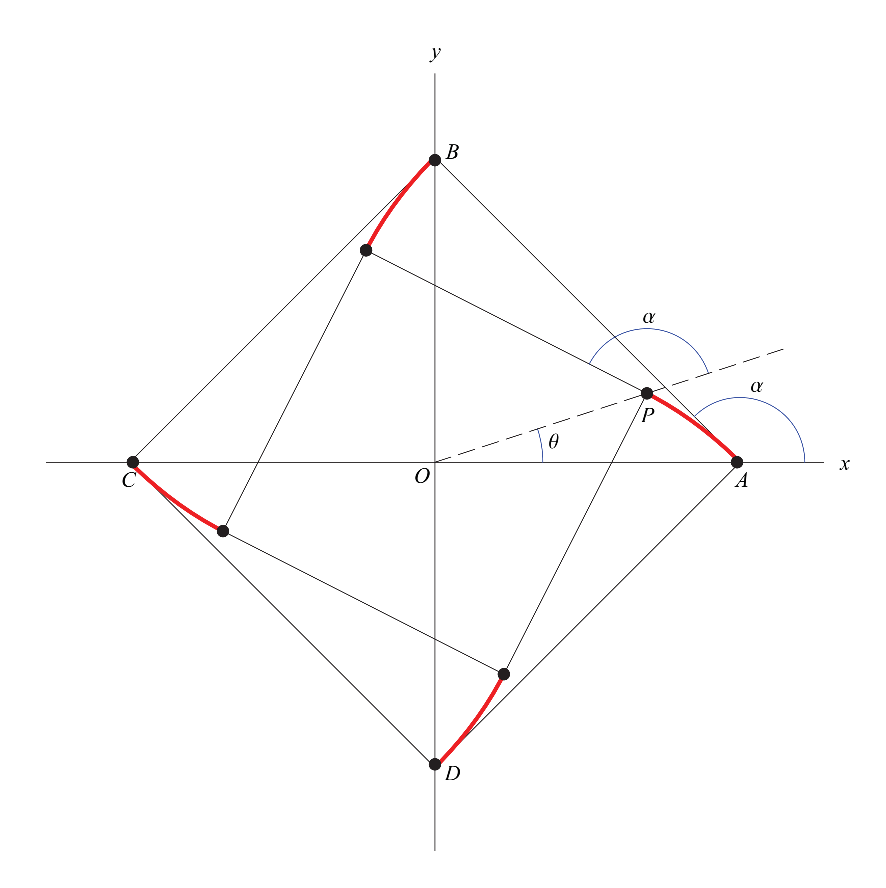


Figura 1.3: La figura ilustra el desplazamiento de los escarabajos a lo largo de la mesa.

La solución general de esta ecuación es la familia de funciones $r = Ae^{-\theta}$ como justificaremos en el siguiente capítulo.[11] Ahora, teniendo en cuenta que $(x(0), y(0)) = (a/\sqrt{2}, 0)$, llegamos a

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{-\theta}\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta,$$

con $\theta \in \mathbb{R}^+$, que son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria y se corresponden con una espiral logarítmica. La figura 1.4 muestra cómo la curva trazada

[11] De todos modos, resulta sencillo comprobar por simple derivación que las funciones de la forma Ae^{kt} son soluciones de la ecuación $x' = kx$. Incluso podemos ir un poco más lejos y afirmar que cualquier solución es de esa forma. Supongamos que $f(t)$ es una cierta solución de la ecuación. Consideremos la función $g(t) = e^{-kt}f(t)$. Entonces, usando que f es solución de $x' = kx$, tendremos que

$$g'(t) = e^{-kt}(f(t) - kf(t)) = 0,$$

lo que implica que $g(t) = A$, para una cierta constante A, y entonces $f(t) = Ae^{kt}$.

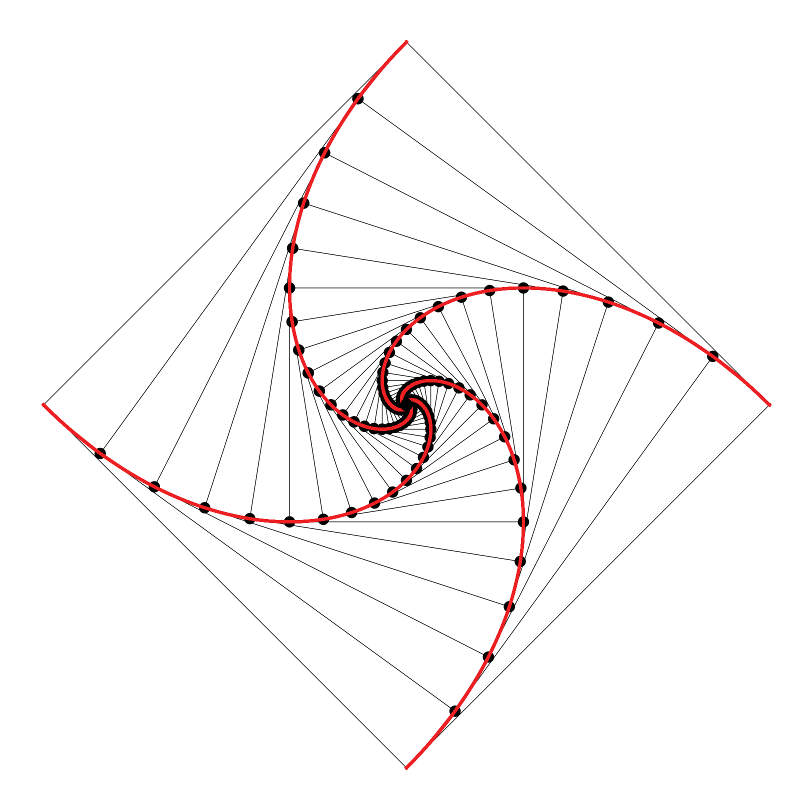
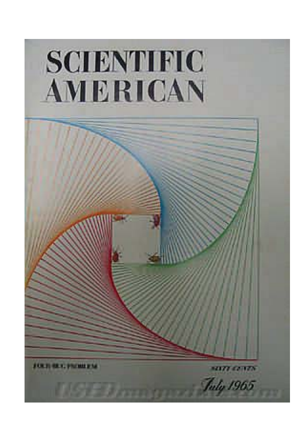


Figura 1.4: La gráfica muestra como se generan las trayectorias espirales por el giro del cuadrado al que se le va reduciendo convenientemente la longitud del lado.

por cada insecto va siendo generada por el giro del cuadrado inicial al que se le va reduciendo el lado de acuerdo con el ángulo girado. Finalmente, calcular la distancia recorrida por cada escarabajo es sencillo:

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\infty} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-\theta} \sqrt{(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2 + (-\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2}\, d\theta \\
&= a \int_0^{\infty} e^{-\theta}\, d\theta = a.
\end{aligned}
$$



Portada de julio de 1965 de *Scientific American* con la trayectoria de los escarabajos.

El problema que acabamos de plantear y resolver cobró fama tras su publicación, en julio de 1965, en la columna redactada por Martin Gardner "Mathematical Games" de la revista *Scientific American*. Una propuesta similar, con cuatro perros, puede verse en el libro de Hugo Steinhaus *Mathematical Snapshots*, aparecido en 1939. Sin embargo, la primera aparición de un enunciado

análogo en la literatura matemática se debe al matemático francés Edouard Lucas, quien en mayo de 1877 planteó, en la revista *Nouvelle correspondance mathématique*, el siguiente enunciado: *Tres perros se encuentran sobre los vértices de un triángulo equilátero y cada uno de ellos comienza a correr tras otro. ¿Qué curva describe cada uno de ellos?* La respuesta es, como en el caso que hemos analizado, una espiral logarítmica. Una solución debida a Henri Brocard se publicó en el número de agosto de la misma revista. De todos formas, todavía es posible encontrar una referencia anterior para esta cuestión: fue propuesta en los "Cambridge University Mathematical Tripos Examination" de enero de 1871. En esta primera aparición no se imponía que fuera equilátero el triángulo de partida y se preguntaba por la velocidad de cada uno de los animales para que el triángulo formado por sus posiciones en cada instante fuese semejante al inicial (obviamente, todos deben llevar la misma velocidad). En este tipo de situación (es decir, sí el triángulo inicial no es necesariamente equilátero) se puede plantear otra cuestión interesante: *¿Se encontrarán en algún instante determinado tres perros situados en los vértices de un triángulo arbitrario, si cada uno de ellos comienza a correr tras otro a una misma velocidad?* La respuesta es afirmativa no importa cuál sea el triángulo de partida. Este problema apareció propuesto por Harry Bateman en su libro *Differential equations* (Londres, 1918), donde lo atribuye a Frank Morley. Aunque el análisis de este problema no resulta excesivamente complicado dejamos su estudio al interés del lector, pudiéndose consultar al respecto el libro de P. J. Nahin, *Chases and escapes* (Princeton University Press, 2007).

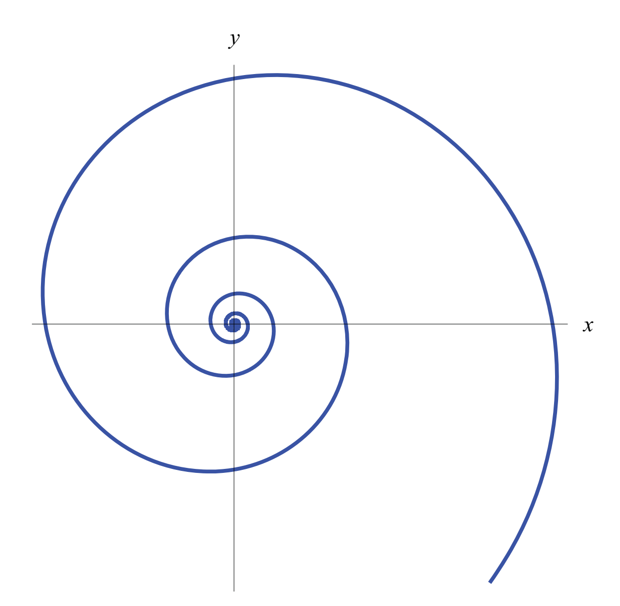


Figura 1.5: Una espiral logarítmica.

Hemos dicho antes que nuestros escarabajos describían espirales logarítmicas. Las ecuaciones paramétricas más generales para este tipo de curvas son

$$x = ke^{\lambda\theta}\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = ke^{\lambda\theta}\operatorname{sen}\theta,$$

donde el parámetro $\theta \in \mathbb{R}$ y λ y k son constantes reales. La figura 1.5 muestra una representación gráfica en un caso particular.

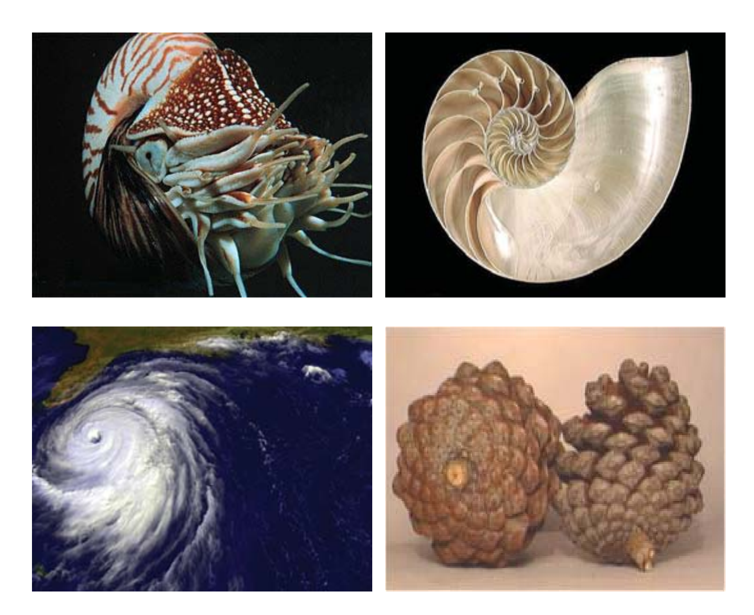


Figura 1.6: Las imágenes de la fila superior muestran un nautilus y una sección de su concha donde se observa la presencia de la espiral logarítmica. En las imágenes de la fila inferior se pueden observar las espirales logarítmicas que aparecen en las borrascas y en las piñas de las coníferas.

Como puede verse en la figura 1.6, es frecuente encontrar espirales logarítmicas en la naturaleza. Por ejemplo, la concha del nautilus (Nautilius Pompilius), un molusco cefalópodo marino, crece arrollándose desde su centro y hacia el exterior adquiriendo esa forma. Igualmente se presenta en la distribución que adoptan las pipas en los girasoles, en las piñas de las coníferas o (de manera aproximada) en el patrón que siguen las borrascas atmosféricas, los huracanes o incluso algunas galaxias. El origen del estudio matemático de esta espiral tiene que ver posiblemente con la navegación. A lo largo de los siglos XVI y XVII miles de barcos surcaban los océanos. Los navegantes sabían que sobre la superficie terrestre la distancia más corta entre dos puntos es un arco de círculo máximo. Pero para seguir una trayectoria que encaje con este arco sería necesario realizar continuos cambios de rumbo. Por ello sustituían esta trayectoria óptimo por otra en la que el ángulo con el que se cortaban todos los meridianos que atravesaba se mantenía constante. Las trayectorias de este tipo dibujan

en la esfera terrestre una curva llamada loxodrómica. Pero los navegantes no trabajaban sobre una esfera, sus mapas eran proyecciones planas de la esfera. Pues bien, la proyección estereográfica de la esfera sobre un plano convierte a la loxodrómica en una… espiral.

Las ecuaciones paramétricas para la espiral logarítmica fueron obtenidas por René Descartes en 1638 como solución a un problema propuesto por Galileo Galilei. Evangelista Torricelli, en 1645, determinó la longitud de una espiral desde un punto cualquiera hasta su polo (el punto donde tiende a acumularse la espiral). Sin embargo, fue Jacob Bernoulli quien, a finales del siglo XVII, estudió en profundidad las propiedades de la espiral logarítmica a la que denominó *spira mirabilis* (espiral maravillosa). Entre las propiedades que analizó Jacob Bernoulli destaca el hecho de que la espiral logarítmica es la única curva que verifica que su evoluta, su involuta, su cáustica y su podaria[12] son, a su vez, espirales logarítmicas (giradas un cierto ángulo con respecto a la inicial). Este hecho le provocó tal fascinación que pidió que en su tumba, en el cementerio de Basilea, figurase la inscripción *Eadem mutata resurgo*, que puede traducirse como *Aún siendo modificada, resurjo*, y un grabado en piedra con una espiral logarítmica. Sin embargo, sus últimas voluntades no fueron cumplidas estrictamente. Como podemos ver en la figura 1.7 lo que hay tallado en su tumba es una espiral arquimediana.[13]





Figura 1.7: A la izquierda, una imagen de Jacob Bernoulli (1654–1705) y, a la derecha, la espiral que aparece en su tumba en el cementerio de Basilea. Podemos afirmar que el cantero que realizó la sepultura no era un buen matemático pues talló una casi perfecta espiral arquimediana.

Si suponemos un sistema de coordenadas de forma que el origen es el polo de una cierta espiral y que el punto P desde el que deseamos calcular la longitud se corresponde con $\theta = 0$, el resultado de Torricelli estable que la longitud de la espiral comprendida entre P y el polo es igual a la longitud del segmento de la recta tangente a la espiral en P limitado por los ejes coordenados; es decir, coincide con la longitud del segmento PT en la figura superior. Si hubiésemos recordado antes este hecho, el cálculo de la longitud del camino seguido por los escarabajos lo habríamos podido efectuar más rápidamente, teniendo en cuenta que en ese caso el segmento PT se corresponde con el lado del cuadrado inicial de longitud a.

[12] La evoluta, la involuta, la caústica y la podaria son curvas asociadas a una dada. En la siguiente sección aparecerá el concepto de evoluta y en el apartado de problemas definiremos la caústica.

[13] Las ecuaciones paramétricas de una espiral arquimediana (de ecuación en polares $r = a\theta$) son

$$x = a\theta\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = a\theta\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

En este caso la separación de dos puntos que se diferencían en un ángulo de 2π es constante e independiente del ángulo inicial; para la espiral logarítmica no ocurre así ya que en este caso la separación va aumentando de manera geométrica.

1.6. Sobre envolventes

Sea $\phi(t,x,\alpha)=0$ una familia de curvas planas dependientes de un cierto parámetro $\alpha\in A$, con $A\subseteq\mathbb{R}$, y donde suponemos que la función ϕ es diferenciable respecto a t, x y α. La envolvente de la familia de curvas, si existe, es una nueva curva Φ que en cada uno de sus puntos es tangente a una de las curvas de la familia dada y tal que cada curva de la familia es tangente al menos en un punto a la envolvente. Entenderemos que dos curvas son tangentes en un punto si en dicho punto ambas curvas comparten la recta tangente.

Si existe la envolvente, cada uno de sus puntos será de la forma $(t,x)=(t(\alpha),x(\alpha))$ verificando la ecuación de la familia de curvas; es decir,

$$\phi(t(\alpha),x(\alpha),\alpha)=0. \tag{1.4}$$

Así, derivando con respecto a α, tendremos que

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{dt}{d\alpha}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}=0. \tag{1.5}$$

Además, si se verifica que $\frac{\partial\phi}{\partial x}\neq 0$ (el razonamiento sería análogo suponiendo que $\frac{\partial\phi}{\partial t}\neq 0$), la ecuación $\phi(t,x,\alpha)=0$ define implícitamente una función $x=x(t,\alpha)$ diferenciable y la pendiente de la recta tangente a la curva $\phi(t,x,\alpha)=0$ en un punto (t,x) de ella vendrá dada por

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial t}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial x}}.$$

Por la definición de curva envolvente, también tendremos que la pendiente de la recta tangente en un punto (t,x) de la envolvente será

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\dfrac{dx}{d\alpha}}{\dfrac{dt}{d\alpha}}.$$

Puesto que las pendientes anteriores deben coincidir sobre los puntos de la envolvente, podemos concluir que

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{dt}{d\alpha}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha}=0.$$

De esta manera, el sistema formado por (1.4) y (1.5) queda reducido a

$$\begin{cases}\phi(t,x,\alpha)=0,\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\alpha}(t,x,\alpha)=0.\end{cases} \tag{1.6}$$

Acabamos de deducir que si existe la envolvente, ésta debe satisfacer el sistema (1.6), que proporciona unas ecuaciones paramétricas para la envolvente Φ

en caso de existencia. Sin embargo, puede ocurrir que las soluciones de este sistema no sean envolventes. En concreto, resulta sencillo comprobar que el lugar geométrico de los puntos singulares (aquellos para los que se cumple que $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$) de la familia de curvas también cumplirá el sistema (1.6). Es por esto que de manera general la curva definida por el sistema (1.6) se denomina *línea discriminante*. Por tanto, en cada ocasión deberemos comprobar qué es lo que representa la línea discriminante.

Es un sencillo ejercicio comprobar que si la solución general de una ecuación diferencial ordinaria es una familia de curvas de la forma (1.2) (con $n = 1$), la envolvente de esta familia será una solución *singular* de la ecuación. Este tipo de soluciones son *singulares* ya que no se pueden obtener fijando el parámetro C de la solución general.

***Ejemplo* 1.** Determinar la envolvente de la familia de circunferencias de radio R centradas en los puntos de una circunferencia de radio $2R$.

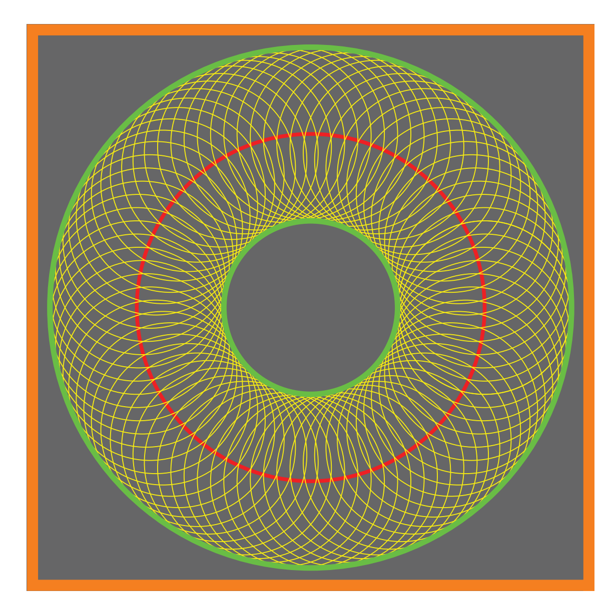


Figura 1.8: En amarillo se muestran las circunferencias de radio R centradas sobre la circunferencia de radio $2R$ (trazada en rojo); en verde aparece la envolvente, formada por dos circunferencias de radios R y $3R$ concéntricas con la de color rojo.

La ecuación de la familia de circunferencias es

$$(t - 2R\cos\alpha)^2 + (x - 2R\operatorname{sen}\alpha)^2 = R^2.$$

En este caso, el sistema (1.6) se transforma en

$$\begin{cases}(t-2R\cos\alpha)^2+(x-2R\operatorname{sen}\alpha)^2=R^2,\\ t\operatorname{sen}\alpha-x\cos\alpha=0,\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}4Rx\operatorname{sen}\alpha+4Rt\cos\alpha=t^2+x^2+3R^2,\\ t\operatorname{sen}\alpha-x\cos\alpha=0.\end{cases}$$

Usando la regla de Cramer tenemos que

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\begin{vmatrix}t^2+x^2+3R^2 & 4Rt\\ 0 & -x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4Rx & 4Rt\\ t & -x\end{vmatrix}}=\frac{x(t^2+x^2+3R^2)}{4R(t^2+x^2)}$$

y

$$\cos\alpha=\frac{\begin{vmatrix}4Rx & t^2+x^2+3R^2\\ t & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4Rx & 4Rt\\ t & -x\end{vmatrix}}=\frac{t(t^2+x^2+3R^2)}{4R(t^2+x^2)}.$$

Finalmente, la relación $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ nos da

$$\begin{aligned}16R^2(t^2+x^2)=(t^2+x^2+3R^2)^2 &\iff (t^2+x^2)^2-10R^2(t^2+x^2)+9R^4=0\\ &\iff (t^2+x^2-R^2)(t^2+x^2-9R^2)=0;\end{aligned}$$

es decir, la envolvente está formada por las circunferencias centradas en el origen y de radios R y $3R$. La figura 1.8 muestra la familia de curvas y la envolvente. ◁

***Ejemplo* 2.** Consideremos la familia de curvas

$$x^4-x^2+(t-\alpha)^2=0.$$

La línea discriminante en esta ocasión viene dada por las soluciones del sistema

$$\begin{cases}x^4-x^2+(t-\alpha)^2=0,\\ t=\alpha,\end{cases}$$

es decir, está formada por las rectas $x=0$, $x=1$ y $x=-1$. Las rectas $x=1$ y $x=-1$ son la envolvente pero la recta $x=0$ es una recta de puntos singulares, ya que cada punto de la forma $(t,0)$ es un punto doble de las curvas de la familia. La figura 1.9 ilustra la situación. ◁

***Ejemplo* 3.** Consideremos una familia de rectas planas tales que el segmento de las mismas limitado por los ejes coordenados es de longitud constante L. Determinar la envolvente de la familia de rectas.

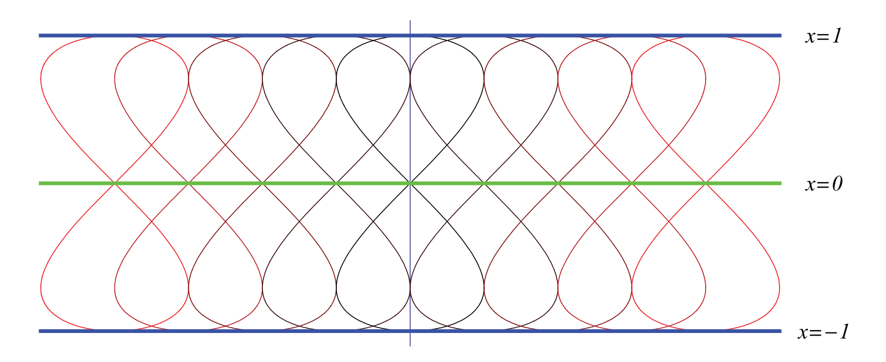


Figura 1.9: Las curvas de la familia $x^4 - x^2 + (t - \alpha)^2 = 0$ son los lazos verticales que aparecen en la figura; se muestran en azul las rectas $x = 1$ y $x = -1$ que forman la envolvente, y en verde la recta $x = 0$ de puntos dobles.

Los segmentos en cuestión estarán limitados por los puntos $(L \cos \alpha, 0)$ y $(0, L \operatorname{sen} \alpha)$ para $\alpha \in [0, 2\pi)$ (véase la figura 1.10). Cada uno de estos segmentos se encuentra sobre la recta

$$t \operatorname{sen} \alpha + x \cos \alpha = L \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$$

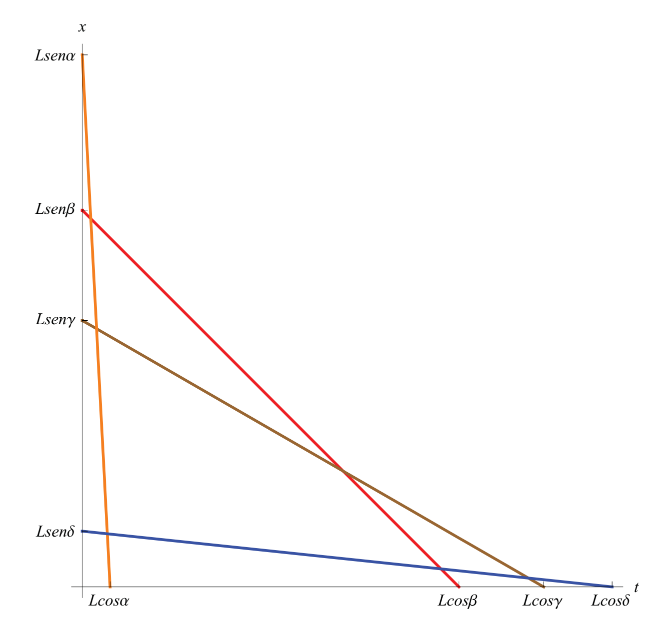


Figura 1.10: Algunos segmentos de longitud constante L del Ejemplo 3.

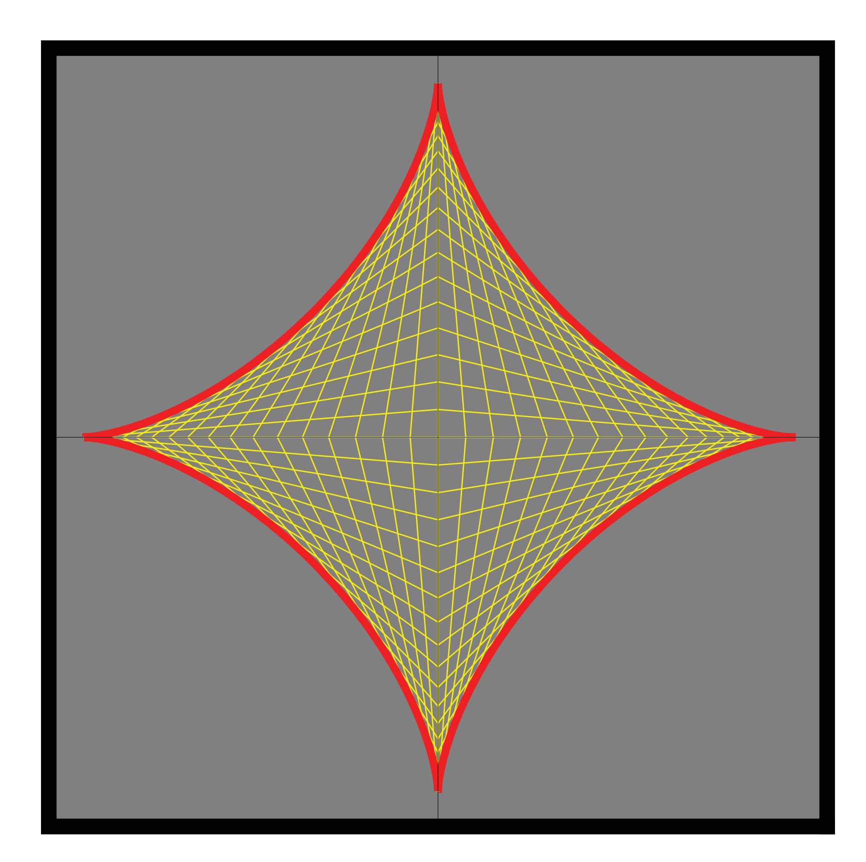


Figura 1.11: Algunas de las rectas de la familia $t \operatorname{sen} \alpha + x \cos \alpha = L \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ y su envolvente (en rojo), la astroide $x^{2/3} + t^{2/3} = L^{2/3}$.

Para esta familia de rectas la línea discriminante está dada por

$$\begin{cases} t \operatorname{sen} \alpha + x \cos \alpha = L \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, \\ t \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha = L(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha), \end{cases} \iff \begin{cases} t = L \cos^3 \alpha, \\ x = L \operatorname{sen}^3 \alpha, \end{cases}$$
$$\iff t^{2/3} + x^{2/3} = L^{2/3};$$

es decir, la envolvente es una astroide. Algunas rectas de la familia y su envolvente se muestran en la figura 1.11. $\triangleleft$

Ejemplo 4. Determinar la envolvente de la familia de circunferencias centradas sobre los puntos de una hipérbola equilátera y que pasan por el centro de dicha hipérbola.[14]

[14]Para una hipérbola de la forma

$$\left(\frac{t - C_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x - C_2}{b}\right)^2 = 1,$$

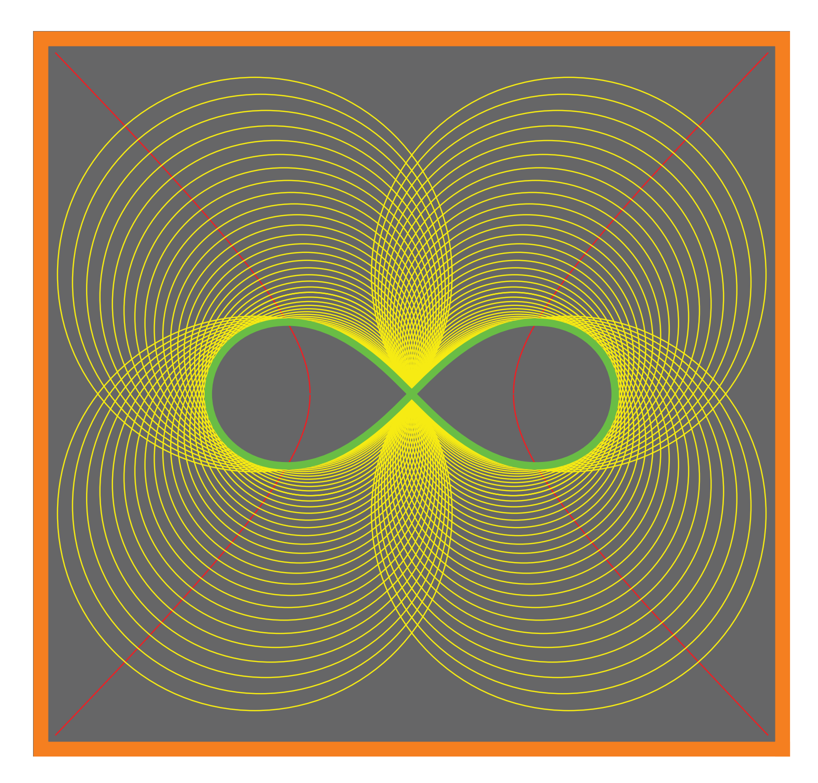


Figura 1.12: La familia de circunferencias centradas sobre la hipérbola $t^2 - x^2 = a^2$ del Ejemplo 4 junto con su envolvente (en verde), la lemniscata $4a^2(t^2 - x^2) = (t^2 + x^2)^2$.

Podemos limitarnos a considerar la hipérbola equilátera, centrada en $(0, 0)$,

$$t^2 - x^2 = a^2.$$

Esta curva puede parametrizarse como

$$t = \pm a \cosh s \qquad x = a \operatorname{senh} s, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Si $a > 0$, lo que suponemos de ahora en adelante, la parametrización con $+a$ recorre la rama derecha de la hipérbola y la correspondiente a $-a$ la rama izquierda. Por simplicidad, trabajaremos únicamente con la parametrización de la rama derecha. Una circunferencia de radio r centrada en la hipérbola tiene la forma

$$(t - a \cosh s)^2 + (x - a \operatorname{senh} s)^2 = r^2, \qquad s \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+.$$

Determinaremos el radio r imponiendo que la circunferencia pase por el punto $(0, 0)$, lo que nos da

$$r^2 = a^2 \cosh(2s),$$

llamamos vértices a los puntos $(C_1 - a, C_2)$ y $(C_1 + a, C_2)$ y centro al punto medio del segmento que une los vértices (C_1, C_2). Recordar que una hipérbola se dice equilátera si $a = b$.

donde hemos usado la identidad $\cosh^2 s + \operatorname{senh}^2 s = \cosh(2s)$. De esta forma concluimos que la familia de circunferencias considerada tiene por ecuación

$$(t - a\cosh s)^2 + (x - a\operatorname{senh} s)^2 = a^2\cosh(2s), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

En esta ocasión el sistema (1.6) se convierte en

$$\begin{cases} t^2 + x^2 - 2a(t\cosh s + x\operatorname{senh} s) = 0, \\ t\operatorname{senh} s + x\cosh s = 0, \end{cases}$$

de donde, usando la regla de Cramer, deducimos

$$\cosh s = \frac{1}{2a(t^2 - x^2)}\begin{vmatrix} t^2 + x^2 & 2ax \\ 0 & t \end{vmatrix} = \frac{t(t^2 + x^2)}{2a(t^2 - x^2)}$$

y

$$\operatorname{senh} s = \frac{1}{2a(t^2 - x^2)}\begin{vmatrix} 2at & t^2 + x^2 \\ x & 0 \end{vmatrix} = -\frac{x(t^2 + x^2)}{2a(t^2 - x^2)}.$$

Finalmente, usando la relación $\cosh^2 s - \operatorname{senh}^2 s = 1$, llegamos a la ecuación de la envolvente:

$$1 = \cosh^2 s - \operatorname{senh}^2 s = \left(\frac{t(t^2 + x^2)}{2a(t^2 - x^2)}\right)^2 - \left(-\frac{x(t^2 + x^2)}{2a(t^2 - x^2)}\right)^2,$$

que puede reescribirse como

$$4a^2(t^2 - x^2) = (t^2 + x^2)^2.$$

Se trata de la ecuación de una lemniscata. En la figura 1.12 aparecen representadas la hipérbola lugar de los centros, la familia de circunferencias y la lemniscata. ◁

***Ejemplo* 5.** El siguiente ejemplo involucrará todas la cónicas.

> **Una imagen, todas las cónicas.** Tomemos un trozo de papel, dibujemos en él una circunferencia de radio uno, y fijemos un punto P en el interior del círculo. Sea Q un punto cualquiera de la circunferencia, y supongamos que doblamos el papel haciendo que Q coincida con P (véase la figura 1.13). A continuación, trazamos una línea sobre la marca dejada por el pliegue en el papel. Si hacemos esto para cada uno de los puntos de la circunferencia aparecerá una región limitada por la familia de rectas. ¿Qué forma tiene esa región?

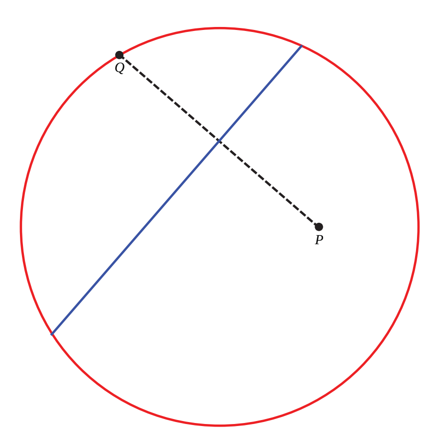


Figura 1.13: Diagrama del Ejemplo 5. En azul hemos trazado la línea obtenida tras el pliegue que hace coincidir los puntos P y Q.

Para cada punto Q la recta trazada es la mediatriz del segmento PQ. La región buscada es interior a la envolvente de la familia de rectas formada considerando todos los posibles puntos Q de la circunferencia. Tomemos un sistema de referencia rectangular con origen en el centro de la circunferencia y de tal forma que $P = (a, 0)$, para algún $-1 < a < 1$. Un punto Q arbitrario de la circunferencia tendrá coordendas $Q = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, para $t \in [0, 2\pi)$, y las rectas que limitan la región buscada pueden escribirse como

$$c_t^a(x, y) := x(a - \cos t) - y \operatorname{sen} t + \frac{1 - a^2}{2} = 0.$$

La envolvente de esta familia está dada por

$$c_t^a(x, y) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial c_t^a(x, y)}{\partial t} = 0.$$

De este sistema podemos deducir que las ecuaciones paramétricas (con parámetro t) de la envolvente son

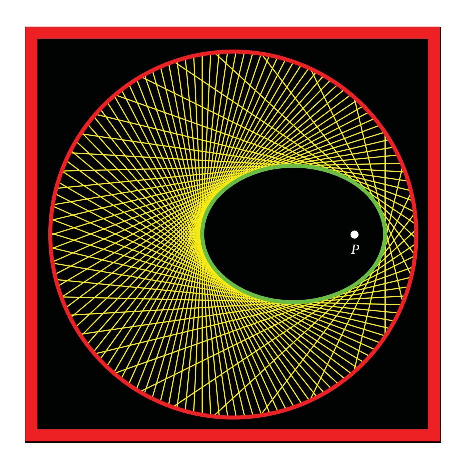
$$x_a(t) = \frac{1 - a^2}{2(1 - a\cos t)} \cos t \qquad \text{e} \qquad y_a(t) = \frac{1 - a^2}{2(1 - a\cos t)} \operatorname{sen} t,$$

para $t \in [0, 2\pi)$; estas son las ecuaciones paramétricas de la elipse, que denotaremos por E_a,

$$4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4y^2}{1 - a^2} = 1,$$

frontera de la región que circunda la familia de rectas.

Si consideramos el punto P exterior a la circunferencia de partida el proceso anterior puede reproducirse pero considerando $|a| > 1$. En este caso la envolvente E_a es una hipérbola. Hemos representado los dos casos en la figura 1.14.



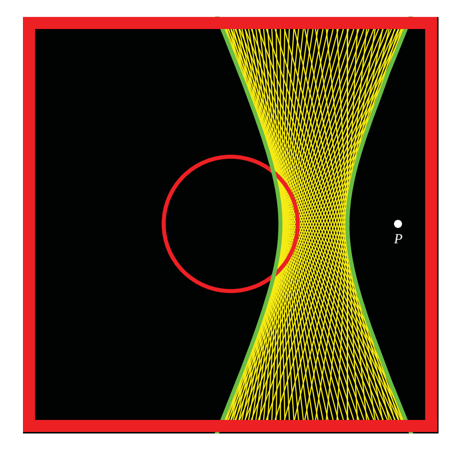


Figura 1.14: La familia de rectas $c_t^a(x, y) = 0$, en amarillo, y su envolvente E_a, en verde; a la izquierda el caso $|a| < 1$ y a la derecha el caso $|a| > 1$.

Al variar el parámetro a, la familia de cónicas

$$\mathcal{C} = \left\{ 4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4y^2}{1 - a^2} = 1 \colon a \in \mathbb{R} \right\}$$

(entendiendo que para $|a| = 1$ degenera en la recta $y = 0$) esconde una última sorpresa. Su envolvente es la curva

$$(-1 + x^2 - 2y)(-1 + x^2 + 2y) = 0;$$

es decir, la pareja de parábolas $y = \pm\frac{1-x^2}{2}$. La familia de cónicas $\mathcal{C}$ y su envolvente se muestran en la figura 1.15: una imagen, todas las cónicas. $\triangleleft$

1.7. El tiro parabólico

La determinación de la trayectoria de un proyectil lanzado desde la superficie de la tierra con una cierta velocidad y formando un ángulo determinado con la horizontal es una cuestión antigua. El primero que describe la trayectoria parabólica de este movimiento es Galileo Galilei. A pesar de que sus primeros trabajos al respecto datan de finales del siglo XVI y comienzos del XVII, no es hasta 1638 cuando aparecen impresos sus resultados. Se trata del libro *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze* (la portada puede verse en la figura 1.16 junto a un retrato de Galileo), donde recoge gran parte de sus contribuciones a la física. En este trabajo en concreto describe la forma parabólica que sigue la trayectoria de un proyectil disparado horizontalmente. Durante los últimos años de su vida Galileo estuvo asistido, en calidad

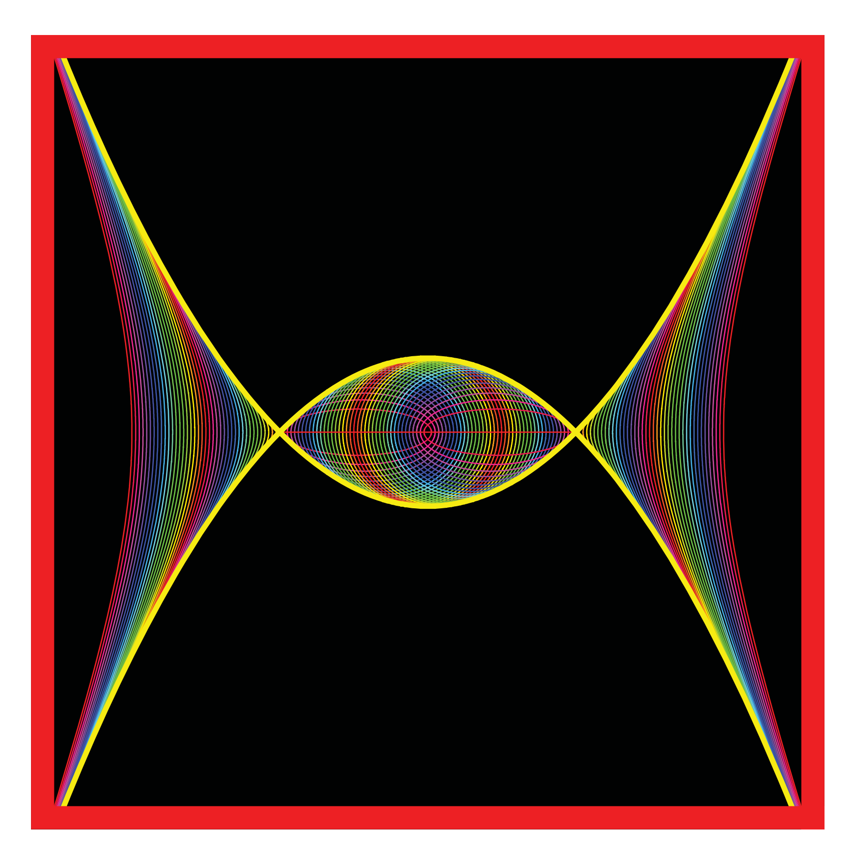
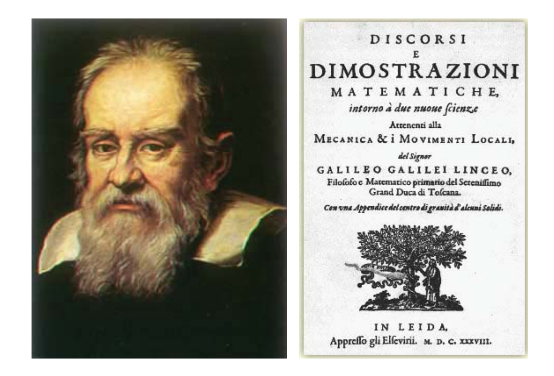


Figura 1.15: La famila de cónicas E_a y su envolvente (coloreada en amarillo): una imagen, todas las cónicas.



DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

Figura 1.16: A la izquierda un retrato de G. Galilei (1564–1642) pintado en 1636 por J. Sustermans; a la derecha, portada del libro *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze*.

de ayudante, por Evangelista Torricelli. Fue este último quien determinó la trayectoria parabólica para proyectiles disparados formando un ángulo cualquiera con la horizontal. Además, Torricelli probó que, para una velocidad de disparo fija, todas los posibles trayectorias quedaban encerradas bajo una parábola (que actualmente se denomina *parábola de seguridad* puesto que cualquier objetivo fuera de ella no puede ser alcanzado por ningún proyectil). Los resultados de Torricelli aparecieron publicados en su libro *Opera geometrica* publicado en 1644. En este trabajo aparecen unas tablas de balística que Torricelli obtuvo a partir de sus resultados sobre el tiro parabólico pero que, en la práctica, resultaron ser de escasa utilidad puesto que no se correspondían con los resultados experimentales. Esto es razonable, ya que en el estudio de Galileo y de Torricelli únicamente se consideraba la acción de la fuerza de la gravedad, despreciando la fuerza de rozamiento del medio, lo que produce importantes modificaciones en las trayectorias.



DE MOTV
Proiectorum.
LIBER SECVNDVS.


Figura 1.17: Una imagen de E. Torricelli, la página de su libro *Opera geometrica* donde comienza el estudio de las trayectorias de proyectiles y una de las tablas de balística del mismo.

Nuestro objetivo es obtener la trayectoria del tiro parabólico usando la segunda ley de Newton. Esta herramienta, así como la resolución de una ecuación diferencial, era desconocida para Galileo y Torricelli, que obtuvieron las trayectorias utilizando argumentos geométricos de composición de movientos. De hecho, los trabajos de Galileo fueron pieza fundamental en la obtención por Newton de las célebres leyes del movimiento.

El problema que se plantea es exactamente este: determinar las posibles trayectorias de un proyectil de masa m, lanzado desde un punto fijo O con una velocidad inicial v_0, como función del ángulo α, respecto a la horizontal, con el que se lanza. La figura 1.18 recoge un esquema de la situación. Usando la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta que la única fuerza que actúa es la de la gravedad en la dirección negativa de la componente y del movimiento,

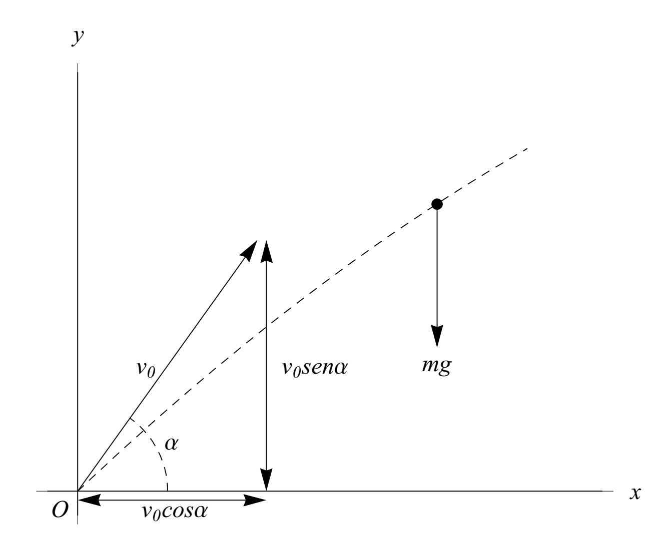


Figura 1.18: Esquema de la trayectoria de un proyectil.

lo que tenemos es el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} mx'' = 0, my'' = -mg, \\ x(0) = y(0) = 0, \\ x'(0) = v_0 \cos\alpha, y'(0) = v_0 \operatorname{sen}\alpha. \end{cases}$$

Con un sencillo argumento de integración, concluimos que las ecuaciones paramétricas de las trayectorias, como función del ángulo α, son

$$x(t) = tv_0 \cos\alpha \qquad \text{e} \qquad y(t) = tv_0 \operatorname{sen}\alpha - t^2 \frac{g}{2}.$$

Ahora, despejando el parámetro t de la ecuación para x, llegamos a

$$y = x \left(\tan\alpha - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \right)$$

que, tomando $\tan\alpha = C$ puede reescribirse como

$$y = x \left(C - (1 + C^2) \frac{gx}{2v_0^2} \right).$$

Estas parábolas tienen algunas propiedades interesantes. Podemos plantearnos la determinación de su envolvente considerando la familia como función del parámetro C. Para ello describimos las parábolas mediante la expresión $F(x, y, C) = 0$, con

$$F(x, y, C) = y - x \left(C - (1 + C^2) \frac{gx}{2v_0^2} \right).$$

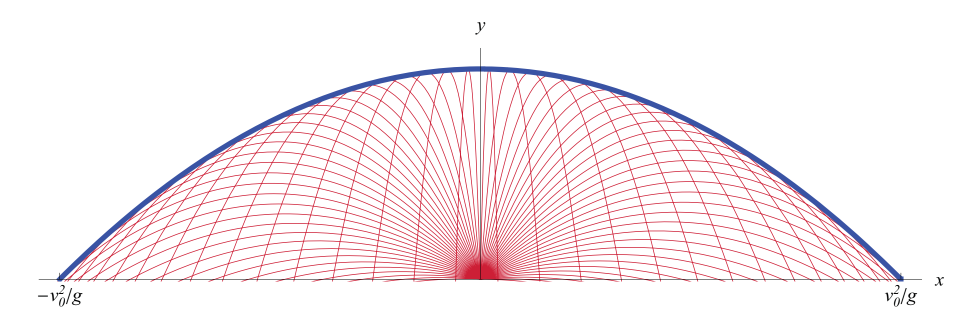


Figura 1.19: Algunas trayectorias de los proyectiles y su envolvente, la parábola de seguridad.

En esta situación, el sistema (1.6) que determina la envolvente se convierte en

$$\begin{cases} F(x,y,C) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial C} F(x,y,C) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x\left(C - (1+C^2)\dfrac{gx}{2v_0^2}\right), \\ x\left(1 - C\dfrac{gx}{v_0^2}\right) = 0 \end{cases}$$
$$\iff y = \frac{g}{2v_0^2}\left(\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 - x^2\right).$$

Por tanto, la envolvente es otra parábola, la denominada parábola de seguridad que, como ya hemos comentado anteriormente, fue descrita por Torricelli y delimita la región en la que es posible asegurar que cualquier objeto fuera de ella queda fuera de tiro. En la figura 1.19 se muestran algunas trayectorias posibles de los proyectiles y la parábola de seguridad asociada a ellas.

La siguiente propiedad que comentaremos no deja de resultar sorprendente: los máximos de la familia de parábolas $F(x,y,C) = 0$ se encuentran sobre la elipse

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{v_0^2}{2g}\right)^2} + \frac{\left(y - \dfrac{v_0^2}{4g}\right)^2}{\left(\dfrac{v_0^2}{4g}\right)^2} = 1.$$

Para probar este hecho basta considerar que los máximos de las parábolas son los puntos de coordenadas

$$(x_{\text{máx}}, y_{\text{máx}}) = \left(\frac{v_0^2 C}{g(1+C^2)}, \frac{v_0^2 C^2}{2g(1+C^2)}\right).$$

Así,

$$4x_{\text{máx}}^2 + 16\left(y_{\text{máx}} - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \left(\frac{2v_0^2 C}{g(1+C^2)}\right)^2 + \left(\frac{v_0^2(C^2-1)}{2g(1+C^2)}\right)^2 = \left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2,$$

con lo que concluimos. La figura 1.20 muestra la familia de parábolas y la elipse que contiene los máximos.

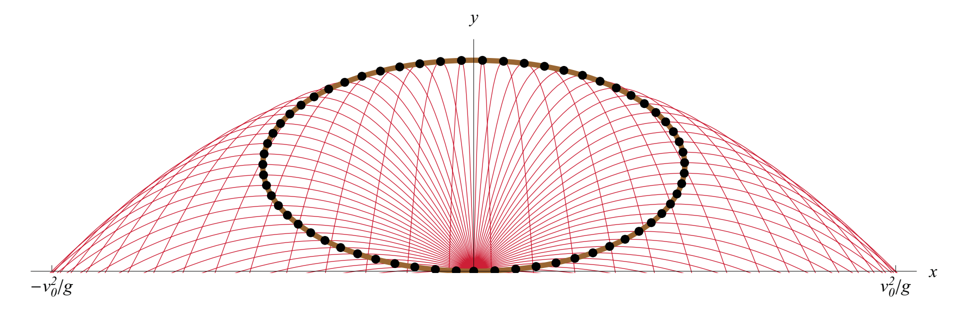


Figura 1.20: En marrón se muestra la elipse que contiene los máximos de todas la trayectorias parabólicas.

Material complementario

Deslizamiento sin rozamiento en tiempo constante. Un resultado recíproco de la ley de cuerdas de Galileo

Aunque sin ninguna relación con las envolventes, nos gustaría comentar una pequeña joya de Galileo, contenida en su obra Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze, *la denominada* ley de cuerdas. *Presentaremos en primer lugar una cuestión relativa al deslizamiento sin rozamiento, a lo largo de una varilla, de una partícula en tiempo constante. Concluiremos viendo que en realidad se trata del resultado recíproco de la ley de cuerdas de Galileo. La idea de este comentario está tomada de la nota "Sliding down inclines with fixed descent time: a converse of Galileo's Law of Chords", de J. Babb, aparecido en Crux Mathematicorum,* ***34*** *2008, 481–482.*

> *Supongamos una varilla anclada a un punto fijo sobre el que puede girar y de longitud variable. Si para cualquier posición de la varilla una partícula de masa m, que parte del reposo, se desliza sin rozamiento y por efecto de la gravedad, desde el extremo libre al fijo en un determinado tiempo constante T, determinar el lugar geométrico de los extremos libres de la varilla.*

La situación que acabamos de describir se ilustra en la figura 1.21. Resulta claro que el extremo libre de la varilla está dado por $(x, y) = (L_\alpha \cos\alpha, L_\alpha \operatorname{sen}\alpha)$, donde L_α es la longitud de la varilla cuando el ángulo que forma con la horizontal es α. Si $d(t)$ es la distancia recorrida desde el extremo libre por la partícula

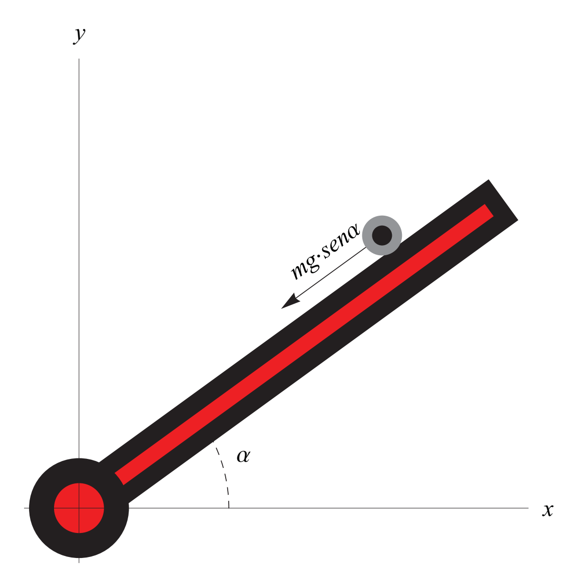


Figura 1.21: Esquema para el deslizamiento de una partícula sobre la varilla.

hasta un determinado instante t, es claro que $d(T) = L_\alpha$. Si $v(t)$ y $a(t)$ son, respectivamente, la velocidad y la aceleración de la partícula, tenemos que $v(t) = d'(t)$ y $a(t) = d''(t)$. Obviamente en el instante inicial, $t = 0$, se tiene que $d(0) = 0$ y $v(0) = 0$. Teniendo en cuenta que la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es debida a la gravedad y de magnitud $mg \operatorname{sen}\alpha$, por la segunda ley de Newton tendremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} d''(t) = g \operatorname{sen}\alpha, \\ d(0) = d'(0) = 0. \end{cases}$$

Obviamente la solución de este problema es $d(t) = \frac{t^2}{2} g \operatorname{sen}\alpha$. Entonces $L_\alpha = d(T) = \frac{T^2}{2} g \operatorname{sen}\alpha$ y las coordenadas del extremo variable serán

$$x = \frac{T^2}{2} g \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \qquad \text{e} \qquad y = \frac{T^2}{2} g \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha.$$

Mediante sencillas manipulaciones algebraicas llegamos a que

$$x = \frac{T^2}{4} g \operatorname{sen}(2\alpha) \qquad \text{e} \qquad y = \frac{T^2}{4} g - \frac{T^2}{4} g \cos(2\alpha),$$

ecuaciones paramétricas de la circunferencia de centro $\left(0, \frac{T^2}{4} g\right)$ y radio $\frac{T^2}{4} g$,

$$x^2 + \left(y - \frac{T^2}{4} g\right)^2 = \frac{T^4}{16} g^2.$$

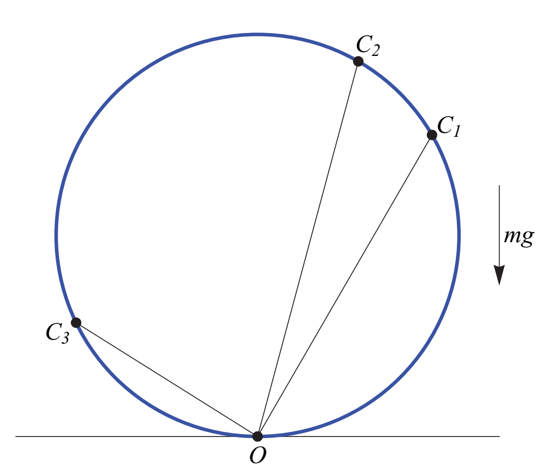


Figura 1.22: Según la ley de cuerdas, el tiempo de descenso sobre cualquiera de las cuerdas OC_1, OC_2 o OC_3 es constante.

La ley de cuerdas de Galileo afirma que el tiempo de descenso a lo largo de planos inclinados apoyados sobre una circunferencia y con uno de sus extremos en común es constante. Es decir, sobre las cuerdas de la circunferencia de la figura 1.22 el tiempo de descenso es fijo. La demostración dada por Galileo está basada en argumentos de tipo geométrico, que requieren estar familiarizado con los teoremas de Euclides.

La cuestión sobre la palanca que acabamos de resolver es, evidentemente, un inverso del resultado de Galileo, ya que nos dice que si el tiempo de descenso es constante entonces el extremo de la varilla debe estar sobre una circunferencia.

Una pregunta: ¿cuál sería el lugar geométrico del extremo variable de la varilla si suponemos que esta ejerce una fuerza de rozamiento sobre la partícula proporcional a la componente normal del peso?

1.8. Huygens y el péndulo cicloidal

El concepto de envolvente de una familia general de curvas se debe a Leibniz, que trabajó sobre él[15] en una serie de artículos publicados entre 1692 y 1694 en la revista *Acta Eruditorum*. Sin embargo, la envolvente de familias de segmentos ya se había tratado en diversos trabajos anteriores de otros matemáticos. En este sentido cabe destacar las aportaciones de Christiaan Huygens sobre las *evolutas*.

[15] El término *envolvente* como tal no hace su aparición hasta el año 1795, cuando G. Monge lo introduce en su obra *Application de l'analyse à la géométrie*.

Huygens, en su obra *Horologium oscillatorium*, publicada en 1673, desarrolló el concepto de *evoluta* en relación con sus trabajos sobre el péndulo. La evoluta de una curva es la envolvente de la familia de rectas normales a la curva dada en todos sus puntos. Apolonio de Perga (s. III a. C. aproximadamente) ya determinó en el Libro V de su obra *Secciones cónicas* las evolutas de la parábola, la hipérbola y la elipse, aunque su enfoque para obtenerlas no guardaba relación con el cálculo de envolventes sino que estaba vinculado con lo que hoy conocemos como centros de curvatura, cuyo lugar geométrico es precisamente la evoluta.

La razón de Huygens para trabajar sobre las evolutas tiene su origen en su interés en la construcción de un péndulo de precisión. La búsqueda de relojes seguros era una necesidad apremiante de su época tanto para la geografía y la navegación científica como para la astronomía teórica. En el péndulo que describe trayectorias circulares el periodo de oscilación depende de la amplitud de su trayectoria. En otras palabras, si a un péndulo de trayectoria circular se le modifica la amplitud de oscilación, entonces deja de medir correctamente el tiempo, puesto que se altera también el periodo de su oscilación. El interés de la comunidad científica de la época en la *cicloide*[16] hizo que Huygens fijase su atención sobre esta curva para resolver la cuestión construyendo un péndulo cicloidal.



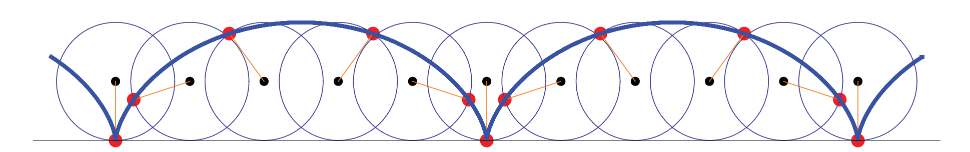


Figura 1.23: La cicloide trazada por un punto de una circunferencia que rueda sin deslizamiento sobre una recta.


CHRISTIANI
HVGENII
ZVLICHEMII, CONST. F.
HOROLOGIVM
OSCILLATORIVM
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM
AD HOROLOGIA APTATO
DEMONSTRATIONES
GEOMETRICAE.

PARISIIS,

CVM PRIVILEGIO REGIS.

Christiaan Huygens (1629–1695) matemático y astrónomo danés y la portada de su obra *Horologium oscillatorium*.

La cicloide se define mecánicamente como la trayectoria de un punto fijo de una circunferencia que rueda sin deslizamiento sobre una recta, tal y como se muestra en la figura 1.23. Tomando un sistema de referencia como el que aparece en la figura 1.24 y suponiendo que la circunferencia tiene radio a, es sencillo deducir que las ecuaciones paramétricas de la cicloide están dadas por

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad y = a(1 - \cos\theta).$$

[16] La cicloide es llamada en muchas ocasiones la *Helena de la geometría* por comparación con la mítica Helena de Troya. La comparación se debe a que ambas fueron motivo de agrias disputas: la segunda porque su rapto por parte de Paris dio lugar a la guerra entre Esparta y Troya que se narra en la *Ilíada*, la primera porque la prioridad sobre la demostración de algunas de sus singulares propiedades fue motivo de discusión entre algunos matemáticos del siglo XVII. Una interesante descripción de las disputas generadas por la cicloide puede verse en el artículo *The Helen of Geometry* de J. Martin, aparecido en *The College Mathematics Journal*, **41** (2010), págs. 17–28.

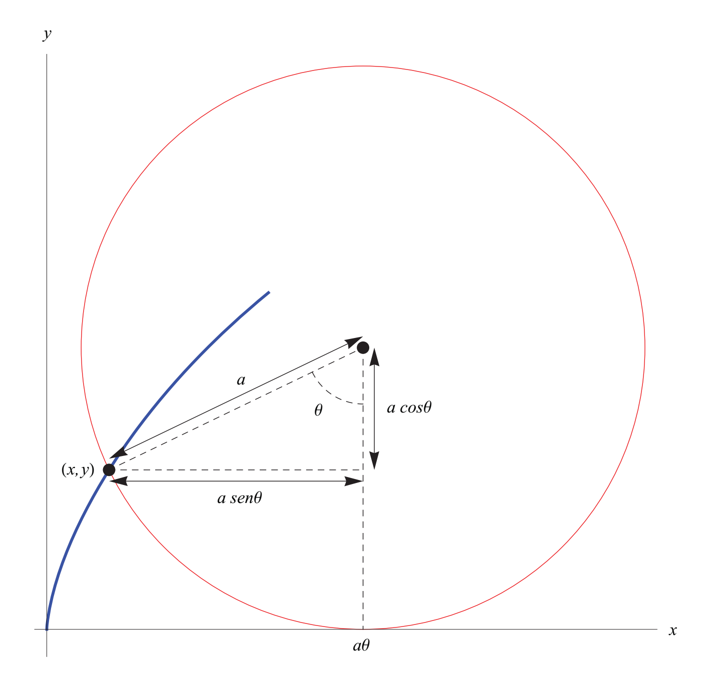


Figura 1.24: Esquema para determinar las ecuaciones paramétricas de la cicloide.

Huygens en primer lugar probó lo que se conoce como la propiedad *tautócrona*[17] de la cicloide que establece que el periodo de oscilación de una masa sobre esta curva es independiente de la amplitud. Esto quiere decir que dadas dos partículas A y B que se desplazan sobre la cicloide por efecto de la gravedad, tal como se ilustra en la figura 1.25, y que comienzan su movimiento a distinta altura pero en el mismo instante alcanzarán el punto más bajo de la misma al mismo tiempo.

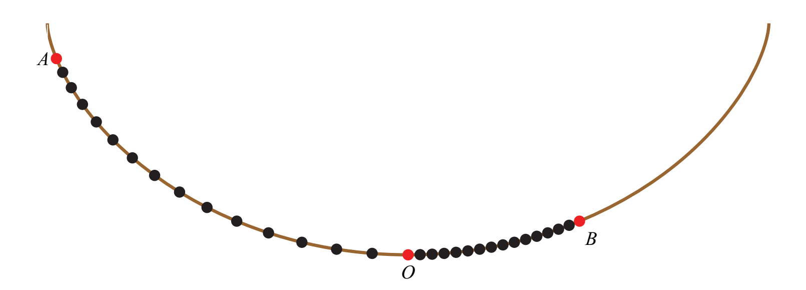


Figura 1.25: Las partículas A y B, partiendo a la vez, alcanzarán el punto más bajo de la cicloide, O, en el mismo instante.

[17]Igual tiempo.

Para probar la propiedad tautócrona de la cicloide consideramos la cicloide invertida respecto a como aparece en la figura 1.23, quedando tal y como se ve en la figura 1.26, estando la parte positiva del eje OY hacia abajo.

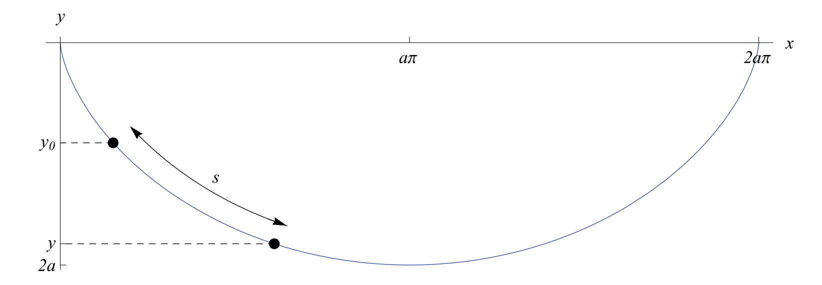


Figura 1.26: Desplazamiento de una partícula a lo largo de una cicloide.

Por el *principio de conservación de la energía*, sabemos que

$$\text{Energía cinética } (E_c) + \text{Energía potencial } (E_p) = \text{Constante } (C).$$

La energía cinética se describe en términos de la velocidad v del cuerpo

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

y la energía potencial en función de su altura h

$$E_p = mgh,$$

donde g es la aceleración de la gravedad y m la masa. Teniendo en cuenta que nuestra partícula va a partir del reposo cuando $h = 0$, deducimos que $C = 0$. De este modo, si la partícula comienza a desplazarse desde un punto a altura y_0, correspondiente a un valor θ_0 del parámetro, tenemos que

$$0 = E_c + E_p = m\left(\frac{1}{2}v^2 + gh\right) = m\left(\frac{1}{2}v^2 + g(y_0 - y)\right).$$

Esta expresión puede reescribirse como

$$v^2 = 2g(y - y_0) = 2ag(\cos\theta_0 - \cos\theta) \Longrightarrow v = \sqrt{2ag(\cos\theta_0 - \cos\theta)}.$$

Usando que $v = \frac{ds}{dt}$, donde s es la longitud de la cicloide, y si suponemos que $\theta = \theta(t)$ (de donde tenemos que $s = s(\theta(t))$), deducimos que

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\frac{d\theta}{dt} = a\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2}\frac{d\theta}{dt} = 2a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\frac{d\theta}{dt}.$$

De esta manera llegamos a la identidad

$$2a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2ag(\cos\theta_0 - \cos\theta)} \iff \sqrt{\frac{2a}{g}}\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}\frac{d\theta}{dt} = 1.$$

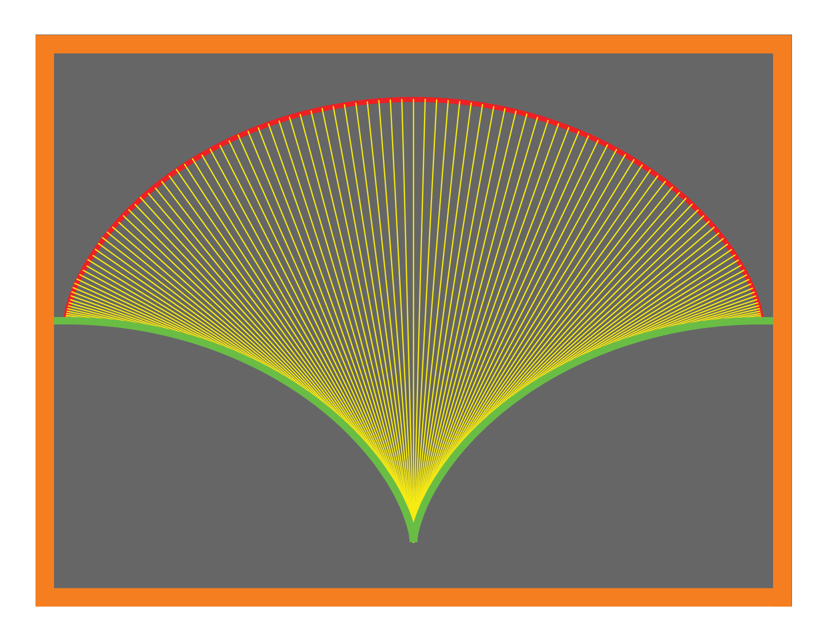


Figura 1.27: En rojo se muestra la cicloide inicial, en amarillo sus rectas normales y en verde la evoluta que es otra cicloide.

Si T denota el tiempo necesario para alcanzar el punto más bajo de la cicloide, correspondiente a $\theta = \pi$, integramos respecto a t la última identidad en el intervalo $[0, T]$, para obtener que

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{2a}{g}} \int_0^T \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} \frac{d\theta}{dt}\, dt \\ &= \sqrt{\frac{2a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\omega}}\, d\omega \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\omega}{2}}}\, d\omega \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}} \right)^2}} \\ &= -2\sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}} \right) \Bigg|_{\theta_0}^{\pi} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}, \end{aligned}$$

valor constante independiente de θ_0 (es decir, de y_0).

Una vez probada la propiedad tautócrona de la cicloide, Huygens debía encontrar un procedimiento para que un péndulo describa un arco con esa forma. Esto iba a ser posible gracias a la siguiente propiedad de las cicloides: la evoluta

de una cicloide es la misma cicloide pero trasladada por el vector $(a\pi, -2a)$.

Considerando la parametrización podemos probar que para cada θ la pendiente de la recta normal es $-\tan\frac{\theta}{2}$ y, de este modo, la ecuación de dicha recta es

$$y - a(1-\cos\theta) = -\tan\frac{\theta}{2}(x - a(\theta - \operatorname{sen}\theta)),$$

que puede reescribirse como

$$x \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + y\cos\frac{\theta}{2} = a\theta\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}.$$

Con esto, la ecuación de la envolvente vendrá dada por el sistema

$$\begin{cases} x \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + y\cos\frac{\theta}{2} = a\theta\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}, \\ x\cos\frac{\theta}{2} - y\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = 2a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + a\theta\cos\frac{\theta}{2}, \end{cases}$$

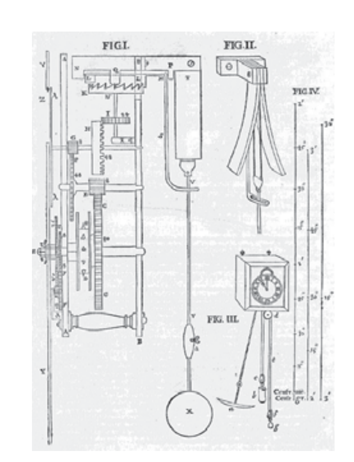
de donde resulta la parametrización para la envolvente

$$x = a(\theta + \operatorname{sen}\theta) \qquad \text{e} \qquad y = a(\cos\theta - 1),$$

que con la traslación en el parámetro $\theta = \alpha + \pi$ se transforma en

$$x = a\pi + a(\alpha - \operatorname{sen}\alpha) \qquad \text{e} \qquad y = -2a + a(1-\cos\alpha)$$

y se corresponde con la cicloide inicial pero trasladada por el vector $(a\pi, -2a)$. La cicloide, sus rectas normales y su evoluta pueden verse en la figura 1.27.



Página del *Horologium oscillatorium* que contiene el diseño del péndulo cicloidal de Huygens.

De esta forma para construir el péndulo cicloidal basta tomar dos pestañas con forma de medio arco de cicloide y colgar, en la unión entre ambas, un peso en una cuerda cuya longitud coincida con la de los arcos (por cierto; ¿cuál es esa longitud?). La ligadura de la cuerda a las pestañas en la oscilación hace que el peso colgante describa una cicloide y que, por lo tanto, su oscilación sea tautócrona, independiente de la amplitud. El reloj de Huygens podía *transportar* en barco hasta América la hora de Amsterdam. En la figura 1.28 se puede ver el desplazamiento de la cuerda y en el margen de esta página se muestra el diseño realizado por Huygens.

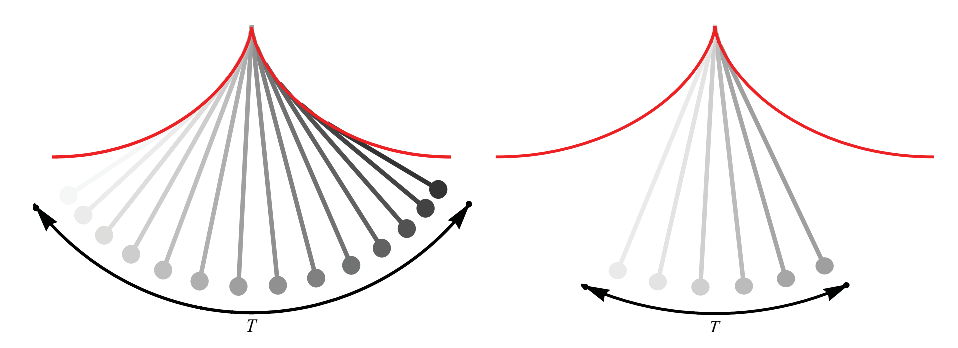


Figura 1.28: La imagen muestra el funcionamiento del péndulo cicloidal.

1.9. Problemas

Problema 1. Consideremos las familias de curvas

$$\text{a)}\ \left(\frac{t-C}{C}\right)^2 - \frac{x^2}{C^2} = 1, \qquad \text{b)}\ x = t\tan(t+C), \qquad \text{c)}\ x = \frac{Ce^{2t}-1}{Ce^{2t}+1}.$$

1) Trazar algunas de las curvas de cada familia y determinar la ecuación diferencial que satisface cada una de ellas.

2) Usando *Mathematica*, trazar el campo de direcciones asociado a cada una de las ecuaciones del apartado anterior. Incluir en el gráfico algunas de las isoclinas (incluyendo la nula cuando sea posible).

Problema 2. Hallar la ecuación diferencial que satisfacen todas las parábolas que tienen el eje de simetría paralelo al eje OY.

Problema 3. Si una curva está dada mediante unas ecuaciones paramétricas $t = t(s)$ y $x = x(s)$, se verifica que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dt}{ds}}.$$

Usar este hecho para comprobar que la cuadratriz de Abdank-Abakanowicz

$$t = R\operatorname{sen} s \qquad x = \frac{R^2}{2}(s + \operatorname{sen} s\cos s) + C$$

satisface la ecuación $t^2 + (x')^2 = R^2$.

Problema 4. La figura 1.29 muestra algunos miembros de la familia de curvas $t^3 + x^3 = 3ctx$ denominadas folium de Descartes. Comprobar que esta familia de curvas satisface la ecuación diferencial

$$x' = \frac{x}{t}\frac{x^3 - 2t^3}{2x^3 - t^3}.$$

Problema 5. Usar un cambio a coordenadas polares ($t = r\cos\theta$, $x = r\operatorname{sen}\theta$, con $r = r(\theta)$) para transformar la ecuación

$$x' = \frac{x^3 + xt^2 - x - t}{t^3 + tx^2 + x - t}$$

en

$$\frac{dr}{d\theta} = r(1 - r^2).$$

Deducir de este hecho que la familia de curvas

$$t = \frac{Ce^{\theta}}{\sqrt{1 + C^2e^{2\theta}}}\cos\theta \qquad \text{y} \qquad x = \frac{Ce^{\theta}}{\sqrt{1 + C^2e^{2\theta}}}\operatorname{sen}\theta$$

son soluciones de la ecuación dada.

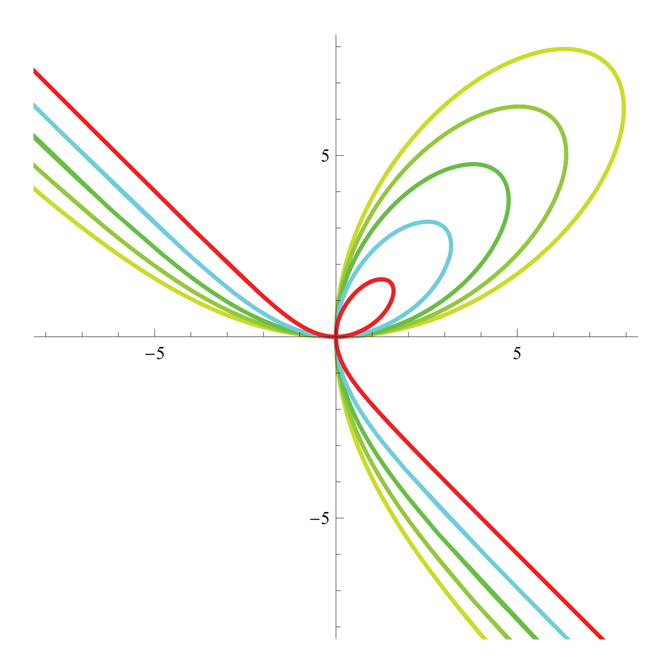


Figura 1.29: Varios folium de Descartes, cuya ecuación se da en el Problema 4.

Problema 6. Hagamos una n-versión del problema de los escarabajos: supongamos que n escarabajos se posan en las esquinas de una mesa n-gonal regular de lado a. Comienzan a caminar al mismo tiempo y con la misma velocidad, de tal modo que cado uno de ellos se desplaza constantemente hacia el que se encuentra situado a su izquierda. Determinar la trayectoria y la distancia que ha recorrido cada uno de los escarabajos antes de juntarse todos en el centro de la mesa.

Problema 7. (Más escarabajos.) Supongamos que n escarabajos se posan en las esquinas de una mesa n-gonal regular de lado a. Comienzan a caminar al mismo tiempo y con la misma velocidad, de tal modo que cado uno de ellos se desplaza constantemente hacia el que se encuentra situado k vértices a su izquierda, siendo k un entero mayor que uno. Determinar la trayectoria y la distancia que ha recorrido cada uno de los escarabajos antes de juntarse todos en el centro de la mesa. (Obviamente el problema anterior es el caso $k = 1$ de éste.)

1.9.1. Problemas sobre envolventes

Problema 8. Determinar, si existe, la línea discriminante de las familias de curvas (realizar algunos gráficos con *Mathematica* que ilustren la situación):

a) $(t - C)^2 + x^2 = 1$, b) $(x - C)^2 = t^3$, c) $x^2(x + 1) = (t - C)^2$.

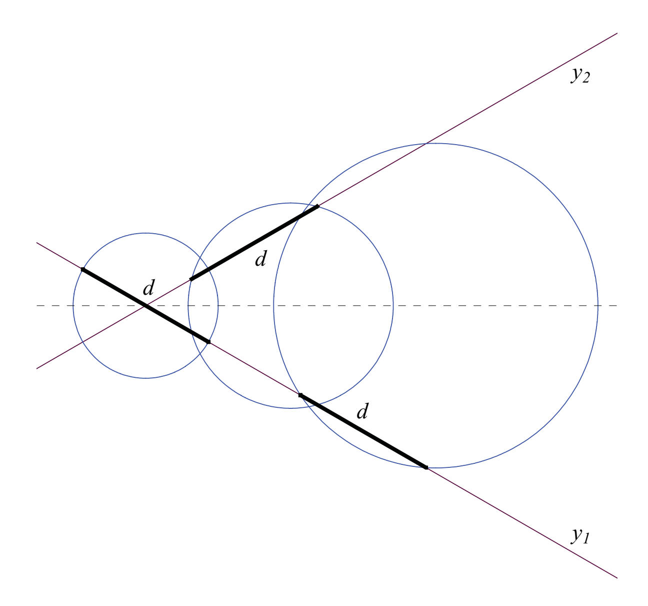


Figura 1.30: La figura muestra las rectas y_1 e y_2 y algunas circunferencias de la familia dada cortando segmentos de longitud d sobre las rectas del Problema 10.

Problema 9. Dada una semirrecta ℓ con origen en un punto O del plano, consideramos tres números positivos u, v y h, con $u < v$. Sea A un punto de ℓ y t el número positivo tal que la longitud del segmento OA es igual a vt. Si K_A designa el círculo con centro A y radio $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$, determinar la región del plano limitada por todos los posibles círculos K_A cuando A recorre la semirrecta ℓ.[18]

Problema 10. En el número de diciembre de 2006 de la revista *Mathematics Magazine*[19] apareció publicada la siguiente propiedad para una familia de hipérbolas que tiene como vértices dos puntos fijos del plano [20]: para cada miem-

[18]Si suponemos que v es la velocidad, *ultrasónica*, a la que vuela un avión situado a altura h, la región que se solicita es la llamada *región de audibilidad*. Por definición, es la región de la superficie terrestre en la ya se ha oído o se oye ahora el sonido del motor del avión. Obviamente la región es la parte interior a la envolvente de los círculos K_A. Esta envolvente es la hipérbola

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} = 1,$$

con $c = hv/u$. Esta familia de curvas volverá a aparecer en el apartado referente a trayectorias ortogonales (véase el Problema 61).

[19]La referencia completa: T. M. Apostol y M. A. Mnatsakanian, *Proof without words: surprising property of hyperbolas*, Math. Mag. **79** (2006), p. 339.

[20]En el caso de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

los vértices son los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.

bro de la familia, las circunferencias tangentes a ambas ramas de la hipérbola cortan a cada una de las asíntotas de la hipérbola en segmentos de longitud constante e igual a la distancia entre los vértices, independientemente de la posición de la circunferencia y del ángulo entre las rectas tangentes. Lo realmente curioso es que esta propiedad caracteriza a las hipérbolas.

Consideramos dos rectas secantes y_1 e y_2. Construimos la familia de circunferencias centradas en la bisectriz del ángulo más pequeño de los que forman las rectas, y tales que cada una de ellas corte segmentos de longitud constante d sobre las rectas dadas (ver figura 1.30).

Probar que para cada par de rectas la envolvente de la familia de circunferencias es una hipérbola que verifica que la distancia entre sus vértices es d.

Problema 11. Determinar la envolvente de los segmentos que limitan con la parábola $y = p^2x^2$ regiones de área constante.

Problema 12. Determinar la envolvente de la familia de circunferencias centradas en los puntos de una hipérbola equilátera y que pasan por un punto fijo (a, b). La figura 1.31 muestra la envolvente para tres elecciones distintas del punto (a, b).

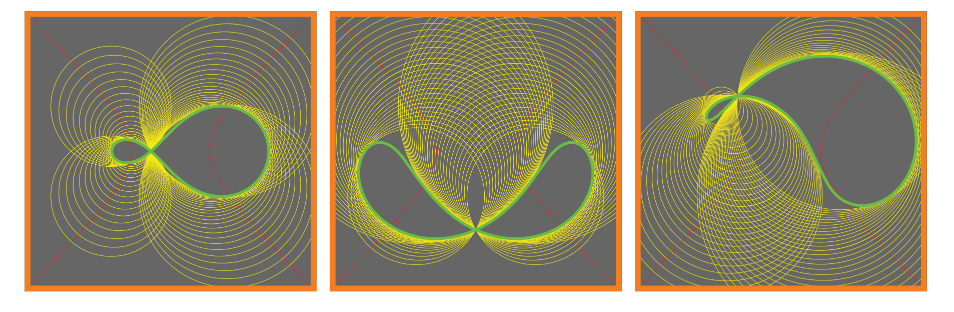


Figura 1.31: En verde las envolventes asociadas a tres elecciones distintas del punto (a, b) en el Problema 12.

Problema 13. Sobre una circunferencia C fijamos un punto A. Determinar la envolvente de la familia de circunferencias que pasan por A y están centradas en los puntos de C.

Problema 14. Determinar la envolvente de la familia de circunferencias cuyos centros se encuentran sobre una circunferencia dada C y que son tangentes a un diámetro fijo de C.

Problema 15. Consideramos dos rectas secantes. Para cada $\alpha > 0$, determinar la envolvente de la familia de rectas que forman con las rectas dadas triángulos de área constante igual a α.

Problema 16. Consideremos la familia de rectas que cortan sobre los ejes coordenados segmentos cuya longitud tiene suma constante k. Determinar la envolvente de dicha familia de rectas.

Problema 17. Calcular la envolvente de familias de segmentos de extremos $(\cos(pt), \operatorname{sen}(pt))$ y $(\cos(qt), \operatorname{sen}(qt))$, para valores p y q enteros distintos no nulos y $t \in [0, 2\pi/\operatorname{mcd}\{p, q\})$.

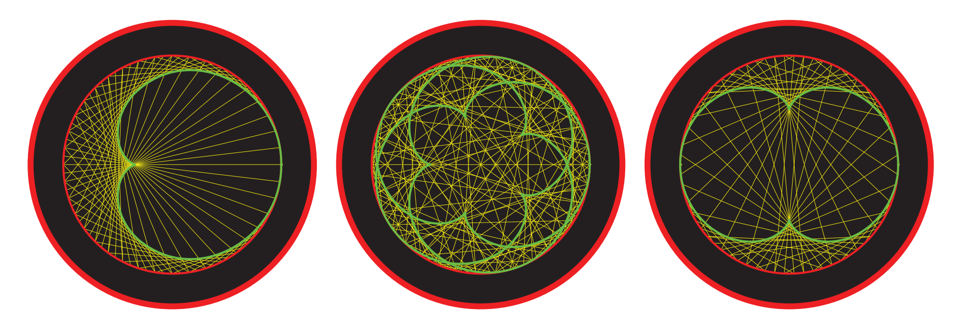


Figura 1.32: Envolventes relacionadas con el Problema 17 para p y q positivos.

La figura 1.32 muestra, de izquierda a derecha, la familia de segmentos y la envolvente en los casos $(p, q) = (2, 1), (8, 3)$ y $(6, 2)$. La curva correspondiente al caso $(2, 1)$ se denomina *cardioide* y la del caso $(6, 2)$ (que sería la misma del caso $(3, 1)$, ya que la envolvente para (p, q) es igual que la del caso $(p, q)/\operatorname{mcd}\{p, q\}$) es conocida como *nefroide* y ambas son casos particulares de epicicloides. Cuando, por ejemplo, $q < 0$, la envolvente es una hipocicloide. En la figura 1.33 puede verse, otra vez de izquierda a derecha, los casos $(p, q) = (2, -1)$ y $(7, -3)$. La curva correspondiente al caso $(2, -1)$ también se conoce como *deltoide*. Algunas de las imágenes que se generan usando esta familia de segmentos nos recuerdan a los rosetones de las catedrales góticas.

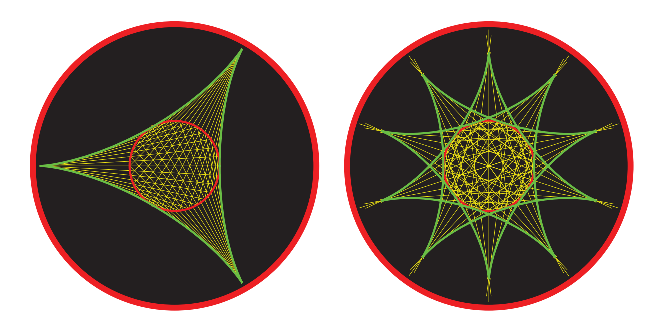


Figura 1.33: Envolventes relacionadas con el Problema 17 para p positivo y q negativo.

Problema 18. Probar que si dos puntos A y B se desplazan sobre una elipse de centro[21] O de tal forma que los segmentos OA y OB son perpendiculares, entonces los segmentos AB son tangentes a una circunferencia fija.

Como paso previo puede resultar interesante probar el siguiente hecho: la envolvente de la familia de rectas que están a una distancia r de un punto fijo P es la circunferencia de centro P y radio r.

Problema 19. Determinar las ecuaciones de las evolutas de las cónicas $y^2 = 2px$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. En la figura 1.34 se muestran algunos ejemplos.

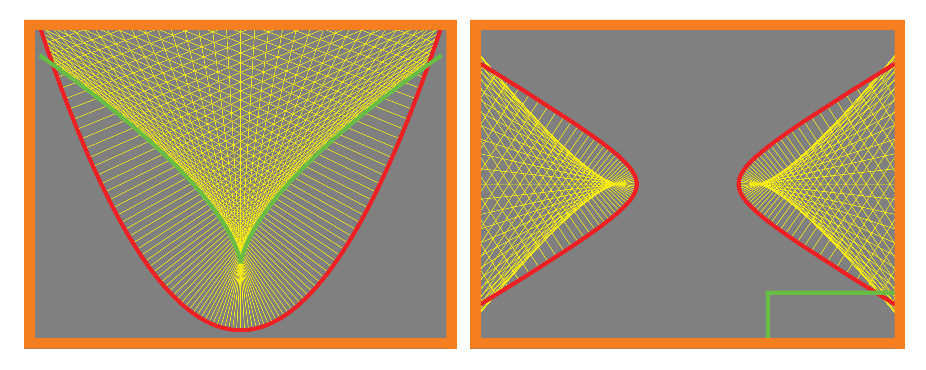


Figura 1.34: De izquierda a derecha una parábola y una hipérbola con las evolutas (en verde) solicitadas en el Problema 19.

Problema 20. Supongamos un foco de luz situado sobre un punto P y que los rayos de luz emanados de él se reflejan sobre un espejo (recordad que, según la ley de reflexión de la luz, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión) que tiene la forma de una determinada curva C. La curva envolvente de los rayos reflejados se denomina cáustica de la curva C.

a) Encontrar la cáustica de una circunferencia si el foco de luz es un punto del infinito (en tal caso se supone que todos los rayos de luz llegan paralelos).

b) Encontrar la cáustica de una circunferencia si el foco de luz es un punto de la propia circunferencia.

c) Encontrar la cáustica de la curva $y = \log x$ cuando el foco es un punto del infinito del eje OY.

Problema 21. Determinar la evoluta de una espiral logarítmica. También para la espiral logaritmica, determinar la caústica cuando el foco de luz está situado sobre el polo de la espiral. La evoluta se muestra en la figura 1.35.

[21] El centro de una elipse (o de una hipérbola) es el punto medio entre sus focos.

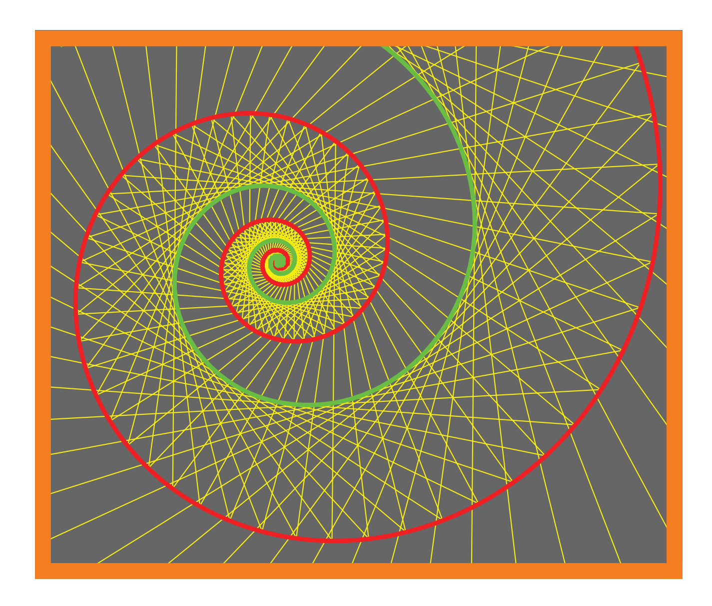


Figura 1.35: En rojo una espiral logarítmica y en verde su evoluta, que es otra espiral logarítmica (Problema 21).

Problema 22. Como ya hemos comentado, el concepto de envolvente de una familia genérica de curvas (no necesariamente rectas) aparece por primera vez en una serie de trabajos de Leibniz, publicados en *Acta Eruditorum* entre los años 1692 y 1694. En uno de estos primeros trabajos, con su nuevo cálculo diferencial bajo el brazo, Leibniz se plantea estudiar la envolvente de una familia de circunferencias de centro $(b, 0)$ y radio c, cuando se verifica la relación $c^2 = ab$, para una cierta constante a. El resultado que obtiene es la parábola $y^2 = ax + \frac{a^2}{4}$. Desarrollar los cálculos necesarios para obtener este resultado. La imagen que aparece en la figura 1.36 muestra la familia de circunferencias y la envolvente.

1.9.2. Problemas sobre el tiro parabólico

Consideremos, como en la subsección 1.7, las trayectorias parabólicas, que denotaremos por $\{P_\alpha\}_{\alpha\in[0,\pi]}$, descritas por los proyectiles disparados con una velocidad v_0 y formando un ángulo α con la horizontal bajo el único efecto de la fuerza de la gravedad. Veamos que esta familia de curvas aún esconde sorprendentes propiedades.

Problema 23. Probar que en el instante $t = \frac{2v_0}{g}\lambda \operatorname{sen}\alpha$, $\lambda \in [0, 1]$, cada proyectil se encuentra sobre una elipse E_λ.[22] Determinar la envolvente de la familia $\{E_\lambda\}_{\lambda\in[1/2,1]}$.

[22] Es sencillo comprobar que para $\lambda = 1/2$ se obtiene $t = \frac{v_0}{g} \operatorname{sen}\alpha$ y que es para este instante de tiempo cuando cada una de las trayectorias P_α alcanza su máximo. Si recordamos que los máximos se encuentran sobre una elipse, el problema propuesto es una extensión de este hecho.

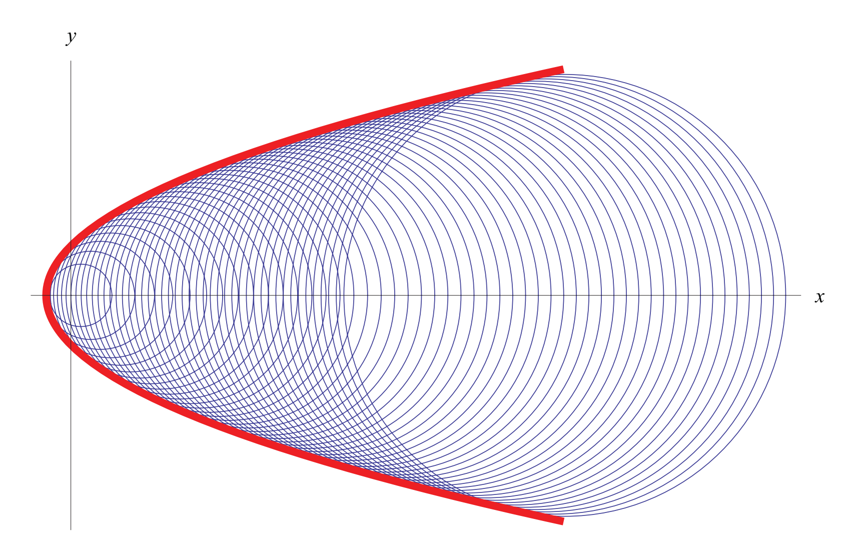


Figura 1.36: En azul la familia de circunferencias del Problema 22 y en rojo su envolvente.

Problema 24. Supongamos que disparamos todos los proyectiles correspondientes a los ángulos $\alpha \in [0, \pi]$ a la vez con una velocidad constante v_0. Probar que en cada instante de tiempo todos los proyectiles que no han alcanzado el suelo se encuentran sobre una circunferencia C_t, para $t \in [0, 2v_0/g]$. Determinar la envolvente de la familia $\{C_t\}_{t\in[0,2v_0/g]}$.

Problema 25. Probar que los focos de la familia de parábolas $\{P_\alpha\}_{\alpha\in[0,\pi]}$ se encuentran sobre una circunferencia fija. Para cada velocidad $v_0 > 0$, la circunferencia de focos y la elipse de máximos se cortan en tres puntos; probar que estos puntos están sobre dos rectas que pasan por el origen.

Problema 26. Cada parábola P_α tiene una tangente común con la parábola de seguridad. Probar que el vector director de dicha recta tangente es perpendicular al vector $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

Problema 27. Dado un objetivo fijo situado en la parábola de seguridad o en su interior, ¿para que ángulo, o ángulos, de tiro es posible alcanzarlo si disparamos a una velocidad constante? De entre los posibles ángulos de tiro para alcanzar el objetivo determinar el que minimiza el tiempo para alcanzarlo.

Problema 28. Probar que el alcance de un disparo efectuado desde una altura h, con una velocidad v y formando un ángulo α con la horizontal viene dado por

$$\text{alcance} = \frac{v^2\cos\alpha}{g}\left(\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{2gh}{v^2}}\right).$$

Comprobar que el alcance se maximiza para un ángulo α tal que

$$\cos(2\alpha) = \frac{gh}{v^2 + gh}.$$

Indicación: tomar un sistema de referencia con origen en el punto desde el que se realiza el disparo y el alcance será la intersección de la trayectoria con la recta $y = -h$.

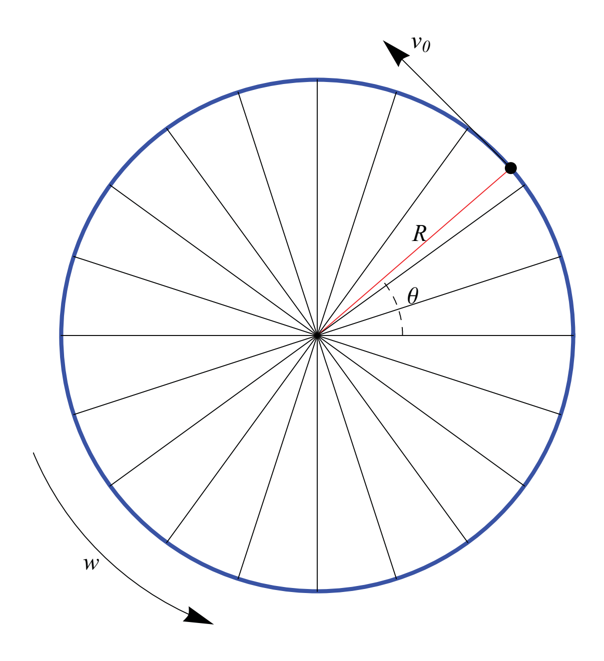


Figura 1.37: La figura muestra el movimiento del paraguas del Problema 29.

Problema 29. Supongamos que tenemos un paraguas (que nos permitimos la licencia de considerar circular de radio R) mojado y que lo hacemos girar en un plano vertical, alrededor de su eje, con velocidad angular w. En esta situación, las gotas de agua saldrán despedidas con una velocidad inicial $v_0 = wR$, pero siguiendo direcciones diferentes. La dirección del vector velocidad inicial es tangente a la circunferencia exterior del paraguas, como se muestra en la figura 1.37. Suponiendo que la fuerza de la gravedad es la única que actúa sobre las gotas de agua, responder a las siguientes cuestiones:

a) Determinar la trayectoria de las gotas de agua.

b) Suponiendo que del paraguas salen gotas en todas las direcciones posibles, probar que la envolvente de la familia de trayectorias es una parábola.

c) Determinar los puntos de máxima altura alcanzada por cada una de las gotas de agua y comprobar que para $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ los máximos se encuentran sobre la curva descrita por $P_{R,v_0^2/g}(x,y) = 0$, donde

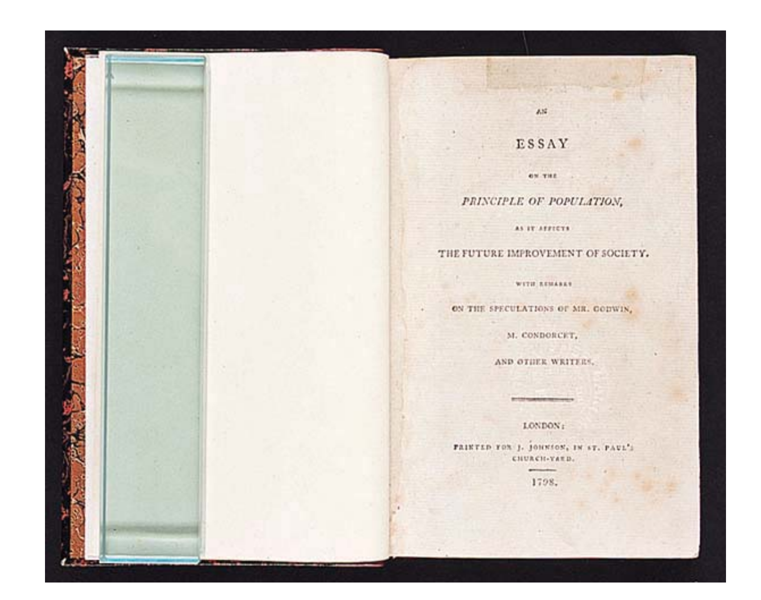
$$P_{a,b}(x,y) = \left(\frac{b^2}{2a}x^2 + \frac{2b^2}{a}y^2 - \frac{by}{a}(3a^2+b^2) + a(a^2+b^2)\right)^2 - (a^2+b^2-2by)^3.$$

Capítulo 2

Ecuaciones de variables separadas

2.1. Dinámica de poblaciones y ecuaciones de variables separadas

En 1798, Thomas Malthus ideó un modelo matemático para estudiar el crecimiento de la población humana. La idea fundamental era suponer que la tasa


AN

ESSAY

ON THE

PRINCIPLE OF POPULATION,

AS IT AFFECTS

THE FUTURE IMPROVEMENT OF SOCIETY.

WITH REMARKS

ON THE SPECULATIONS OF MR. GODWIN,

M. CONDORCET,

AND OTHER WRITERS.

LONDON:

PRINTED FOR J. JOHNSON, IN ST. PAUL'S CHURCH-YARD.

1798.

Figura 2.1: Portada de la obra fundamental de T. R. Malthus, *An Essay on the Principle of Population*, 1798.



Thomas R. Malthus (1766–1834) economista británico, considerado por muchos como el padre de la demografía. Su obra fundamental (la portada de la misma se muestra en la figura 2.1), en la que incluye su teoría sobre el desarrollo de la población humana, es *An Essay on the Principle of Population* publicada en 1798.

de variación de una población es proporcional a la población. La forma de deducir este principio es la siguiente: si $P(t)$ es la población de una determinada comunidad en un instante t y si $P(t+h)$ es la población en el instante $t+h$ se verifica que

$$P(t+h) - P(t) = \text{números de nacimientos} - \text{número de fallecimientos}.$$

Suponemos que

$$\text{número de nacimientos} = ahP(t),$$

para una cierta constante positiva a, y

$$\text{número de fallecimientos} = bhP(t),$$

para otra constante positiva b. Por tanto, la tasa de variación, $\frac{P(t+h)-P(t)}{h}$, satisface la expresión

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = (a-b)P(t) = kP(t)$$

para una cierta constante k. Si consideramos el límite cuando h tiende hacia cero tendremos que

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

Si a la ecuación diferencial anterior le añadimos la condición inicial $P(t_0) = P_0$ (la población en un cierto instante t_0 es P_0), tendremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP, \\ P(t_0) = P_0, \end{cases}$$

que modeliza el crecimiento de una población. El modelo asume que la población está aislada y no sujeta a procesos migratorios. Aunque la función P toma, obviamente, valores en $\mathbb{N}$ la transformación en ecuación diferencial la convierte en una función con valores en $\mathbb{R}$. Este hecho puede despreciarse si consideramos poblaciones grandes y tomamos los datos, por ejemplo, en millones de individuos.

Mediante una comprobación elemental, como ya hicimos en el capítulo anterior, obtendremos que las soluciones de la ecuación diferencial asociada al problema de valores iniciales anterior son de la forma $P(t) = Ce^{kt}$. Usando la condición inicial llegamos a que

$$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$$

La solución es una función exponencial y es por esto por lo que a veces al modelo de Malthus se le denomina modelo *exponencial*. Obviamente si $k > 0$ (mayor número de nacimientos que de fallecimientos) la población crece de manera exponencial y se dispara hacia el infinito para valores grandes del tiempo. En

caso contrario (más fallecimientos que nacimientos) la población tiende a la extinción para valores grandes del tiempo.

El modelo de Malthus nos da un crecimiento continuo de población, lo que no es asumible. Este modelo mantiene su vigencia para poblaciones de bacterias y organismos pequeños que se desarrollan en un entorno de recursos ilimitados, pero no para poblaciones humanas. Los resultados de Malthus aplicados a poblaciones humanas le llevaron a predecir el colapso de la población mundial. De las estimaciones que obtuvo concluyó un crecimiento geométrico para la población y este hecho entraba en contradicción con su hipótesis de que los alimentos aumentan de manera aritmética. Parece que estas conclusiones influenciaron de manera decisiva a Ch. Darwin en la elaboración de su teoría sobre la selección natural.



P. F. Verhults (1804–1849), matemático belga perteneciente a la órbita científica de Quetelet, uno de los padres de la estadística actual; su mayor contribución fue la ley de crecimiento poblacional que analizamos a continuación. El trabajo de Verhults, titulado "Recherches Mathématiques sur la loi d'accroissement de la population", se publicó en las *Mémoires de l'Academie* de Bélgica en el año 1845.

En 1837, P. F. Verhulst propone un nuevo modelo para analizar el comportamiento de poblaciones en el que se tienen en cuenta ciertos factores de saturación. Si denotamos por P_∞ la población máxima que se puede mantener con los recursos disponibles, en este modelo la variación de población se supone que será proporcional a la población existente $P(t)$ y a la fracción de recursos no utilizada, que se expresa mediante la cantidad $1 - \frac{P(t)}{P_\infty}$. De esta forma la ecuación que modeliza el comportamiento de la población viene dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right).$$

Con la condición inicial $P(t_0) = P_0$, llegamos al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP\left(1 - \dfrac{P}{P_\infty}\right), \\ P(t_0) = P_0. \end{cases}$$

Ahora no se puede encontrar una solución para la ecuación de manera elemental. Necesitaremos un procedimiento general que nos permita cubrir este caso. Este tipo de ecuación encaja dentro de las que se denominan ecuaciones diferenciales de variables separadas, cuyo patrón general es

$$x' = \frac{g(t)}{h(x)}.$$

Teorema 1. *Sean I_1 e I_2 intervalos contenidos en $\mathbb{R}$, $g\colon I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h\colon I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones continuas tales que $h(x) \neq 0$ para $x \in I_2$. Si $(t_0, x_0) \in I_1 \times I_2$, existe una única función $\phi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, con $t_0 \in I$, solución del problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{g(t)}{h(x)}, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida implícitamente por la ecuación

$$\int_{x_0}^{\phi(t)} h(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds.$$

Demostración. Resolver el problema de valores iniciales propuesto consiste en probar que existe una única función $\phi \in C^1(I)$, con $\phi(t_0) = x_0$, verificando que

$$h(\phi(t))\phi'(t) = g(t), \quad t \in I. \tag{2.1}$$

Para ello definimos las funciones

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(s)\, ds \quad \text{y} \quad G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds.$$

Con esto, (2.1) es equivalente a

$$\frac{d}{dt} H(\phi(t)) = \frac{d}{dt} G(t)$$

lo que integrando contra t nos da

$$H(\phi(t)) = G(t) + C, \quad t \in I.$$

Si usamos que se debe satisfacer $\phi(t_0) = x_0$ concluimos que $C = 0$ y $H(\phi(t)) = G(t)$. Por tanto finalizaremos si encontramos una función ϕ tal que $H(\phi(t)) = G(t)$ con $\phi(t_0) = x_0$.

Consideremos ahora la función

$$F(t, x) = H(x) - G(t)$$

y veamos que la ecuación $F(t, x) = 0$ define una única función $\phi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, con $t_0 \in I$ y derivable en I, tal que $F(t, \phi(t)) = 0$ y $\phi(t_0) = x_0$. Además, en ese caso

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t, \phi(t)) = 0 &\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} F(t, \phi(t)) + \frac{\partial}{\partial x} F(t, \phi(t))\phi'(t) = 0 \\ &\Longrightarrow h(\phi(t))\phi'(t) = g(t), \end{aligned}$$

ya que

$$\frac{\partial}{\partial x} F(t, x) = h(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = -g(t).$$

La existencia y unicidad de la función ϕ es una consecuencia inmediata del teorema de la función implícita ya que $F \in C^1(I_1 \times I_2)$ y cumple

$$F(t_0, x_0) = \int_{x_0}^{x_0} h(s)\, ds - \int_{t_0}^{t_0} g(s)\, ds = 0$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x} F(t, x)\Big|_{(t_0, x_0)} = h(x_0) \neq 0$$

por hipótesis.[1] □

[1] Notad que la hipótesis que hemos hecho es que $h(x) \neq 0$ para $x \in I_2$. A la vista de la demostración parece posible considerar la condición más débil $h(x_0) \neq 0$.

La demostración del teorema anterior sirve de fundamento teórico al sencillo (y placentero) modo usual de resolver la ecuación (y que, además, da nombre al método)

$$\begin{aligned} x' = \frac{dx}{dt} = \frac{g(t)}{h(x)} &\Longrightarrow h(x)\,dx = g(t)\,dt \\ &\Longrightarrow H(x) = G(t) + C \\ &\Longrightarrow x(t) = H^{-1}(G(\cdot) + C)(t), \end{aligned}$$

que es la solución general buscada.

En el caso de la ecuación de Verhulst

$$H(P) = P_\infty \int \frac{dP}{P(P_\infty - P)} = \int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{P_\infty - P} = \log\left|\frac{P}{P_\infty - P}\right| + C$$

y

$$G(t) = \int k\,dt = kt + C.$$

Todas las manipulaciones anteriores podemos hacerlas siempre que $P \neq 0$ y $P \neq P_\infty$,[2] esto es posible suponerlo siempre que $P_0 \neq 0$ y $P_0 \neq P_\infty$. La condición $P_0 = 0$ no tendría ningún sentido en términos de poblaciones (se supone que existen individuos en la población a estudiar). Si suponemos que $0 < P_0 < P_\infty$ resulta que

$$\frac{P}{P_\infty - P} = e^{kt+C} = Be^{kt} \Longrightarrow P(t) = \frac{BP_\infty}{e^{-kt} + B},$$

y, teniendo en cuenta la condición inicial, obtenemos como solución del modelo de Verhulst la función

$$P(t) = \frac{P_\infty P_0}{P_0 + (P_\infty - P_0)e^{-k(t-t_0)}}.$$

Como puede comprobarse sencillamente, la expresión anterior también es válida en el caso $P_0 > P_\infty$. El modelo de Verhulst suele denominarse modelo logístico y la curva anterior se conoce como curva logística. Es interesante observar que para constantes $k > 0$ la curva logística tiende, para valores grandes de t, hacia el valor P_∞ para cualquier valor de la población inicial. Obsérvese la figura 2.2 donde se ilustra esta situación con varios valores iniciales mayores y menores que la población máxima.

[2] Notar que la ecuación que estamos manipulando es de la forma $P' = f(P)$, donde f es una función independiente de t, y los valores que hemos eliminado son precisamente aquellos para los que $f(P) = 0$. En general, las ecuaciones de la forma $x' = f(x)$ se denominan ecuaciones (o sistemas cuando f toma valores en $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$) autónomos. Las valores para los que $f(x) = 0$ se conocen como puntos o soluciones de equilibrio. El análisis de estas soluciones, mediante lo que se denomina *Teoría de la estabilidad*, permite conocer una gran información cuantitativa de las soluciones de la ecuación $x' = f(x)$ sin necesidad de obtener dichas soluciones.

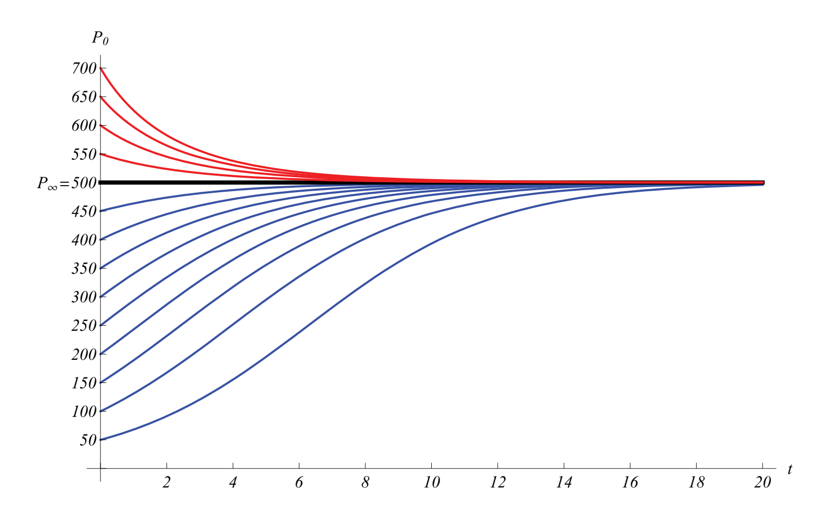


Figura 2.2: La gráfica muestra diversas curvas logísticas para $k = 0.35$, $t_0 = 0$, $P_\infty = 500$ y P_0 tomando valores en el intervalo $[50, 700]$. Para las curvas en rojo $P_0 > P_\infty$ y los valores de P decrecen hacia el valor P_∞; para las curvas azules $P_0 < P_\infty$ y éstas van creciendo hacia P_∞.

En el razonamiento anterior hemos omitido el caso $P_0 = P_\infty$. Es obvio que en ese caso una solución del modelo logístico es la función constante $P = P_\infty$.[3] Veamos que esta solución es la única. Supongamos que existe otra solución $P_1(t)$ para el modelo logístico verificando que $P_1(t_0) = P_\infty$. Consideremos la función

$$g(t) = (P_1(t) - P_\infty)^2.$$

Es claro que $g(t_0) = 0$ y $g(t) \geq 0$. Además, se cumple que

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2(P_1(t) - P_\infty)P_1'(t) = 2k(P_1(t) - P_\infty)P_1(t)\left(1 - \frac{P_1(t)}{P_\infty}\right) \\ &= -\frac{2k}{P_\infty} P_1(t)(P_1(t) - P_\infty(t))^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Entonces, se verifica que $g(t) \leq 0$ para $t \geq t_0$ y, por tanto, $g(t) = 0$ y $P_1(t) = P_\infty$.

El modelo logístico para el estudio de poblaciones humanas, en general, no resulta adecuado ya que no tiene en cuenta factores fundamentales para el desarrollo de una población (notar que no incorpora factores migratorios, epidemias, etc.). Sin embargo, existen determinadas poblaciones de bacterias que parecen estar gobernadas por un modelo de crecimiento de tipo logístico.

[3] Observar además que

$$\lim_{P_0 \to P_\infty} \frac{P_\infty P_0}{P_0 + (P_\infty - P_0)e^{-k(t-t_0)}} = P_\infty.$$

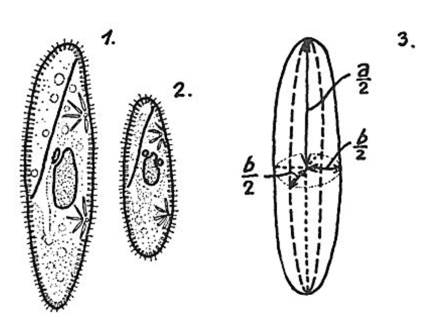


Figura 2.3: Un dibujo del libro de Gause mostrando, a la izquierda, el *Paramecium aurelia* y el *Paramecium caudatum*, a la derecha la aproximación elipsoidal para determinar el volumen de un paramecio.

G. Gause[4] publicó en 1935 una obra titulada *The struggle for existence* en la que estudiaba el desarrollo de dos colonias de paramecios aisladas o compartiendo el mismo hábitat. En concreto analizaba las especies *Paramecium aurelia* y *Paramecium caudatum* (véase en la parte izquierda de la figura 2.3 una imagen tomada del libro de Gause de ambas especies), a las que permitía desarrollarse en un entorno de recursos limitados. Midiendo el volumen de cada colonia y suponiendo que cada paramecio era un elipsoide (tal y como se ve en la parte derecha de la figura 2.3), podía obtener el número de individuos de la población estimando que éste era proporcional al volumen.

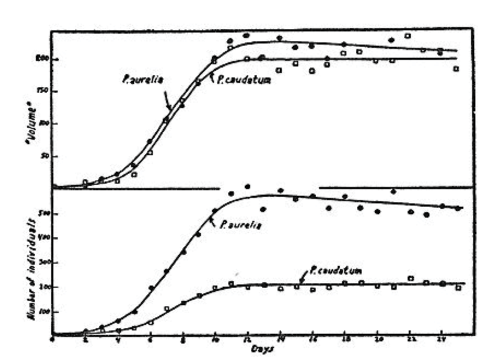


Figura 2.4: Obsérvese que los datos del tamaño de las poblaciones se ajustan a curvas de tipo logístico.

[4]Biólogo ruso conocido por enunciar el denominado *principio de exclusión competitiva* en ecología. Este principio establece que dos especies compitiendo por el mismo nicho ecológico no pueden coexistir en un equilibrio estable; es decir, que cuando dos especies compiten por cubrir las mismas necesidades, una lo hará de manera más eficiente, lo que le permitirá reproducirse más rápidamente, y la otra tenderá a la extinción. Este principio puede *probarse* desde un punto de vista matemático mediante el estudio cuantitativo de un determinado sistema de ecuaciones diferenciales.

Las mediciones realizadas sobre el tamaño de las poblaciones se muestran en la figura 2.4 (también tomada del libro de Gause). Como puede observarse, la aproximación establecida por las curvas logísticas se ajusta de manera adecuada a las mediciones sobre el tamaño de estas poblaciones.

Material complementario

Aplicación de los modelos de Malthus y de Verhulst a la población riojana

Según datos obtenidos del INE, los datos de población en La Rioja durante el siglo XX han sido

Año	Población (en miles)
1920	*192,94*
1930	*203,79*
1940	*221,16*
1950	*229,79*
1960	*229,85*
1970	*235,71*
1980	*253,29*
1990	*267,94*
2000	*276,70*

Para el modelo de Malthus, considerando los dos primeros datos (1920 y 1930) para determinar las constantes, obtenemos la expresión para la población

$$P(t) = (203.79)^t (192.94)^{1-t}.$$

Podemos comparar con un gráfico los valores de la función $P(t)$ *con los valores reales. Los resultados se muestran en la figura 2.5 y ya en el año 2000 (*$P(8) = 298.88$*, ya que* $t = 8$ *corresponde al año 2000) se aprecia un error del orden del 5 %. Con este modelo en el año 2100 la población de nuestra comunidad sería, aproximadamente, de 520.000 personas lo cual parece excesivo ya que plantea una duplicación de la población a lo largo de un siglo algo que no ha ocurrido, ni de lejos, durante el siglo pasado.*

Para aplicar el modelo de Verhulst debemos considerar un valor para P_∞*; aunque se podría determinar por otros procedimientos, tomaremos* $P_\infty = 500$*. De este modo, usando otra vez los datos correspondientes a 1920 y 1930 para determinar las constantes, la función que describe la población de acuerdo con este modelo es*

$$\mathcal{P}(t) = \frac{96470}{192.94 + 307.06(0.91)^t}.$$

Como ya hemos comentado, con el modelo logístico la población a lo largo del tiempo va a tender hacia P_∞*; es decir, medio millón de habitantes. Sin embargo*

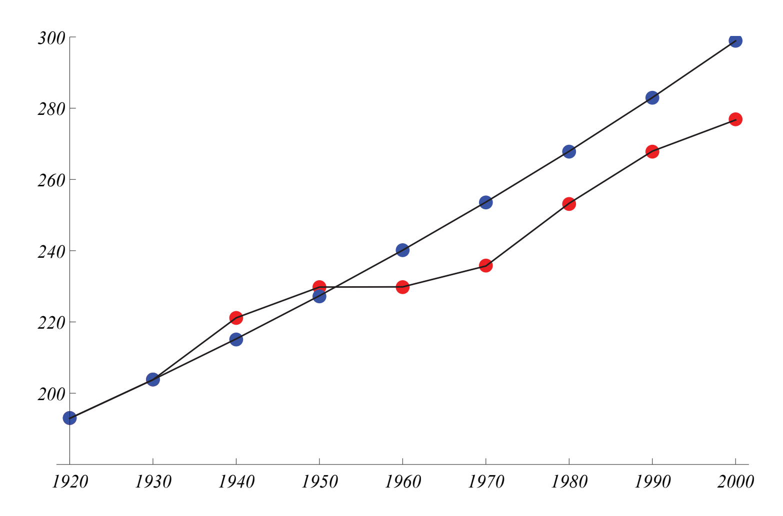


Figura 2.5: En rojo se representan los datos reales de la población riojana y en azul los datos obtenidos con el modelo de Malthus.

la estimación del modelo logístico para el año 2100, $\mathcal{P}(18) = 381.35$*, es mucho más aceptable que la dada por el modelo exponencial. Los resultados dados por la función de población* $\mathcal{P}$ *aparecen comparados con los datos reales en la figura 2.6.*

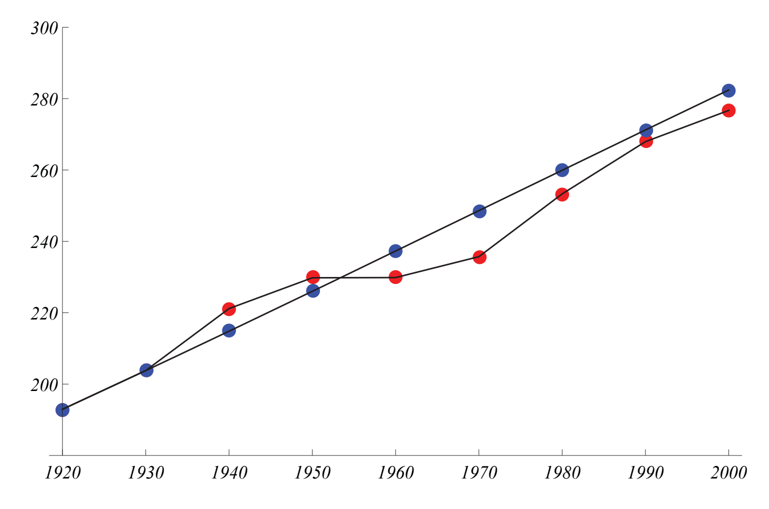


Figura 2.6: En rojo se representan los datos reales de la población riojana y en azul los datos obtenidos con el modelo de Verhulst.

2.2. ¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido de energía?

El año 1905,[5] cinco artículos de Albert Einstein publicados en la revista *Annalen der Physik* revolucionaron el campo de la física. El tercero y el quinto[6] constituyen lo que hoy se llama teoría especial de la relatividad. En ese quinto trabajo (con cuyo título hemos encabezado esta sección) Einstein llegó a deducir la equivalencia masa-energía, traducida en la famosa fórmula $E = Mc^2$, que él expresó entonces en la forma «variación de la masa de un cuerpo igual a L/V^2», donde L es su cambio en energía y V la velocidad de la luz, cuya validez sugería verificar en las sales de radio. En esa época aún ignoraba el autor el descomunal poder del genio escondido en la entrañas de su sencilla fórmula, que se manifestaría años después en las reacciones nucleares.

Veamos, antes de continuar con otras cuestiones, una deducción de la célebre ecuación de Einstein como un ejemplo más de la aplicación de las ecuaciones difrenciales de variables separadas; en este caso, en un nuevo problema mecánico de masa variable.

> $\mathbf{E = Mc^2}$. La teoría especial de la relatividad de Einstein asegura que la masa m de una partícula que se mueve con velocidad v viene dada por
>
> $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$
>
> donde c es la velocidad de la luz y m_0 es su masa en reposo.
>
> a) Si la partícula parte del reposo en el espacio vacío y se mueve durante un largo periodo de tiempo bajo la acción de un campo gravitatorio constante, determinar la velocidad como función del tiempo y comprobar que tiende a c cuanto $t \to \infty$.
>
> b) Sea $M = m - m_0$ el incremento de masa de la partícula. Si el incremento en su energía, que denotamos por E, se debe al trabajo realizado por una cierta fuerza F, de modo que
>
> $$E = \int_0^v F\,dx = \int_0^v \frac{d(mv)}{dt}\,dx = \int_0^v v\,d(mv),$$
>
> comprobar que $E = Mc^2$.

a) Si el campo gravitatorio es constante, tenemos que sobre la partícula se ejercerá una fuerza $F = km$, con k un valor constante positivo. Usando la

[5] En este párrafo hemos incluido extractos literales del artículo de Alberto Galindo Tixaire "En recuerdo de Albert Einstein", *Revista Española de Física*, 2005, págs. 2–3.

[6] Por orden de recepción en la revista, son, respectivamente, "Zur Elektrodynamik Bewegter Körper" (Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento), *Annalen der Physik* 17 (1905), págs. 891–921, y "Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?" (¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido de energía?), *Annalen der Physik* 18 (1905), págs. 639–641.

segunda ley de Newton en su versión para cuerpos de masa variable tendremos que

$$\frac{d(mv)}{dt} = km \iff v\frac{dm}{dt} + m\frac{dv}{dt} = km.$$

Ahora, usando la expresión dada para la masa se verificará que

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{m_0 v}{c^2\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}}\frac{dv}{dt} = \frac{m^3 v}{c^2 m_0^2}\frac{dv}{dt},$$

y, de este modo, obtenemos la ecuación

$$\left(1 + \frac{m^2 v^2}{c^2 m_0^2}\right)\frac{dv}{dt} = k \iff \frac{c^2}{c^2 - v^2}\frac{dv}{dt} = k.$$

Finalmente, usando que la partícula parte del reposo, concluimos que[7]

$$\frac{c}{2}\log\left(\frac{c+v}{c-v}\right) = kt \iff v = c\frac{1-e^{-2kt/c}}{1+e^{-2kt/c}},$$

de donde es claro que $v \to c$ cuando $t \to \infty$.

b) De la expresión dada para E, tenemos que

$$\begin{aligned} E &= \int_0^v v\, d(mv) = \int_0^v v\frac{d(mv)}{dv}\, dv \\ &= \int_0^v v\left(v\frac{dm}{dv} + m\right) dv. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la expresión de la masa en términos de la velocidad llegamos a que

$$v\frac{dm}{dv} + m = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}}$$

y así, finalmente,

$$\begin{aligned} E &= m_0\int_0^v \frac{v}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}}\, dv = \left.\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right|_0^v \\ &= c^2\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0\right) = c^2(m - m_0) = c^2 M. \end{aligned}$$

[7] Usamos que

$$\int \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+t}{a-t}\right| + C.$$

2.3. Curvas de persecución y ecuaciones diferenciales homogéneas

Una curva de persecución es la que describe un móvil *perseguidor* que sigue un camino dirigido directamente hacia un objeto perseguido, el *objetivo*. El problema consiste en determinar la trayectoria óptima que permite al perseguidor alcanzar el objetivo.

El planteamiento dependerá, naturalmente, de si el objetivo permanece en reposo o si, por el contrario, está en movimiento. También habrá que considerar, las condiciones *ambientales* en las que se realiza la persecución. Sin embargo, la idea fundamental que subyace en la resolución de este tipo de problemas es la misma: la velocidad del perseguidor en cada instante tiene que tener la dirección y el sentido del vector determinado por el perseguidor y su objetivo. El problema de los escarabajos que tratamos en el capítulo anterior describe, en estos términos, la curva de persecución que sigue cada insecto para alcanzar a su vecino de la izquierda.

De un modo muy simple (estaríamos en un planteamiento unidimensional) podríamos pensar que la paradoja de Zenón de Elea (siglo V a. C.) sobre Aquiles y la tortuga contiene un ejemplo primitivo de curva de persecución. Demos la palabra a Jorge Luis Borges que, en su obsesión por el infinito, dedicó dos ensayos a esa paradoja en su obra *Discusión* (1932). El fragmento que presentamos a continuación pertenece al ensayo titulado *La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga*:

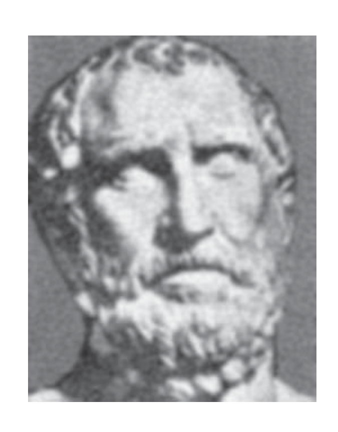
> Aquiles, símbolo de rapidez, tiene que alcanzar a la tortuga, símbolo de morosidad. Aquiles corre diez veces más ligero que la tortuga y le da diez metros de ventaja. Aquiles corre esos diez metros, la tortuga corre uno; Aquiles corre ese metro, la tortuga corre un decímetro; Aquiles corre ese decímetro, la tortuga corre un centímetro; Aquiles corre ese centímetro, la tortuga corre un milímetro; Aquiles el milímetro, la tortuga un décimo de milímetro, y así infinitamente, de modo que Aquiles puede correr para siempre sin alcanzarla. Así la paradoja inmortal.

La paradoja tiene lugar porque hay una contradicción obvia con la realidad: Aquiles siempre alcanzará a la tortuga. Desde una perspectiva actual, sabemos que si $v\,\mathrm{m/sg}$ es la velocidad de la tortuga, el tiempo que tardará Aquiles en alcanzar a la tortuga es

$$\frac{10}{10v}+\frac{1}{10v}+\frac{\frac{1}{10}}{10v}+\frac{\frac{1}{100}}{10v}+\cdots=\frac{1}{v}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^k}=\frac{10}{9v}\quad\text{segundos.}$$

Pero, ¿cómo es posible que suceda –nos diría Zenón– si la tortuga está yendo por delante de Aquiles? Como dice Borges, la paradoja se mantiene en pie, *inmortal*.

Se suele considerar que el primer estudio de una curva de persecución lo realizó el matemático francés Pierre Bouguer en 1732. El 16 de enero de ese



Sobre la vida y obra de Zenón de Elea poco se conoce. Su nacimiento se situa alrededor del año 490 a. C. y su fallecimiento en torno al año 425 a. C. Zenón pasó toda su vida en Elea (Lucania, actual Italia), donde el filósofo presocrático Parménides había fundado la *Escuela Eleática* de filosofía. Se sabe así que fue discípulo de Parménides. Es seguro que escribió un libro de filosofía en el que presentaba hasta cuarenta paradojas que buscaban apoyar las ideas de su maestro respecto a la concepción unitaria de las cosas. El conocimiento que tenemos de su obra es por referencias de otros autores, siendo la fundamental de todas ellas la *Física* de Aristóteles. En esta obra el autor enuncia y comenta algunas de las paradojas de Zenón, llegando a afirmar que se trata de falacias, sin ser capaz de argumentar el por qué.

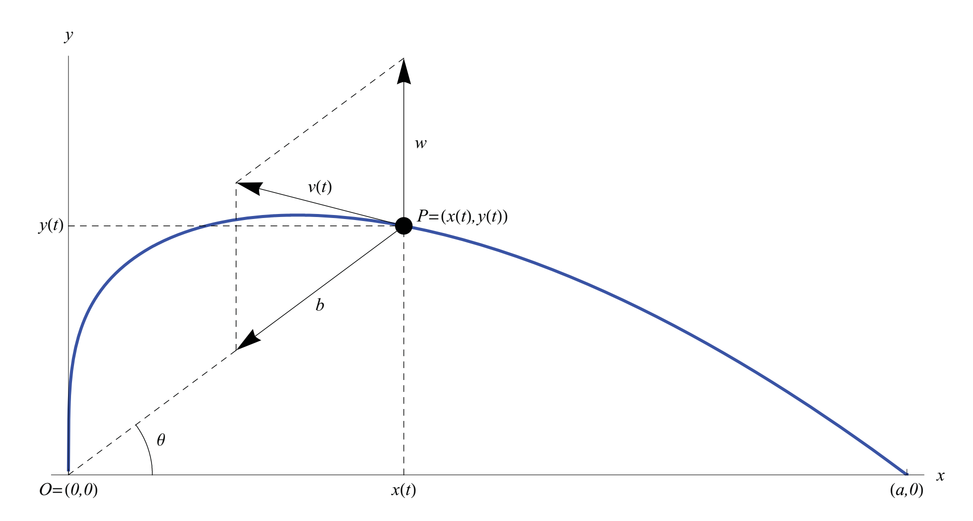


Figura 2.7: Trayectoria del vuelo del ganso con un viento del sur de magnitud w.

año presentó en la Academia Francesa un trabajo, que apareció publicado en *Mémories de l'Académie Royale des Sciences* en 1735, analizando la trayectoria de un barco pirata en su persecución de un barco mercante. Este problema lo analizaremos una páginas más adelante; a continuación, presentaremos una variante del mismo (conceptualmente similar) y que nos va a permitir introducir y resolver un nuevo tipo de ecuaciones diferenciales: las ecuaciones homogéneas.

Esta primera curva de persecución que vamos a determinar permite obtener la trayectoria de un móvil que quiere alcanzar un objetivo fijo pero tiene un cierto impedimento (en nuestro caso, por darle un cierto toque *literario*, se tratará de un viento traicionero).

> **Un ganso con problemas.** Un ganso intenta volar de regreso a su nido, que se encuentra al oeste de su posición actual, pero sopla un viento constante del sur. El ganso mantiene el curso hacia su nido, pero el viento lo desvía. ¿Cuál es la trayectoria del vuelo del ganso? ¿Llegará a su nido?[8]

En un sistema de referencia OXY, situemos el nido en el origen O, es decir en el punto $(0,0)$, y el ganso inicialmente en el punto $(a,0)$ con $a>0$ (al este del nido). Supongamos que la trayectoria del ganso está dada por la ecuaciones

[8] El ejemplo está tomado del libro *Ecuaciones diferenciales: una perspectiva de modelización* de R. Borrelli y C. S. Coleman, publicado por la editorial Oxford en 2002 (traducción de la primera edición en inglés de 1998).

Existen varios enunciados alternativos de la misma cuestión. En algunos textos se plantea el problema para una barca situada en una orilla de un rio y que desea alcanzar la otra orilla estando sometida a la corriente. Asimismo, el problema se puede plantear como el estudio de la trayectoria que seguirá un avión para llegar a una ciudad si hay un flujo de viento que modifica el movimiento del avión.

paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, donde t es el tiempo, de modo que $(x(t), y(t))$ indica la posición del ganso en el instante t. Se tendrá $(x(0), y(0)) = (a, 0)$ y, si denotamos con T el tiempo que tardará el ganso en llegar al nido, se tendrá $(x(T), y(T)) = (0, 0)$. Se supone que el ganso vuela a una velocidad constante de b km/h y que el viento del sur sopla a una velocidad constante de w km/h. El ángulo de dirección θ del vector de posición $\overrightarrow{OP}$ (véase la figura 2.7) va variando en función de la posición del ave. Resulta sencillo comprobar que

$$v(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right) = (-b\cos\theta, -b\operatorname{sen}\theta + w).$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{y} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

llegamos al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{-bx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-by}{\sqrt{x^2+y^2}} + w. \end{cases}$$

Algo que hace sencillo a este sistema es que las funciones que aparecen en el lado derecho de las ecuaciones son independientes de la variable t, aprovechemos esto para analizarlo. Supongamos que $y = y(x)$; de la dependencia $x = x(t)$ e $y = y(t)$ tenemos el siguiente diagrama

$$t \longleftarrow x \longleftarrow y \longrightarrow t.$$

Así,

$$\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

De este modo la curva de la trayectoria del ganso hasta su nido vendrá dada por la ecuación, en la que se considera $y = y(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{by - w\sqrt{x^2+y^2}}{bx}$$

sujeta a la condición inicial $y(a) = 0$. Hemos avanzado algo, pero aún no somos capaces de resolver esta ecuación diferencial ya que no es de variables separadas. La característica principal de esta ecuación diferencial es que el lado derecho de la misma es una función homogénea de orden cero,[9] porque

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{b\lambda y - w\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)}}{b\lambda x} = f(x, y).$$

[9]La definición general de una función homogénea debe hacerse de la manera apropiada que pasamos a describir. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ verificando que si $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ entonces $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in D$, para $\lambda \neq 0$ (un conjunto cumpliendo esta propiedad suele denominarse

Una ecuación del tipo $x'(t) = f(t,x)$, con f homogénea de orden cero se denomina ecuación homogénea. Es claro que para funciones homogéneas de orden cero existe una función g de una variable tal que $f(t,x) = g(x/t)$. De esta forma mediante el cambio de función $z = x/t$, que nos da

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt}t + z,$$

la ecuación $x' = f(t,x)$ se transforma en

$$\frac{dz}{dt} = \frac{g(z) - z}{t}$$

que es una ecuación de variables separadas. Con este procedimiento podemos proceder a determinar la trayectoria del vuelo del ganso. Teniendo en cuenta que

$$f(x,y) = \frac{y}{x} - \frac{w}{b}\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

con $g(s) = s - \frac{w}{b}\sqrt{1+s^2}$ y usando el cambio de función $z = y/x$, llegamos a la ecuación

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{w}{b}\frac{\sqrt{1+z^2}}{x} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\frac{dz}{dx} = -\frac{w}{bx}.$$

Multiplicando por dx e integrando en ambos miembros llegamos a que la solución general está dada por la expresión

$$\log(z + \sqrt{1+z^2}) = -\frac{w}{b}\log x + C$$

(notar que podemos prescindir de los valores absolutos en los logaritmos porque estamos trabajando con cantidades positivas). De manera equivalente,

$$z + \sqrt{1+z^2} = kx^{-w/b} \Longrightarrow z = \frac{1}{2}\left(kx^{-w/b} - k^{-1}x^{w/b}\right).$$

Si deshacemos el cambio de función introducido tendremos que

$$y = \frac{x}{2}\left(kx^{-w/b} - k^{-1}x^{w/b}\right).$$

---

cono). Una función $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice homogénea de orden α si satisface que

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, \ldots, x_n).$$

Las propiedades de las funciones homogéneas son muchas y muy variadas, pero hay una que sin duda merece la pena comentar. Se trata del denominado Teorema de Euler: si $f \in C^1(D)$ es una función homogénea de orden α, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \alpha f(x_1, \ldots, x_n).$$

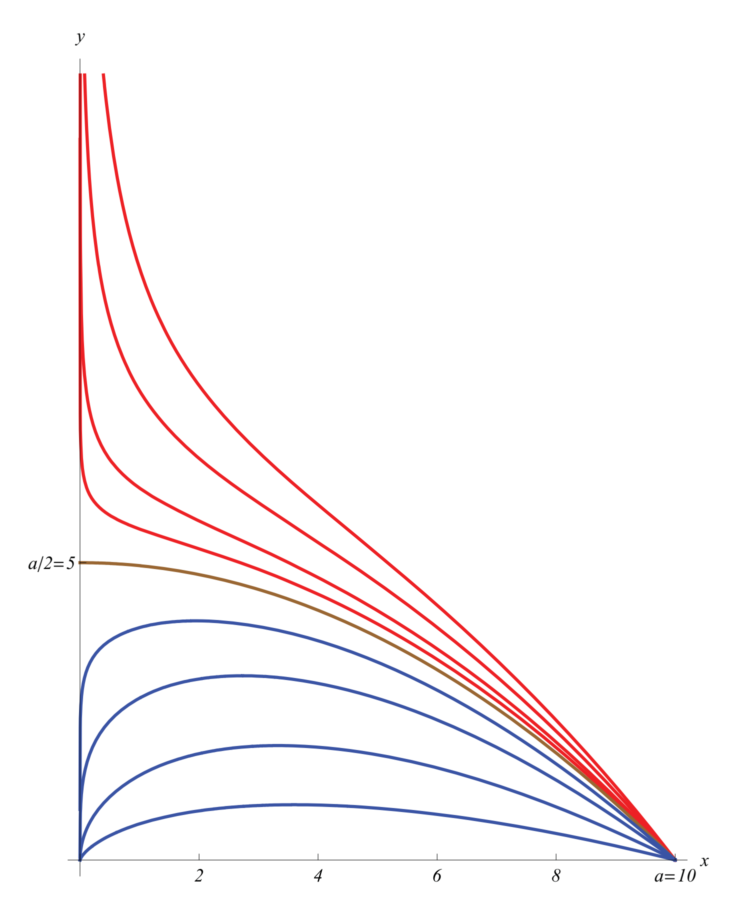


Figura 2.8: Diversas trayectorias del vuelo del ganso con $a = 10$. Para las curvas azules se tiene que $b/w > 1$; para la curva marrón, $b/w = 1$; para las curvas rojas, $b/w < 1$.

Finalmente, imponiendo la condición inicial obtendremos que $k = a^{w/b}$ y así,

$$y = \frac{x}{2}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{w/b} - \left(\frac{x}{a}\right)^{w/b}\right).$$

Estas curvas describen la trayectoria del vuelo del ganso en su objetivo de alcanzar el nido.

De la figura 2.8 se desprende claramente que si la velocidad del viento w es mayor o igual que la velocidad b del ganso, éste nunca alcanzará el nido; si por el contrario, $b > w$, el ganso llegará a su nido sin ningún problema. Este resultado podía haberse deducido de la forma de las curvas; basta observar que aparece una asíntota vertical en $x = 0$ cuando $b < w$ y que cuando $b = w$ la curva es una parábola que en $x = 0$ toma el valor $a/2$.

Como comentario final nos gustaría indicar que también es posible resolver ecuaciones diferenciales homogéneas considerando un cambio a coordenadas polares $x = r \operatorname{sen} \theta$ y $t = r \cos \theta$, con $r = r(\theta)$. Con este cambio, la ecuación

$$x' = g\left(\frac{x}{t}\right)$$

se transformará en

$$\frac{\operatorname{sen} \theta \frac{dr}{d\theta} + r \cos \theta}{\cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \operatorname{sen} \theta} = g(\tan \theta),$$

que, con una sencilla manipulación, se reduce a la ecuación de variables separadas

$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{g(\tan \theta) \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}{g(\tan \theta) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta}.$$

Material complementario

El reloj de Perrault y la tractriz

El problema anterior, como ya hemos comentado, es una versión del problema original de Bouguer. Cuarenta años antes se estudió una curva que podríamos definir como curva de arrastre. En un trabajo de 1693, Leibniz comienza haciendo mención a un encuentro ocurrido durante su estancia en París, donde había acudido a trabajar junto a Huygens, a comienzos de los años setenta del siglo XVII. En dicho encuentro el físico[10] *Claude Perrault le había planteado la siguiente cuestión:*



–¿Qué hace una chica como tú en un sitio como éste?
–¿Quién, yo? ..., yo soy la sobrina del tipo del reloj.

> *Colocamos un reloj de bolsillo sobre una mesa rectangular y estiramos la cadena de modo que quede dispuesta perpendicularmente a dos de los lados de la mesa y que su extremo libre llegue hasta el borde de uno de ellos. Si desplazamos el extremo libre de la cadena a lo largo de este borde de la mesa, ¿qué línea sigue el reloj?*

Según se desprende del comentario de Leibniz, Perrault ya había planteado la cuestión a otros matemáticos y de ninguno de ellos había recibido una respuesta. En el trabajo de 1693 Leibniz dio una solución y hoy sabemos que Newton ya había determinado la curva en el año 1676.

Para dar nuestra respuesta al problema del reloj de Perrault, seguiremos el esquema que hemos dibujado en la figura 2.9, en la que el reloj se representa por el punto negro y el extremo libre con el gris. Supongamos que $R_1 = (0, L)$, *donde* L *es la longitud de la cadena del reloj, y* $P_1 = (0, 0)$ *son las posiciones iniciales del reloj y del extremo libre de la cadena, respectivamente. Si suponemos que el*

[10] También ingeniero, aquitecto, médico ... y hermano de Charles Perrault, el célebre autor de *Cenicienta*.

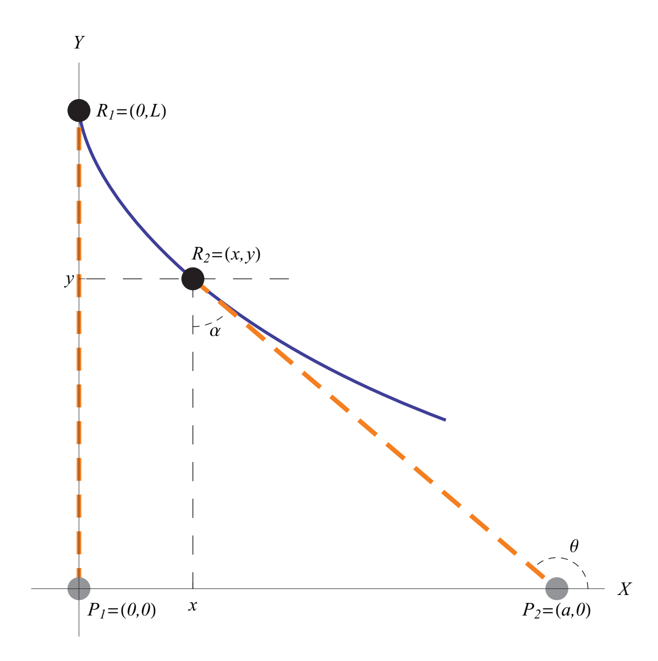


Figura 2.9: Esquema del desplazamiento del reloj, donde el extremo libre se mueve a lo largo del eje horizontal.

extremo libre se desplaza a lo largo del eje horizontal hasta alcanzar la posición $P_2 = (a, 0)$*, el reloj habrá alcanzado la posición* $R_2 = (x, y)$*. Considerando que* $y = y(x)$*, tendremos que* $y' = \tan\theta$*, donde* θ *es el ángulo formado por la cadena y la dirección positiva del eje horizontal. A partir de la figura, siendo* $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2}$*, resulta que*

$$\tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha = -\frac{y}{a-x}.$$

Usando ahora que la longitud del segmento P_2R_2 *es* L*, por el teorema de Pitágoras se verificará que*

$$a - x = \pm\sqrt{L^2 - y^2}$$

(el signo positivo corresponde a un desplazamiento hacia la derecha como el que se muestra en la figura y el signo negativo a un desplazamiento hacia la izquierda) y deducimos la ecuación diferencial

$$y' = \mp\frac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}}.$$

Mediante separación de variables obtenemos que

$$\frac{\sqrt{L^2 - y^2}}{y}dy = \mp dx$$

y llegamos a la expresión

$$\mp x = \sqrt{L^2 - y^2} - L \log\left(\frac{L + \sqrt{L^2 - y^2}}{y}\right) + C.$$

Puesto que la curva pasa por el punto $(0, L)$*, tendremos que* $C = 0$ *y*

$$\mp x = \sqrt{L^2 - y^2} - L \log\left(\frac{L + \sqrt{L^2 - y^2}}{y}\right).$$

La curva que acabamos de describir se conoce como tractriz, sustantivo femenino del verbo latino tracto, que significa arrastrar. El nombre de la curva fue propuesto por C. Huygens, quien en 1692 consiguió determinarla independientemente de Leibniz y, por supuesto, de Newton. Los alemanes la denominan Hundekurve, que significa curva del perro, y este nombre viene sugerido por una situación muy cotidiana. Si una persona camina en línea recta conduciendo a un perro sujeto con la habitual cadena o correa y el perro se deja llevar sin más, describirá una tractriz.

La tractriz es lo que se denomina una curva equitangencial*, ya que para cada punto de la curva el segmento de tangente comprendido entre la curva y el eje horizontal es constante. Este hecho es obvio para nosotros por la forma en la que la hemos deducido. En la figura 2.10 hemos representado la tractriz y los segmentos limitados por la curva y el eje de abscisas para las tangentes a la curva en algunos puntos.*

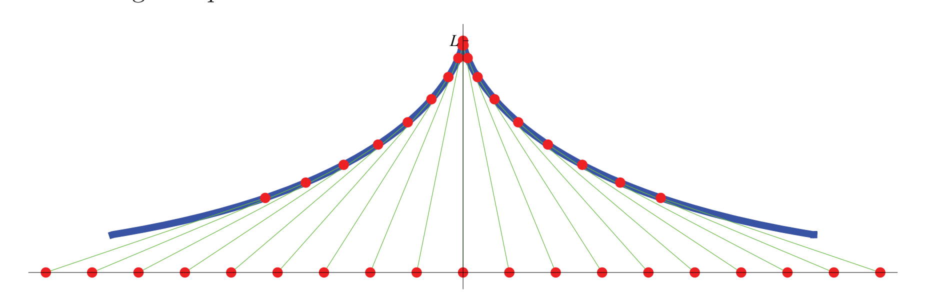
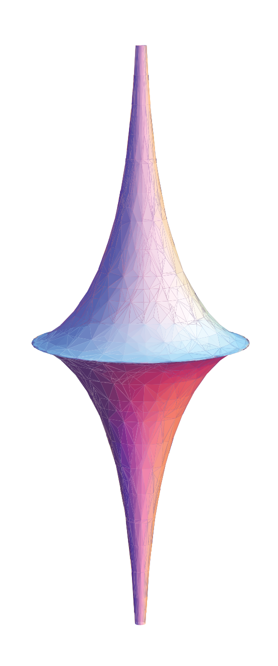


Figura 2.10: La tractriz y las diversas posiciones que van tomando el reloj y el extremo libre de la cadena.

La recta sobre la que se desplaza el extremo libre del reloj, que se convierte en la asíntota de la curva al resolver el problema, se conoce como directriz*. No resulta difícil imaginar una generalización de la tractriz en la que la recta directriz se sustituye por otro tipo de curva directriz. Euler, en un trabajo de 1788, se planteó esta cuestión. Encontró el problema insoluble en un contexto general (una curva cualquiera), pero fue capaz de resolverlo para el caso en que la curva directriz fuese una circunferencia. Propondremos el estudio de esta cuestión como problema al final de este capítulo.*



La tractriz es una curva de gran interés teórico en matemáticas. Si giramos la curva alrededor de su asíntota horizontal, obtendremos una superficie de revolución denominada *pseudoesfera* (se muestra en vertical en la imagen superior). Se trata de una superficie de curvatura negativa constante que proporciona un modelo parcial de geometría hiperbólica como probó Eugenio Beltrami en 1868.

2.4. Trayectorias ortogonales e isogonales

Hasta ahora, cada ecuación diferencial ha sido resuelta obteniendo una familia de curvas solución (la solución general). De modo inverso, dada una familia de curvas dependiente de un parámetro se puede obtener una ecuación diferencial cuya solución general venga dada por esa familia de curvas.[11] Para ello

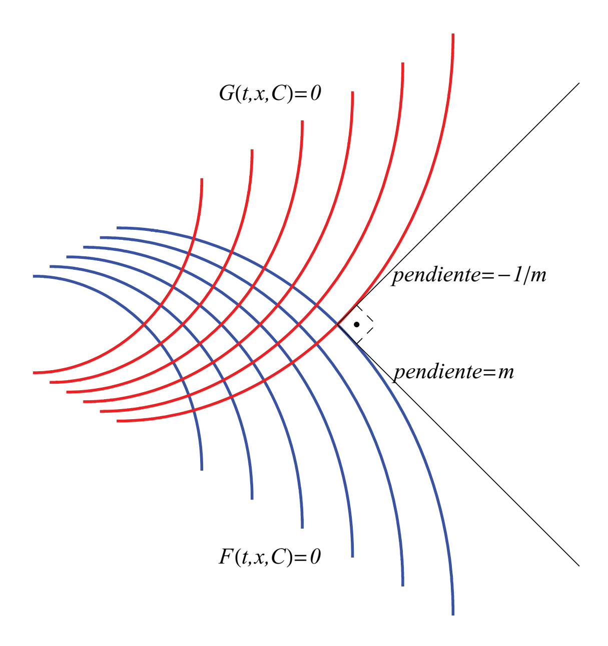


Figura 2.11: Una familia de curvas $F(t,x,C) = 0$ (en azul) y su familia de trayectorias ortogonales $G(t,x,C) = 0$ (en rojo).

basta tener en cuenta que si la familia de curvas

$$F(t,x,C) = 0,$$

donde F es una función de clase C^1, verifica que $\frac{\partial F}{\partial C} \neq 0$, podemos definir implícitamente $C = C(t,x)$. Suponiendo que $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ (de modo similar se procedería si $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$) tendremos que $x = x(t,C)$ y, utilizando el teorema de la función implícita para obtener la derivada de x con respecto a t, podemos obtener la ecuación asociada a la familia de curvas. En efecto,

$$\begin{aligned} F(t,x,C) = 0 &\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}F(t,x,C) + \frac{\partial}{\partial x}F(t,x,C)\frac{dx}{dt} = 0 \\ &\Longrightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{\partial}{\partial t}F(t,x,C)}{\frac{\partial}{\partial x}F(t,x,C)}. \end{aligned}$$

[11] Esta cuestión ya se había propuesto como problema en el capítulo anterior.

Ahora, como $C = C(t, x)$, tenemos la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{\partial}{\partial t}F(t, x, C(t, x))}{\frac{\partial}{\partial x}F(t, x, C(t, x))}.$$

Este procedimiento nos va a permitir determinar lo que se denominan *trayectorias ortogonales* a una familia de curvas dada. Sea $F(t, x, C) = 0$ una familia de curvas dependiente de un parámetro, diremos que la familia $G(t, x, C) = 0$ es de trayectorias ortogonales a la familia dada si en los puntos de intersección de una curva de la familia $F(t, x, C) = 0$ con otra de la familia $G(t, x, C) = 0$, las rectas tangentes a ambas curvas son ortogonales. Véase la figura 2.11.

Las trayectorias ortogonales, además de su interés puramente matemático, tienen gran utilidad en otras áreas. Por ejemplo, si una corriente eléctrica fluye sobre una lámina plana de material conductor, las líneas de equipotenciales serán las trayectorias ortogonales de las líneas de flujo de la corriente.

Si la familia de curvas $F(t, x, C) = 0$ es la solución general de la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$ (que podremos determinar por el procedimiento descrito al inicio), la familia de trayectorias ortogonales vendrá dada como la solución general de la ecuación

$$x' = \frac{-1}{f(t, x)}.$$

Esto es así debido a que el producto de las pendientes de dos rectas tangentes a ambas familias debe ser -1.

***Ejemplo* 6.** Consideremos la familia de curvas $F(t, x, C) = t^2 + x^2 - 2Ct = 0$. Es sencillo observar que las curvas dadas son circunferencias tangentes al eje vertical en el origen y con el centro sobre el eje horizontal. La figura 2.12 muestra en azul esta familia de circunferencias. Suponiendo que $x = x(t)$ y derivando implícitamente respecto a t la relación $t^2 + x^2 - 2Ct = 0$, se tiene que

$$2t + 2xx' - 2C = 0 \Longrightarrow x' = \frac{C - t}{x}.$$

De manera elemental podemos observar que

$$C = \frac{t^2 + x^2}{2t}$$

y, por tanto, la ecuación diferecial satisfecha por $F(t, x, C) = 0$ es

$$x' = \frac{x^2 - t^2}{2tx}.$$

De esta forma las trayectorias ortogonales vendrán dadas por la solución general de

$$x' = \frac{2tx}{t^2 - x^2}.$$

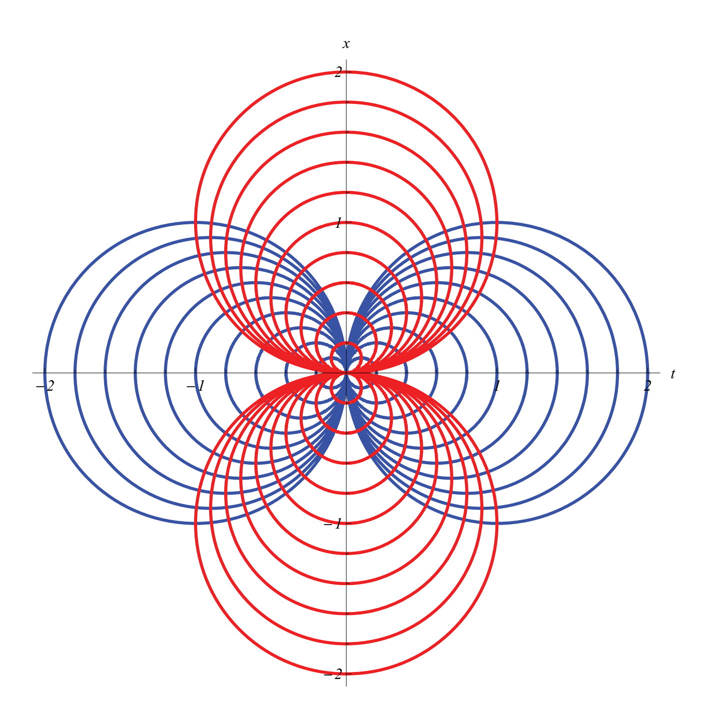


Figura 2.12: En azul la familia de circunferencias $F(t,x,C) = t^2 + x^2 - 2Ct = 0$ y en rojo sus trayectorias ortogonales: la familia de circunferencias $G(t,x,C) = t^2 + x^2 - 2Cx = 0$.

Se trata de una ecuación homogénea $x' = g\left(\frac{x}{t}\right)$, con $g(s) = 2s/(1-s^2)$. Con el cambio de función $z = x/t$ tendremos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{z(1+z^2)}{t(1-z^2)} \Longrightarrow \log\left(\frac{z}{1+z^2}\right) = \log t + k.$$

Deshaciendo el cambio obtendremos la familia de curvas

$$G(t,x,C) = t^2 + x^2 - 2Cx = 0,$$

que son las trayectorias ortogonales. Esta curvas son circunferencias tangentes al eje horizontal en el origen como se observa en la figura 2.2. ◁

Si la ecuación diferencial asociada con la familia de curvas $F(t,x,C) = 0$ sólo puede presentarse de manera implícita, es decir, si la ecuación satisfecha por las curvas es de la forma $H\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$, entonces la ecuación asociada que determina las trayectorias ortogonales será

$$H\left(t, x, -\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1}\right) = 0.$$

Ejemplo 7. La familia de parábolas $x^2 = 4c(t+c)$ satisface la ecuación diferencial

$$(xx')^2 + 2xx't - x^2 = 0.$$

Sustituyendo x' por $-\frac{1}{x'}$, obtenemos que las trayectorias ortogonales verifican la ecuación

$$\left(-\frac{x}{x'}\right)^2 - 2\frac{x}{x'}t - x^2 = 0$$

que puede reescribirse como

$$(xx')^2 + 2xx't - x^2 = 0;$$

es decir, las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas forman la misma familia de parábolas. Véase la figura 2.13. Una familia de curvas con esta propiedad se denomina auto-ortogonal. ◁

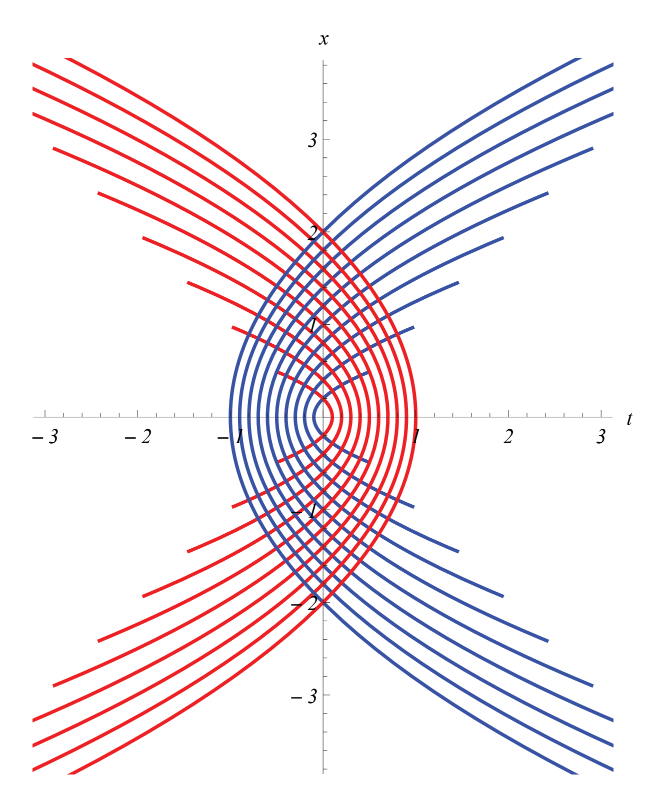


Figura 2.13: En azul hemos pintado las parábolas $x^2 = 4c(t+c)$ para $c > 0$ y en rojo para $c < 0$. Se observa que las parábolas rojas son ortogonales a las azules.

Es posible que para trabajar con una cierta familia de curvas sea mejor expresarla en coordenadas polares, haciendo $t = r\cos\theta$ y $x = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $r =$

$r(\theta)$. En esta situación, la familia de curvas pasará a verificar una ecuación diferencial del tipo

$$F\left(\theta, r, \frac{dr}{d\theta}\right) = 0.$$

Haciendo las operaciones convenientes se concluye que la familia de trayectorias ortogonales será la solución general de la ecuación diferencial

$$F\left(\theta, r, -r^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^{-1}\right) = 0.$$

***Ejemplo* 8.** Mediante el uso de coordenadas polares podemos obtener fácilmente la familia de trayectorias ortogonales a la familia de lemniscatas

$$(t^2 + x^2)^2 = a^2(t^2 - x^2).$$

La expresión en coordenadas polares de las lemniscatas es

$$r^2 = a^2 \cos(2\theta).$$

De esta forma, la ecuación diferencial que satisfacen es

$$\frac{dr}{d\theta} = -r\tan(2\theta)$$

y las trayectorias ortogonales serán las soluciones de

$$\frac{dr}{d\theta} = r\cot(2\theta).$$

Esta ecuación es de variables separadas. La solución general es

$$r^2 = b^2|\operatorname{sen}(2\theta)|.$$

La expresión de esta familia de curvas en coordenadas cartesianas es

$$(t^2 + x^2)^2 = \pm 2b^2 tx.$$

En la figura 2.14 se muestran la familia de lemniscatas y sus trayectorias ortogonales. Es sencillo comprobar que, como se observa, las trayectorias ortogonales son lemniscatas similares, pero giradas $\pm\pi/4$ en torno al origen. $\triangleleft$

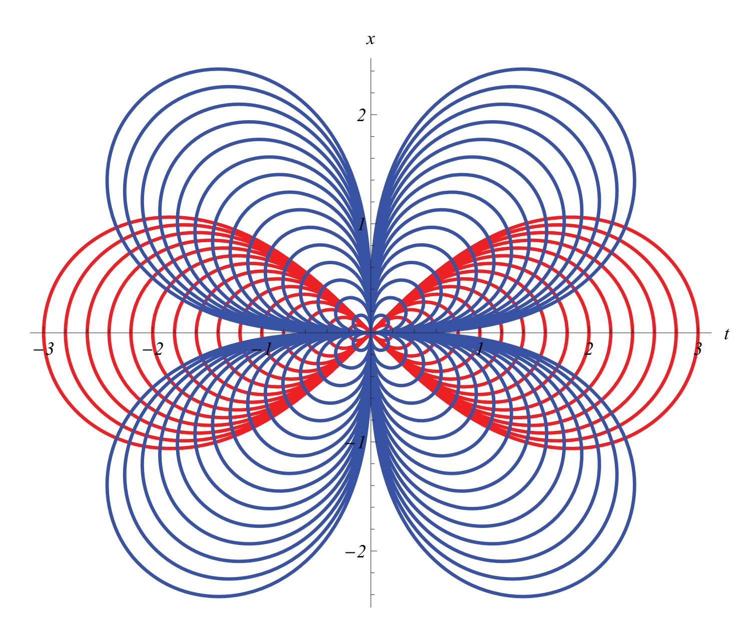


Figura 2.14: En rojo la familia de lemniscatas $(t^2+x^2)^2 = a^2(t^2-x^2)$ y en azul su familia de trayectorias ortogonales.

Material complementario

Un problema de la revista The American Mathematical Monthly

En el año 1951, en la revista The American Mathematical Monthly, se propuso como problema E993 (pág. 699) la siguiente cuestión: Determinar las trayectorias ortogonales a la familia de cicloides

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad e \qquad y = a(1-\cos\theta).$$

El proponente era F. M. Carpenter. Presentamos a continuación una solución basada en la publicada en 1952 en la misma revista a nombre de E. W. Marchand.

Derivando obtenemos

$$y' = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}.$$

La eliminación de a en las ecuaciones paramétricas de la cicloide da

$$\frac{x}{y} = \frac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}, \tag{2.2}$$

ecuación que define implícitamente $\theta = \theta(x, y)$. La familia de las trayectorias ortogonales verificará la ecuación diferencial

$$y' = \frac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta}. \tag{2.3}$$

Si suponemos que las trayectorias ortogonales tienen ecuaciones paramétricas dependientes de θ; es decir, $x = x(\theta)$ e $y = y(\theta)$, de (2.3) deducimos que

$$\operatorname{sen}\theta \frac{dy}{d\theta} = (\cos\theta - 1)\frac{dx}{d\theta}$$

y de (2.2), por derivación respecto a θ, que

$$x \operatorname{sen}\theta + (1 - \cos\theta)\frac{dx}{d\theta} = y(1 - \cos\theta) + (\theta - \operatorname{sen}\theta)\frac{dy}{d\theta}.$$

Ahora, usando (2.2), eliminamos $\frac{dx}{d\theta}$ de las dos relaciones anteriores y llegamos a la ecuación

$$\frac{dy}{d\theta} = y\left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{2}{\theta}\right).$$

Se trata de una ecuación en variables separadas cuya solución general es

$$y(\theta) = c\frac{1 - \cos\theta}{\theta^2}.$$

La coordenada x se deduce inmediatamente de (2.2)

$$x(\theta) = c\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{\theta^2}.$$

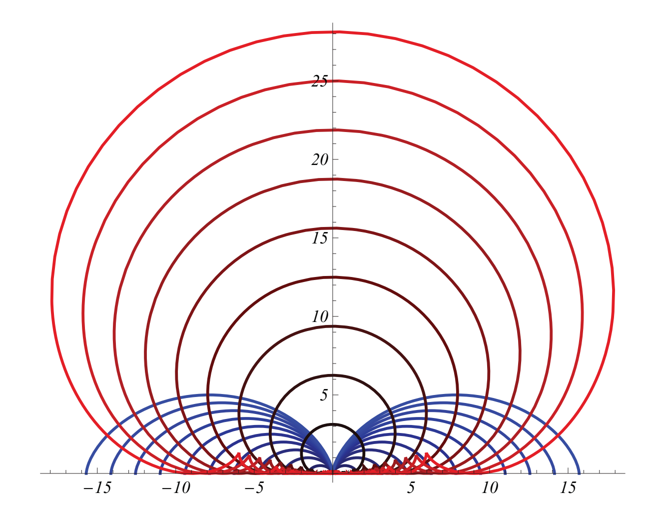
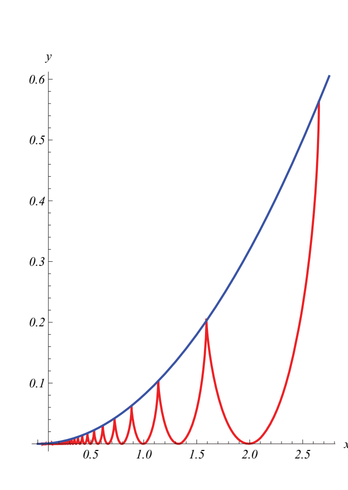


Figura 2.15: En azul la familia de cicloides y en rojo sus trayectorias ortogonales.



La familia de trayectorias ortogonales a la familia de cicloides que acabamos de describir tiene una curiosa propiedad. Si hacemos un *zoom* cerca del origen se puede apreciar, tal y como se muestra en la imagen en rojo, que la curva presenta una serie de picos. (La unidades que se han considerado en el gráfico distorsionan la curva, pero permiten visualizar su comportamiento de una manera más clara.) Cada uno de esos picos se corresponde con un punto de no derivabilidad de la curva y ocurren para los valores $\theta = (2k+1)\pi$. Resulta interesante observar que todos esos puntos se encuentran sobre la parábola $y = \frac{2x^2}{c}$, mostrada en azul en la imagen superior.

La figura 2.15 muestra la familia de cicloides y sus trayectorias ortogonales.

Resulta sencillo observar que el procedimiento anterior para determinar trayectorias ortogonales se puede extender a cualquier familia de curvas Φ_a parametrizada mediante expresiones de la forma $x(t) = \alpha(a)f(t)$ e $y(t) = \alpha(a)g(t)$.

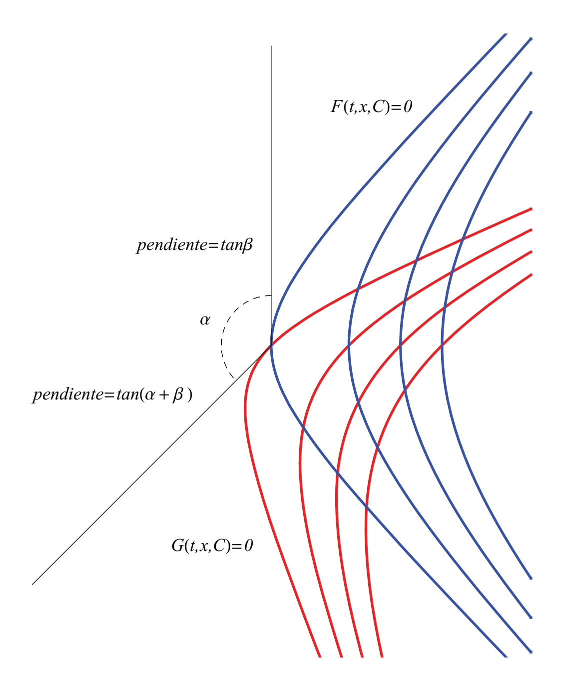


Figura 2.16: En azul mostramos una familia de curvas y en rojo sus trayectorias isogonales de ángulo α.

Un problema más general consiste en determinar la familia de curvas cuyas tangentes forman un ángulo cualquiera, α, con las tangentes a una familia de curvas dada. Estas curvas se denominan *trayectorias isogonales de ángulo* α.

Si consideramos una familia de curvas $F(t, x, C) = 0$ que es la solución general de la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$, a cada punto (t, x) le podemos asociar un ángulo β tal que $x' = \tan\beta$. Teniendo en cuenta que buscamos curvas $x = x(t)$ que formen un ángulo α con las de la familia F, la ecuación diferencial de las trayectorias isogonales de ángulo α será $x' = \tan(\alpha + \beta)$. Usando la fórmula $\tan(\alpha+\beta) = (\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$, llegamos a que la familia de trayectorias isogonales de ángulo α será la solución general de

$$x' = \frac{\tan\alpha + f(t, x)}{1 - \tan\alpha \cdot f(t, x)}.$$

***Ejemplo* 9.** Como ejemplo, sencillo pero bello, podemos calcular las trayectorias isogonales de ángulo α, con $\alpha \in (0, \pi/2)$, a la familia de rectas $x = Ct$. Notar que para $\alpha = 0$ tendremos la propia familia de rectas y es bien conocido que las circunferencias de centro en el origen son las trayectorias ortogonales (el caso extremo $\alpha = \pi/2$) de la familia de rectas dada. La ecuación diferencial que satisfacen las rectas es, obviamente, $x' = x/t$. Por tanto, las trayectorias isogonales de ángulo α serán las soluciones de la ecuación

$$x' = \frac{k + \frac{x}{t}}{1 - k\frac{x}{t}},$$

donde $k = \tan\alpha \in (0, \infty)$. Nos encontramos con otra ecuación homogénea cuyas soluciones son la familia de curvas

$$\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x}{t}\right) = \log\left(C\sqrt{x^2 + t^2}\right).$$

Esta forma para las curvas es poco ilustrativa. En coordenadas polares, $t = r\cos\theta$ y $x = r\operatorname{sen}\theta$, con $r = r(\theta)$, la ecuación es

$$r = Ae^{\theta/k}.$$

Es decir, nos encontramos ante una familia de espirales logarítmicas como las que analizábamos en el capítulo anterior. En las gráficas de la figura 2.17 se muestra en negro la familia de rectas y en colores las espirales logarítmicas que forman las trayectorias de ángulo α para los valores $\alpha = \pi/9, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 9\pi/20$ y el caso límite $\alpha = \frac{\pi}{2}$. $\lhd$

2.5. Líneas equipotenciales en un campo magnético

Continuemos analizando un poco más las trayectorias ortogonales y utilicémoslas para determinar las líneas equipotenciales del campo magnético generado por un imán. La idea principal de este apartado está basada en el contenido de la nota “On the teaching of differential equations” de K. Menger, aparecido en la revista *The American Mathematical Monthly*, págs. 392–397, en el año 1944.

Supongamos que esparcimos un montón de limaduras de hierro sobre un papel y que bajo él colocamos un imán. Las limaduras se mueven y, antes de pararse, cada una tomará una determinada dirección dependiendo de su lugar en el papel. Las limaduras marcan así sobre el papel unas curvas que se denominan líneas de fuerza del (campo magnético del) imán. En realidad (y como ya comentábamos en el primer capítulo), sobre nuestro papel tendremos señalado el campo de direcciones de una cierta ecuación diferencial cuyas soluciones son las líneas de fuerza del imán. La situación queda perfectamente ilustrada en la figura 2.18.

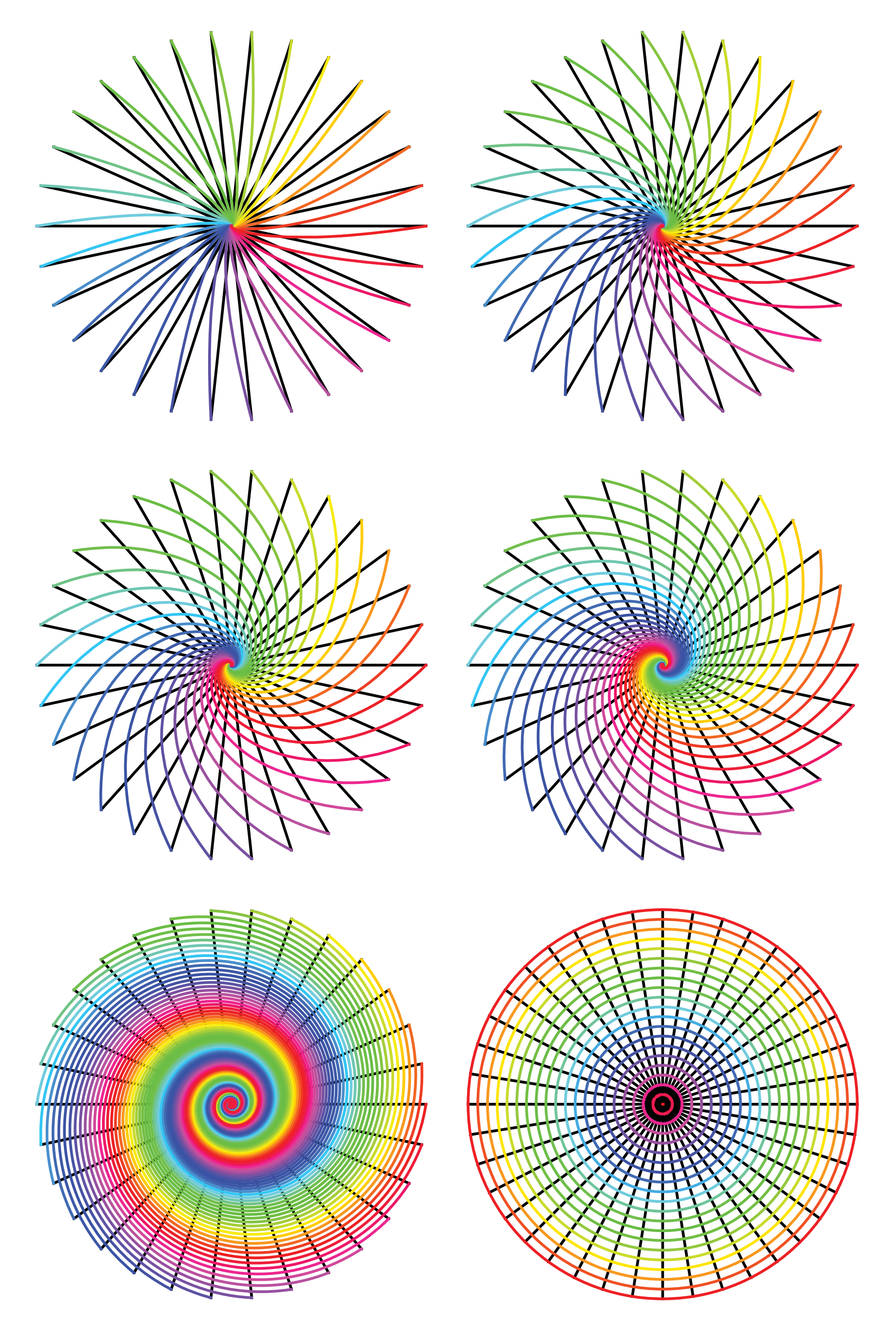


Figura 2.17: En negro hemos trazado las rectas $x = Ct$ y en una gradación de colores las trayectorias ortogonales, de arriba a abajo y de izquierda a derecha, para $\alpha = \pi/9, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 9\pi/20$ y el caso límite $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

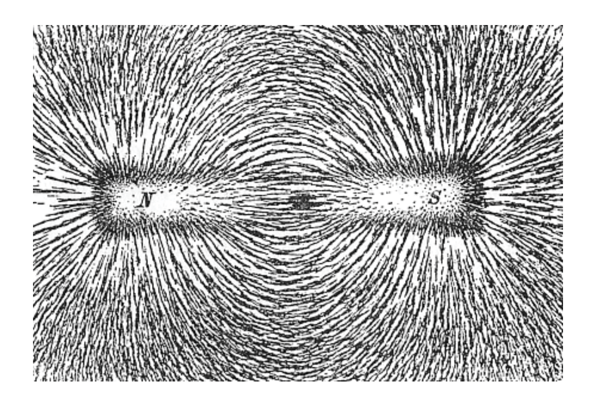


Figura 2.18: El campo de direcciones trazado por el efecto del imán sobre las limaduras de hierro.

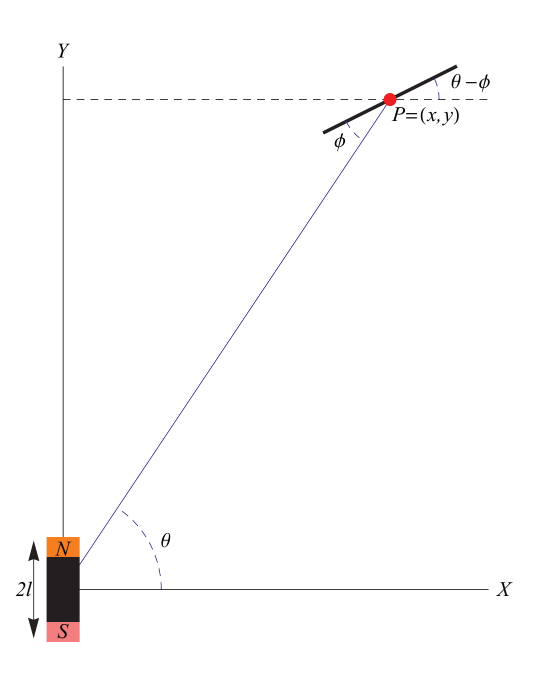


Figura 2.19: Esquema para la obtención de la ecuación diferencial de las líneas de fuerza del imán.

Veamos cómo obtener esa ecuación diferencial. Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas OXY, con su centro O en el centro del imán y con el eje OY pasando por los polos norte N y sur S. Supondremos que N queda situado

en la parte positiva del eje OY y que la longitud del imán es $2l$. Consideremos una pequeña limadura centrada en un punto $P = (x, y)$. Si el radio vector OP (véase la figura 2.19), cuya longitud denotaremos por r, forma un ángulo θ con la horizontal, y la dirección de la limadura forma un ángulo ϕ con OP, podemos suponer que

$$\tan\phi = \frac{1}{2}\cot\theta. \tag{2.4}$$

Esta suposición, que justificaremos más adelante, puede hacerse siempre que la longitud del imán $2l$ sea pequeña en comparación con la longitud del radio vector r. Ahora, observando que la pendiente de la recta tangente a la curva buscada será $\tan(\theta - \phi)$, usando la relación (2.4) y que $\tan\theta = \frac{y}{x}$, tendremos

$$y' = \tan(\theta - \phi) = \frac{\tan\theta - \tan\phi}{1 + \tan\theta\tan\phi} = \frac{\frac{y}{x} - \frac{x}{2y}}{1 + \frac{y}{x}\frac{x}{2y}} = \frac{2y}{3x} - \frac{x}{3y}.$$

Vemos que se trata de una ecuación diferencial homogénea, que con el cambio de función $z = y/x$ se transforma en

$$xz' = -\frac{1}{3}\frac{z^2 + 1}{z},$$

cuya solución general es

$$(z^2 + 1)^3 = \frac{C}{x^2}.$$

Por tanto, las curvas $(x^2 + y^2)^3 = Cx^4$ son las líneas de fuerza del campo magnético producido por el imán.[12]

Es conocido que las líneas equipotenciales de un campo magnético son las trayectorias ortogonales de las líneas de fuerza. En nuestro caso serán las soluciones de la ecuación

$$y' = -\frac{1}{\frac{2y}{3x} - \frac{x}{3y}}.$$

Nuevamente se trata de otra ecuación homogénea. Procediendo como en el caso anterior, llegamos a

$$xz' = -2\frac{z^3 + z}{2z^2 - 1}.$$

Usando una descomposición en fracciones simples obtenemos la solución

$$\frac{(z^2 + 1)^3}{z^2} = \frac{K}{x^4}$$

que, deshaciendo el cambio, se convierte en $(x^2 + y^2)^3 = ky^2$. Esta es la ecuación de las trayectorias ortogonales buscadas.[13] En la figura 2.20 se muestran en azul las líneas de fuerza del campo magnético y en rojo las líneas de igual potencial magnético

[12]Esta familia de curvas tiene una sencilla expresión en coordenadas polares: $r = C\cos^2\theta$.

[13]La ecuación en coordenadas polares también resulta sencilla en este caso: $r = K\sqrt{|\operatorname{sen}\theta|}$.

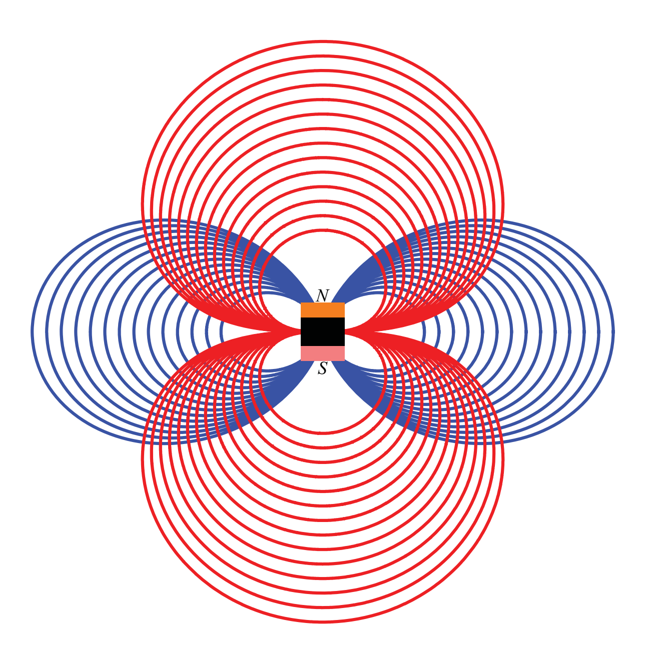


Figura 2.20: En azul las líneas de fuerza del campo magnético y en rojo las líneas equipotenciales.

Veamos ahora cómo justificar la suposición (2.4). Para ello usaremos la figura 2.21. De acuerdo con la ley de atracción entre dos cuerpos, los vectores PQ y PQ' representan dos fuerzas actuando sobre P cuyas magnitudes son proporcionales al inverso del cuadrado de la distancia de P a N y S respectivamente. Aplicando el teorema del coseno a los triángulos $\triangle PNO$ y $\triangle POS$, se verifica que

$$|PQ| = \frac{k}{r^2 + l^2 - 2rl \operatorname{sen}\theta} \qquad \text{y} \qquad |PQ'| = \frac{k}{r^2 + l^2 + 2rl \operatorname{sen}\theta}.$$

Denotaremos $\alpha = \angle RPQ$, $\beta = \angle QRP$ y $w = \angle PQR$. Así, aplicando el teorema del seno al triángulo $\triangle PRQ$, se obtiene la relación

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \frac{|RQ|}{|PQ|},$$

que junto con la identidad trigonométrica

$$\frac{\tan\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha},$$

nos permite llegar a la igualdad

$$\frac{\tan\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)} = \frac{|PQ| - |RQ|}{|PQ| + |RQ|},$$

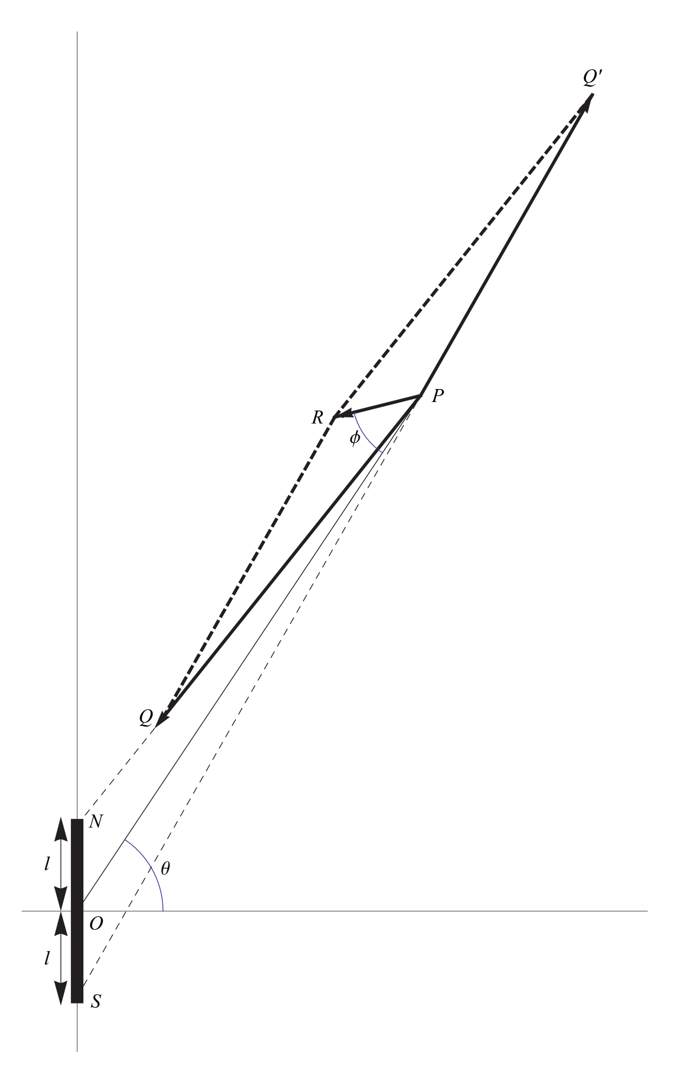


Figura 2.21: Esquema para la comprobación de (2.4).

que, teniendo en cuenta las identidades $\alpha + \beta + w = \pi$ y $|RQ| = |PQ'|$, es equivalente a

$$\tan\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) = \cot\left(\frac{w}{2}\right)\frac{|PQ| - |PQ'|}{|PQ| + |PQ'|}. \tag{2.5}$$

Ahora, resulta sencillo observar que $w = \angle NPS$ y que este ángulo es muy pequeño cuando l es pequeño en comparación con r. Con esto, podemos considerar que $\angle NPO \sim w/2$ y aproximar

$$\cot\left(\frac{w}{2}\right) \sim \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right)} \sim \frac{1}{\operatorname{sen}(\angle NPO)} = \frac{r}{l\cos\theta},$$

donde en el último paso hemos aplicado el teorema del seno al triángulo $\triangle PNO$. Así mismo

$$\frac{|PQ| - |PQ'|}{|PQ| + |PQ'|} = \frac{4krl \operatorname{sen} \theta}{2k(r^2 + l^2)} \sim \frac{2l \operatorname{sen} \theta}{r},$$

donde hemos eliminado l^2 por ser pequeño respecto a r^2. Con las dos expresiones anteriores deducimos que (2.5) se transforma

$$\tan \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \sim 2 \tan \theta.$$

De una manera similar tenemos que $\phi \sim \alpha + w/2 = (\pi - (\beta - \alpha))/2$ y esto nos permite comprobar que

$$\tan \phi \sim \cot \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)$$

y concluir la prueba de (2.4).

2.6. El diseño de una palanca

Para concluir este capítulo, veamos una interesante cuestión resoluble mediante ecuaciones diferenciales sobre el diseño de una palanca patentado por un ingeniero español. Presentamos la propuesta que de la misma se hizo en el Problema 117 de la *La Gaceta de la RSME* (vol. **11.4** (2008), pág. 694), planteado por Javier del Rey Pantín:

> ¿Cómo debe ser el perfil de una palanca para que la fuerza que trasmite al peso que desea desplazar, tenga en todo momento la dirección de la vertical? O bien, más concretamente: supongamos que una palanca rígida tiene su punto de apoyo en el origen de coordenadas, que la dirección de la vertical es la del eje OY, y que sobre el perfil de la palanca puede deslizarse sin rozamiento un objeto puntual pesado. Encontrar una ecuación para dicho perfil de modo que, al girar la palanca, el objeto pesado, situado inicialmente en un punto de coordenadas $(a, 0)$ pase a ocupar la posición $(a, -h)$, con $h > 0$, manteniéndose siempre sobre la recta vertical $x = a$. En la figura 2.22 se muestra un perfil que tiene la forma que estamos buscando.

Este planteamiento está inspirado por la patente 15715 registrada en la *Oficina Española de Patentes y Marcas* en 1894 por el ingeniero Darío Bacas Montero.[14]

Analíticamente el problema puede plantearse de la siguiente manera: determinar la ecuación de la curva que, al girar en torno al origen de coordenadas, tenga tangente horizontal en $x = a$, para cualquiera que sea el ángulo de giro.

[14]Puede verse en el anexo a su biografía. *Darío Bacas Ingeniero Naval 1845–1913*, realizada por P. Bacas y publicada por la Diputación de Cáceres en 1998.

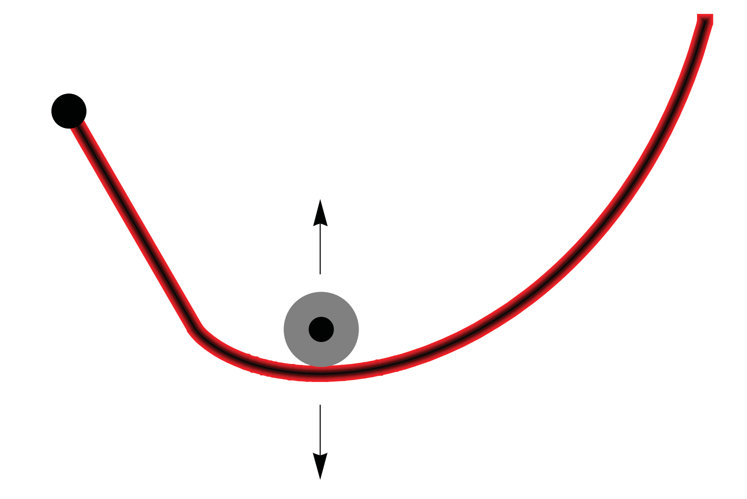


Figura 2.22: La imagen muestra un perfil curvo del tipo solicitado.

El razonamiento para obtener la curva lo haremos sobre la figura 2.23. Supongamos que $y = f(x)$ es la ecuación de la curva que deseamos determinar, pasando por el punto $A = (a, 0)$ en el que tiene tangente horizontal. Esta curva aparece en rojo en el diagrama. Sea $P = (x, y)$ un punto de la curva y PQ la recta tangente a ella en P, que forma un cierto ángulo α con la horizontal. Si efectuamos un giro centrado en O de amplitud α en el sentido horario, la curva inicial se trasformará en la azul y la recta PQ en la recta $P'Q'$. Además, la recta $P'Q'$ es la tangente horizontal a la curva azul en el punto P'. Sean $\beta = \angle QOP$ y $\gamma = \angle OPQ$. Por nuestra construcción resulta evidente que $\alpha = \beta + \gamma$ y $\tan\beta = y/x$. Usando que $|OA| = a$ y que $|OP'| = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$, podemos deducir que $\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y, por tanto,

$$\tan\gamma = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{a}.$$

De este modo tenemos la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} y' &= \tan\alpha \\ &= \tan(\beta + \gamma) \\ &= \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma} \\ &= \frac{\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a}}{1 - \frac{y}{x}\frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a}} \\ &= \frac{ay + x\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{ax - y\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

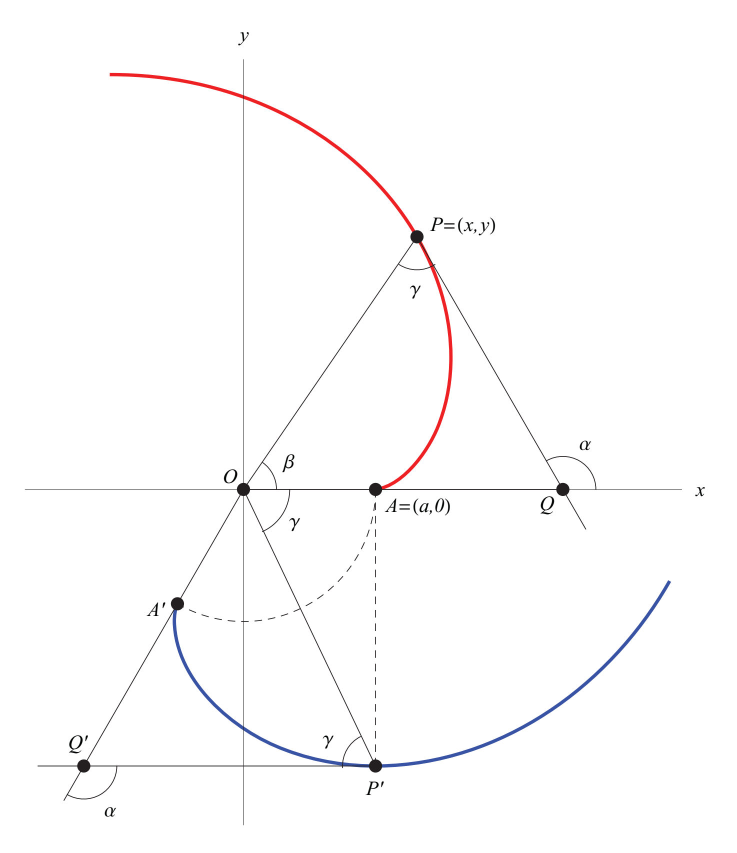


Figura 2.23: Esquema para la obtención del perfil de la palanca.

En este caso no se trata de ninguno de los tipos de ecuaciones que hemos aprendido a resolver hasta ahora. Sin embargo, la forma de la ecuación nos permite pensar que, tal vez, un cambio a coordenadas polares simplifique la cuestión. Tomando $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, con $r = r(\theta)$, la ecuación se transforma en

$$\frac{\operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta}{\cos\theta\frac{dr}{d\theta} - r\operatorname{sen}\theta} = \frac{a\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\sqrt{r^2-a^2}}{a\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\sqrt{r^2-a^2}},$$

que puede reescribirse como

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{ar}{\sqrt{r^2-a^2}}.$$

Esta nueva ecuación sí es de variables separadas, y podemos obtener sin dificultad que

$$\theta = \frac{1}{a}\sqrt{r^2-a^2} - \arccos\left(\frac{a}{r}\right) + A$$

De esta forma las ecuaciones paramétricas de la familia de curvas solución son

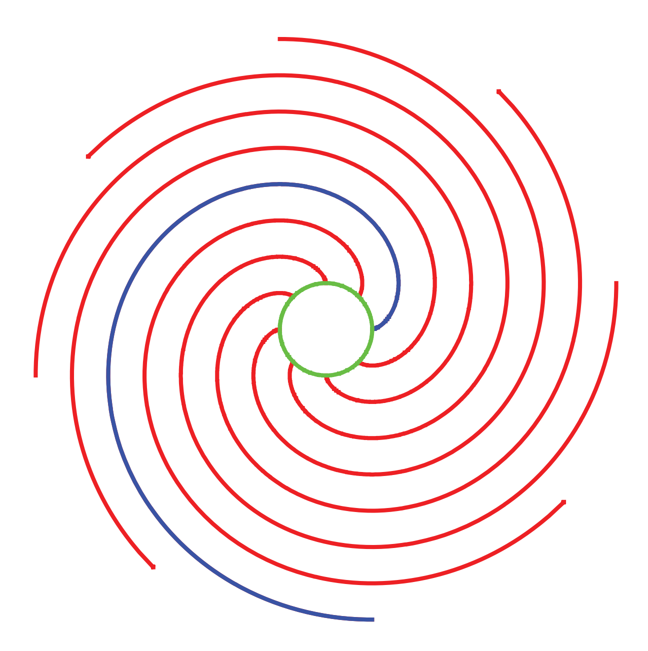


Figura 2.24: Algunas curvas de la familia que soluciona la ecuación diferencial asociada al perfil de la palanca; en azul la correspondiente a $A = 0$, en verde aparece la circunferencia de la que parten todas ellas.

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t) \cos A - a(\operatorname{sen} t - t \cos t) \operatorname{sen} A \tag{2.6}$$

e

$$y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t) \cos A + a(\cos t + t \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} A, \tag{2.7}$$

donde hemos tomado el parámetro $t = \sqrt{r^2 - a^2}/a$ (por supuesto $r \geq a$, puesto que la distancia del origen a cualquier punto de la curva siempre será mayor que a, y $t \geq 0$). Cada miembro de esta familia corresponde con un giro, centrado en el origen y de amplitud A en sentido horario, de la curva

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t) \qquad \text{e} \qquad y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$$

que se corresponde con $A = 0$. Estas curvas se denominan *evolventes de la circunferencia*. Las evolventes de una curva dada C son una familia de curvas cuyas rectas normales son las tangentes de la curva dada inicialmente. Algunos elementos de la familia de curvas se muestran en la figura 2.24, estando la correspondiente a $A = 0$ coloreada en azul. Estas curvas siempre se encuentran para $t = 0$ sobre la circunferencia de radio a.

Veamos que, efectivamente, las curvas descritas por (2.6) y (2.7) son las evolventes de la circunferencia de radio a. Para ello basta comprobar que las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada por (2.6) y (2.7) son las

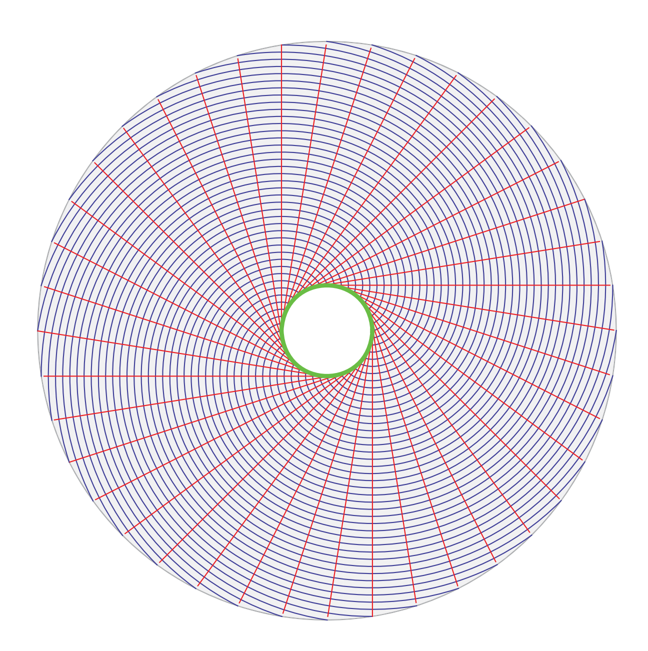


Figura 2.25: La familia de curvas que describen el perfil de la palanca en azul y en rojo sus trayectorias ortogonales, la familia de rectas tangentes a la circunferencia de radio a.

rectas tangentes a la circunferencia de radio a. Este fenómeno se ilustra en la figura 2.25.

Siguiendo lo analizado sobre trayectorias ortogonales de curvas dadas en coordendas polares, tenemos que la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es

$$-a\frac{dr}{d\theta} = r\sqrt{r^2 - a^2},$$

ecuación de variables separadas de solución general

$$\theta = -\arccos\left(\frac{a}{r}\right) + B.$$

Las ecuaciones paramétricas de las trayectorias ortogonales son, entonces

$$x = a\cos B + \sqrt{r^2 - a^2}\,\operatorname{sen} B \qquad \text{e} \qquad y = a\operatorname{sen} B - \sqrt{r^2 - a^2}\cos B.$$

Multiplicando la primera por $\cos B$, la segunda por $\operatorname{sen} B$ y sumando para eliminar el parámetro r, llegamos a la expresión

$$x\cos B + y\operatorname{sen} B = a$$

que es la familia de rectas tangentes a la circunferencia de centro el origen y radio a.

2.7. Problemas

2.7.1. Problemas sobre modelos poblacionales

Problema 30. Analizar el comportamiento de la población mundial usando los modelos exponencial y logístico, para ello considerar el parámetro k apareciendo en las ecuaciones diferenciales involucradas como $k = 0,029$[15] y los siguientes datos

Año	Población (en miles de millones 10^9)
1900	1,65
1910	1,75
1920	1,86
1930	2,07
1940	2,30
1950	2,52
1960	3,02
1970	3,70
1980	4,45
1990	5,30
2000	7,29

Problema 31. Denotaremos por T el tiempo que una población necesita para duplicar su número de miembros. Probar que en el caso del modelo exponencial este valor existe, siempre y cuando el número de nacimientos sea mayor que el de defunciones, y determinarlo. Analizar la misma cuestión en el caso del modelo logístico.

Problema 32. Otra interesante propiedad de la curva logística es que su punto de inflexión, en los casos en los que $P_0 < P_\infty$, está sobre la recta $P = P_\infty/2$ para cualquier valor del parámetro k. Probar este hecho.

Problema 33. Supongamos que una población P crece de acuerdo con la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right).$$

Si $P(t_1) = p_1$, $P(t_1 + \tau) = p_2$ y $P(t_1 + 2\tau) = p_3$, probar que

$$P_\infty = \frac{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3} - \frac{2}{p_2}}{\frac{1}{p_1 p_3} - \frac{1}{p_2^2}}.$$

[15]Este dato es una estimación de ciertos grupos ecologistas y está tomado del artículo "Modelos matemáticos en Biología: un viaje de ida y vuelta" de Renato Álvarez Nodarse y puede obtenerse en `http:/euler.us.es/~renato/`. Este trabajo contiene, en su primera parte, un interesante análisis de los modelos de dinámica de poblaciones.

Problema 34. Consideremos una población susceptible a una determinada epidemia. La población crece en función de una ecuación logística de la forma

$$\frac{dP}{dt} = k_1 P\left(1 - \frac{P}{P_{\infty,1}}\right) \tag{2.8}$$

y sufre un brote epidémico cuando ha llegado a un cierto valor de población $Q < P_{\infty,1}$. A partir de ese momento la población pasa a estar gobernada por la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = k_2 P\left(1 - \frac{P}{P_{\infty,2}}\right)$$

con $k_2 < k_1$ y $P_{\infty,2} < P_{\infty,1}$. Suponemos que $Q > P_{\infty,2}$, lo que implica que la población comienza a decrecer a causa de la epidemia hasta un cierto valor q, con $q > P_{\infty,2}$, y en ese momento cesa la epidemia. A partir de ese instante, la población vuelve a estar regida por la ecuación (2.8) hasta un nuevo ataque de la epidemia. Es claro que la población va a oscilar entre los valores q y Q con un periodo $T = T_1 + T_2$, donde T_1 representa la duración de la parte del ciclo en el cual la población crece de q a Q y T_2 la parte inversa del ciclo.

Probar que

$$T_1 = \frac{1}{k_1}\log\frac{Q(P_{\infty,1} - q)}{q(P_{\infty,1} - Q)} \quad \text{y} \quad T_2 = \frac{1}{k_2}\log\frac{q(Q - P_{\infty,2})}{Q(q - P_{\infty,2})}.$$

Problema 35. Los modelos utilizados en dinámica de poblaciones tienen, en general, la forma

$$\frac{dP}{dt} = P(t)f(P(t))$$

para ciertas funciones f. El caso del modelo exponencial corresponde a la elección $f(P(t)) = k$ y el del modelo logístico a $f(P(t)) = k\left(1 - \frac{P(t)}{P_\infty}\right)$.

a) La elección de la función $f(P(t)) = (a - b\log P(t))$ da lugar a lo que se denominan *curvas de Gompertz*. Resolver la ecuación diferencial a que da lugar esta función y analizar el comportamiento de las soluciones.

b) Considerando la elección $f(P(t)) = kP(t)^q$, con $q > 0$, obtenemos lo que se llaman *doomsday models*.[16] Obtener las soluciones de la ecuación diferencial en esta situación y, usando la tabla de población mundial del Problema 30, determinar que el *doomsday* será el día 12 de septiembre de 2016.

c) Obtener las soluciones de la ecuación diferencial si consideramos $f(P(t)) = k(1 - bP(t))(1 - cP(t))$, con $k, b, c > 0$.

[16]La traducción sería algo así como *modelos del día del juicio final*; ante este nombre tan tétrico, creo que mejor lo dejamos en inglés, que siempre es posible que alguien no lo entienda.

Problema 36. Supongamos que el número de nacimientos en una cierta población es proporcional al cuadrado del número de individuos de la población, con una cierta constante $a > 0$, y que el número de fallecimientos es proporcional al número de individuos de la población, con una cierta constante $b > 0$. Probar que si la población inicial es menor que b/a, ésta tiende a la extinción. El valor b/a se denomina tamaño crítico de la población. Cuando la población se encuentra muy próxima a ese valor se dice que la especie está en peligro de extinción.

Problema 37. Supongamos una cierta población que crece según un modelo logístico y en la que se efectúan recolecciones (podemos imaginarnos una piscifactoría en la que frecuentemente se recolecta pescado). La ecuación diferencial que modeliza esta situación es

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - h,$$

donde $h > 0$ indica la cuota de recolección, con r y K constantes positivas.

a) Supongamos que $h = \frac{rK}{4}$ (este valor es el denominado límite máximo de sostenibilidad). Determinar el comportamiento de la población a largo plazo si $P(0) = P_0 \neq \frac{K}{2}$.

b) Probar que si $h > \frac{rK}{4}$ (es decir, si la recolección está por encima del límite máximo de sostenibilidad) y $P(0) = P_0 > 0$, la población se comporta como

$$P(t) = \sqrt{\frac{K\left(h - \frac{rK}{4}\right)}{r}} \tan\left(\theta_0 - t\frac{r\left(h - \frac{rK}{4}\right)}{K}\right)$$

siendo

$$\theta_0 = \left(x_0 - \frac{K}{2}\right)\sqrt{\frac{K\left(h - \frac{rK}{4}\right)}{r}}.$$

Estudiar el comportamiento a largo plazo de la población.

Problema 38. Muchas de las constantes que aparecen en los modelos de poblaciones, tanto en el exponencial como el logístico, pueden considerarse variables con el tiempo. Este fenómeno tiene su interpretación en cada caso.

a) Supongamos que en el modelo exponencial sustituimos la constante de proporcionalidad por el factor αe^{-at}, con $a > 0$. Este factor sugiere que el crecimiento de la población, en el supuesto de que $\alpha > 0$, se va haciendo más lento con el paso del tiempo. Determinar la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = \alpha e^{-at} P, \\ P(t_0) = P_0. \end{cases}$$

Analizar el comportamiento a largo plazo de la solución.[17]

b) Supongamos que en el modelo logístico cambiamos la constante de proporcionalidad por la función $\alpha \operatorname{sen}(\omega t)$. La introducción de esta función nos permite analizar un crecimiento poblacional en el que intervienen factores estacionales. Determinar la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = \alpha \operatorname{sen}(\omega t) P \left(1 - \dfrac{P}{P_\infty}\right), \\ P(t_0) = P_0. \end{cases}$$

Dibujar algunas gráficas de la solución con una conveniente elección de los parámetros.

c) Tomemos en el modelo logístico el tope de población admisible, P_∞, de la forma αe^{-t}. Este factor reflejará un deterioro progresivo del entorno de la población. Obtener la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP \left(1 - \dfrac{P}{\alpha e^{-t}}\right), \\ P(t_0) = P_0. \end{cases}$$

(Para intentar resolver este problema de valores iniciales puedes hacer el cambio de función $P(t) = e^{-t} w(t)$.)

2.7.2. Descomposición radiactiva y datación con carbono radiactivo

Si una molécula tiene tendencia a descomponerse espontaneamente en moléculas menores, a un ritmo no afectado por la presencia de otras sustancias, es natural suponer que el número de moléculas que se descompondrán en una unidad de tiempo, será proporcional al número total presente. Una reacción química de este tipo se denomina *reacción de primer orden* y, si $x(t)$ denota la cantidad de sustancia presente en un instante, se modeliza mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

con $k > 0$. La constante k se denomina tasa de decaimiento. La reacción de primer orden que se conoce es la descomposición radiactiva.

La ecuación anterior es la pieza fundamental en el proceso de *datación con carbono radiactivo* o *datación con* ^{14}C desarrollado a principios de los años cincuenta del siglo pasado por el químico estadounidense W. F. Libby y por lo que recibió el premio Nobel de Química en 1960. De un modo breve, los

Willar Frank Libby (1908–1980).

[17] Este tipo de ecuaciones también suelen denominarse *ecuaciones de Gompertz* o *ecuaciones de tipo Gompertz*. Modelizan el crecimiento en laboratorio de un tumor al que se suministran recursos ilimitados. Resulta sorprendente observar que a pesar de ello su crecimiento se estabiliza.

hechos y los principios involucrados son estos: el ^{14}C se produce por el choque de los neutrones de los rayos cósmicos con el nitrógeno de la atmósfera. Ese ^{14}C se convierte en dióxido de carbono que, a su vez, se mezcla, por acción del viento, con el dióxido de carbono presente en el aire. Puesto que el ^{14}C formado se descompone continuamente en nitrógeno, su proporción con respecto al carbono ordinario (^{12}C) ha alcanzado, desde hace mucho tiempo, un estado de equilibrio. Todas las plantas que respiran aire incluyen esa proporción de ^{14}C en sus tejidos, del mismo modo que los animales que consumen esas plantas. Esta proporción permanece constante mientras el animal o la planta vive. Sin embargo, al morir, los distintos organismos dejan de absorber ^{14}C mientras que la descomposición de éste no se interrumpe. Mediante la medición del nivel actual de ^{14}C en un objeto elaborado a partir de organismos vivos y conociendo los niveles habituales de ^{14}C en dichos organismos, se puede datar la edad del objeto. El procedimiento exacto se analiza en el Problema 42. La fiabilidad del método se ha verificado analizando objetos cuya antigüedad es conocida de manera independiente (muebles de tumbas antiguas, fragmentos de secoyas gigantes, etc.). El proceso se ha mostrado eficaz en la datación de piezas de no más de 50000 años.

Problema 39. Se llama vida media de un elemento radiactivo, y la denotaremos por τ, al tiempo necesario para que una cantidad inicial dada se reduzca a la mitad. Probar que

$$\tau = \frac{\log 2}{k}.$$

Si en 25 años se ha desintegrado un 1,1 % de una sustancia radiactiva, ¿cuál es la vida media de la sustancia?

Problema 40. ¿Qué porcentaje de una sustancia radiactiva quedará después de 100 años si su vida media es de 1000 años?

Problema 41. El fósforo radiactivo, con una vida media de 14,2 días, se utiliza como trazador en estudios bioquímicos. Después de un experimento con 8 gramos de este tipo de fósforo, los investigadores deben almacenarlo de manera segura hasta que sólo queden 10^{-5} gramos. ¿Cuánto tiempo deben guardar los recipientes?

Problema 42. En 1950 se utilizó un contador Geiger[18] para medir la tasa de desintegración del ^{14}C de un trozo de carbón vegetal encontrado en una cueva de cerca de Lascaux (Francia), donde hay murales con pinturas rupestres. El contador registró aproximadamente 1,69 desintegraciones por minuto y por gramo de carbono, en tanto que para el tejido vivo (la madera del árbol que se utilizó para obtener el carbón vegetal) este valor es de 13,5. Veamos cómo datar las cuevas de Lascaux con estos datos.

En cualquier organismo vivo la cantidad de ^{14}C y la cantidad de carbono en las células es la misma que en el aire. Después de que muere un organismo

[18] Un aparato que mide la radiactividad de determinadas sustancias, contando mediante impulsos eléctricos el número de partículas α y β emitidas.

cesa la ingestión de CO_2 y sólo prosigue la desintegración radiactiva. Se sabe que la vida media del ^{14}C es de 5568 años. Supongamos que $q(t)$ es la cantidad de ^{14}C por gramo de carbono en el instante t en la muestra de carbón vegetal. Consideremos que este instante corresponde a $t = 0$ y que $t = T < 0$ es el instante en que se quemó la madera. Se supone claro que $q(t) = q(T)$ para $t < T$.

a) Supongamos la cantidad de ^{14}C por gramo de carbono en la muestra, en $t = 0$, es q_0. Comprobar que en el intervalo $T \leq t \leq 0$, $q(t)$ es la única solución hacia atrás en el tiempo del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -kq, \\ q(0) = q_0. \end{cases}$$

b) Resolviendo el problema de valores iniciales del problema anterior, obtener que

$$T = -\frac{1}{k} \log \frac{q_T}{q_0} = -\frac{\tau}{\log 2} \log \frac{q'(T)}{q'(0)}, \tag{2.9}$$

donde $q_T = q(T)$, k es la tasa de desintegración y τ la vida media para el ^{14}C.

c) Sabiendo que la lectura del contador de Geiger en un instante t es proporcional a $q'(t)$, la tasa de decaimiento de los núcleos radiactivos en una muestra, usar todo lo que hemos desarrollado para datar las cuevas de Lascaux.

Problema 43. Sea p la proporción de ^{14}C restante en una muestra actual de un organismo que murió en un instante $t = T \leq 0$, donde suponemos que $t = 0$ es el momento actual. Probar que en ese caso

$$T = \frac{1}{k} \log p.$$

Problema 44. La datación con ^{14}C es un proceso extremadamente delicado. Supongamos que se sabe que la proporción de ^{14}C en una muestra se mueve en el rango $0.99p$ a $1.01p$. ¿Cuál es el intervalo de posibles dataciones de la muestra?

Problema 45. En el año 1988 tres laboratorios independientes ubicados en Arizona, Oxford y Zurich, dataron la denominada *Sábana Santa* de Turín. A partir de fibras extraídas de la *reliquia* obtuvieron que el nivel de ^{14}C en ella era un 92 % del nivel correspondiente al organismo vivo.[19] ¿Es la *Sábana Santa* realmente el sudario de Jesucristo?

[19]Estamos hablando de fibras de lino.

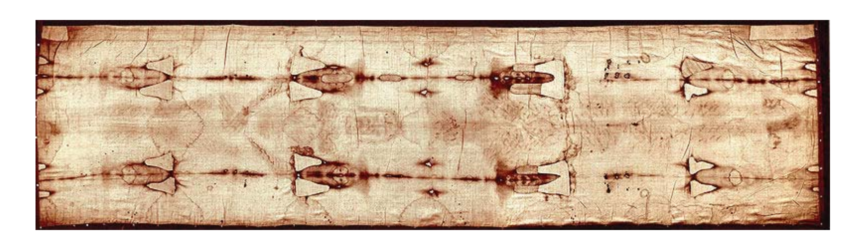


Figura 2.26: Una imagen de la *Sábana Santa* de Turín tomada de la *Wikipedia*.

Problema 46. En el año 1947, cierta colección de papiros que incluía la versión manuscrita más antigua del Antiguo Testamento fue hallada junto al mar Muerto. La colección recibe el nombre de *Manuscritos del mar Muerto* o *Rollos de Qumrán* (llamados así por haberse encontrado los rollos en una gruta situada en Qumrán). La funda de lino que contenía el libro de Isaías fue datada en 1994 usando técnicas de ^{14}C. Las mediciones efectuadas indicaron que el nivel de ^{14}C variaba entre el 75 % y el 77 % del ^{14}C inicial. ¿Cuál es el intervalo de fechas en que posiblemente fue escrito el papiro?[20]



Figura 2.27: Una imagen de los Manuscritos del Mar Muerto, conservados en Israel. Se trata, en concreto, de las columnas 2-4 del denominado *Manual de disciplina*.

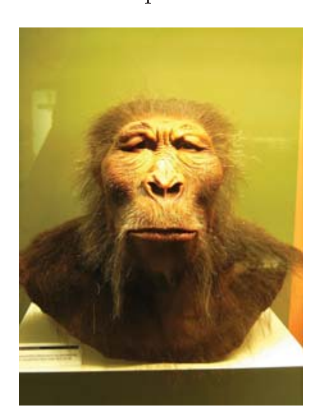
Problema 47. *El cráneo de Olduvai: datación con potasio, argón y calcio.*[21] El desfiladero de Olduvai, en Tanzania, corta flujos y cenizas volcánicas, así como

[20]La cantidad de ejemplos que se han analizado con ^{14}C es inmensa pero desgraciadamente nuestro espacio en estas notas es finito. Por esta razón se nos quedan fuera ejemplos tan interesantes con la datación del conjunto prehistórico de Stonehenge o la certificación de que la *Tabla del Rey Arturo* existente en Gran Bretaña es tan falsa como la *Sábana Santa*.

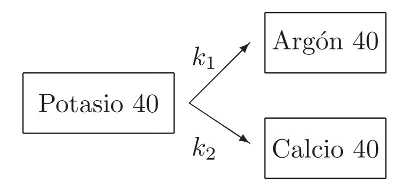
[21]Existen diversos procedimientos de datación basados en la descomposición de sustancias químicas. En el libro “Ecuaciones diferenciales y aplicaciones” de M. Braun se analiza la datación basada en la desintegración de isótopos radiactivos de polonio y radio. El proceso se aplica, en el citado libro, a la detección de falsificaciones de obras de arte.

depositos sedimentarios. Es un yacimiento arqueológico de huesos y artefactos de los primeros homínidos, considerados, por algunos arqueólogos, los precursores del hombre actual. En 1959, se descubrieron un cráneo de homínido fosilizado y herramientas de piedra primitivas de gran antigüedad. El método de datación con ^{14}C resulta inapropiado en estos casos, y se procedió a realizar la datación basándose en los estratos volcánicos situados encima y debajo de la zona del hallazgo. El método utilizado se basa en la desintegración del potasio (K) en argón (Ar) y calcio (Ca). En este caso se trata de un proceso de acumulación, lo contrario que para el ^{14}C. Procedemos, a continuación, a describir su funcionamiento.

El cráneo de Olduvai hallado en 1959 fue el primer resto fósil de la especie de homínidos denominada *Paranthropus boisei* y apareció en el registro fósil correspondiente a sedimentos del Pleistoceno. La imagen inferior muestra una recreación de un homínido de esta especie.



El ^{40}K experimenta una desintegración radiactiva a ^{40}Ar y a ^{40}Ca en tasas proporcionales a la cantidad de potasio presente, pero con distintas constantes de proporcionalidad k_1 y k_2. El diagrama de cajas que aparece a continuación ilustra esta situación.



El modelo para este proceso de desintegración radiactiva puede describirse en términos de las cantidades $K(t)$, $A(t)$ y $C(t)$ de potasio, argón y calcio en una muestra de roca. La ley de equilibrio nos lleva el sistema

$$\begin{aligned} K' &= -(k_1 + k_2)K, \\ A' &= k_1 K, \\ C' &= k_2 K, \end{aligned}$$

donde el tiempo avanzará, en nuestro problema particular de Olduvai, desde el instante en que se depositaron las cenizas volcánicas alrededor del cráneo.[22]

a) Resuelve el sistema anterior en términos de k_1 y k_2. Si añadimos las condiciones iniciales $K(0) = K_0$ y $A(0) = C(0) = 0$, ¿por qué se tiene que

$$K(t) + A(t) + C(t) = K_0$$

para todo $t > 0$? Analiza el comportamiento a largo plazo de las tres sustancias.

b) La edad T del estrato volcánico es el valor actual de la variable temporal t, puesto que la desintegración del potasio comenzó cuando se sedimentó el

[22] Observad que estamos suponiendo que el ^{40}Ar y ^{40}Ca, también radiactivos, se descomponen en otros elementos en periodos de tiempo lo suficientemente grandes como para considerar que esencialmente no existe pérdida de ellos en el intervalo de tiempo involucrado.

material volcánico. Esta edad se determina a partir de la proporción entre argón y potasio en una muestra. Prueba que dicha proporción es

$$\frac{A}{K} = \frac{k_1}{k_1 + k_2}(e^{(k_1+k_2)T} - 1).$$

c) Cuando se hicieron las mediciones reales en la Universidad de California, en Berkeley, se estimó que la edad del cráneo de Olduvai era $T = 1,75$ millones de años. Sabiendo que $k_1 = 5.76 \times 10^{-11}$ por año y que $k_2 = 4,85 \times 10^{-10}$ por año, determina la proporción medida A/K.

2.7.3. Problemas sobre ecuaciones en variables separadas y ecuaciones homogéneas

Problema 48. *Ecuaciones reducibles a ecuaciones de variables separadas.* Consideremos la ecuación

$$x' = f(ax + bt + c).$$

Probar que el cambio de función $z = ax+bt+c$ transforma la ecuación propuesta en otra de variables separadas. Aplicar esta técnica para resolver las ecuaciones

$$\text{a) } x' = \operatorname{sen}^2(t - x + 1) \quad \text{y} \quad \text{b) } e^{-x}(x' + 1) = te^t.$$

Problema 49. *Una caracterización para ecuaciones de variables separadas.* Sea $f(t, x)$ una función no nula de clase C^2. Probar que la ecuación $x' = f(t, x)$ es de variables separadas si y sólo si

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f(t,x)}\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right) = 0.$$

Problema 50. *Una caracterización para ecuaciones reducibles a ecuaciones de variables separadas.* Sea $f(t, x)$ una función de clase C^2. Probar que la ecuación $x' = f(t, x)$ es del tipo $x' = g(at + bx + c)$, para una cierta función g y para constantes reales a, b y c, si y sólo si la función

$$u(t,x) = \frac{\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial t}}{\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}}$$

satisface que

$$\frac{1}{u(t,x)}\left(\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2\right) = 0.$$

Problema 51. Determinar la forma de la trayectoria del vuelo de un ganso que vuela hacia su nido a una velocidad constante b. Suponer que sopla un viento del sudeste de magnitud $b/\sqrt{2}$ y que el ganso parte de un punto al oeste del nido situado a una distancia a del nido en línea recta. ¿Llegará el ganso al nido?

Problema 52. Sean α, β y γ números reales no nulos. Consideramos la ecuación diferencial

$$x' = t^{\gamma-1} h\left(\frac{x^\beta}{t^\alpha}\right).$$

a) Determinar una condición sobre α, β y γ que nos permita asegurar que al aplicar el cambio de función $x = w^\gamma$ a la ecuación propuesta se transforma en una ecuación homogénea.

b) Utilizando el apartado anterior, determinar la solución general de la ecuación

$$x' = -\frac{2t\sqrt{x}}{t + \sqrt{x}}.$$

Problema 53. *Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas.* Consideremos las ecuaciones del tipo

$$x' = f\left(\frac{ax + bt + c}{a_1 x + b_1 t + c_1}\right). \tag{2.10}$$

a) Probar que si $ab_1 - ba_1 \neq 0$, entonces existen constantes h y k tales que el cambio de variable y función $x = \overline{x} + h$, $t = \overline{t} + k$, transforma la ecuación (2.10) en una ecuación diferencial homogénea.

b) Probar que si $ab_1 - ba_1 = 0$, entonces el cambio de función $z = ax + bt$ transforma (2.10) en una ecuación de variables separadas.

Aplicar estos métodos para resolver las ecuaciones siguientes:

a) $x' = \dfrac{-x + t + 1}{x + t + 3}$, b) $x' = \dfrac{x + t + 3}{4x - 2t + 6}$, c) $x' = \dfrac{x - t - 1}{x - t - 3}$.

Problema 54. *Ecuaciones homogéneas generalizadas.* Se denominan así las ecuaciones del tipo

$$F\left(\frac{x}{t}, x'\right) = 0.$$

Para resolverlas supondremos que la curva $F(\alpha, \beta) = 0$ admite una parametrización de la forma

$$\alpha = \alpha(s), \quad \beta = \beta(s), \quad s \in I.$$

Efectuando el cambio

$$x = \alpha(s)t \quad \text{y} \quad x' = \beta(s)$$

determinaremos una solución paramétrica de la ecuación. Usando que $x' = \beta(s)$ obtendremos que

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = \beta(s)\frac{dt}{ds}.$$

Derivando respecto a s la igualdad $x = \alpha(s)t$ llegamos a que

$$\frac{dx}{ds} = \alpha(s)\frac{dt}{ds} + \alpha'(s)t.$$

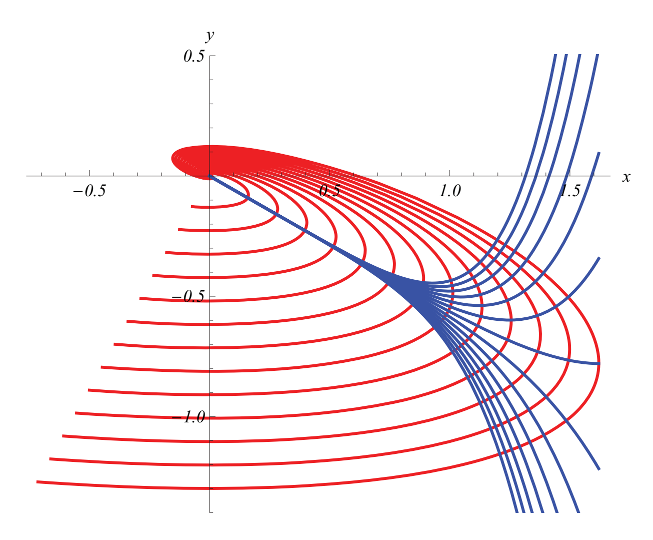


Figura 2.28: En azul se muestran algunas curvas de la familia propuesta en el Problema 56. Las curvas en rojo son las trayectorias ortogonales solicitadas.

Identificando estas ecuaciones llegamos a la ecuación de variables separadas

$$\frac{dt}{ds} = \frac{t\alpha'(s)}{\beta(s) - \alpha(s)},$$

de donde obtendremos $t = t(s)$, y la expresión para x será $x = \alpha(s)t(s)$.

Aplicar esta técnica para resolver las ecuaciones

$$\text{a) } (tx')^2 = t^2 + x^2 \quad \text{y} \quad \text{b) } (tx')^2 = t^2 - x^2.$$

2.7.4. Problemas geométricos

Problema 55. Hallar las trayectorias ortogonales a las familias de curvas

a) $x = at^2$, b) $x = Ce^t$, c) $tx = C$, d) $x^2(C - t) = t^3$, e) $t^2 - x^2 = Ct$.

Problema 56. Determinar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $4x + 7y = cx^{25/4}$. La familia de curvas y sus trayectorias ortogonales pueden verse en la figura 2.28.

Problema 57. Hallar el valor de n para que las curvas $t^n - x^n = c$ sean las trayectorias otogonales de la familia de curvas

$$x = \frac{t}{1 - bt}.$$

Problema 58. Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de cardioides dada en coordenadas polares por $r = c(1 + \cos\theta)$. En la figura 2.29 se muestra la familia de cardioides y sus trayectorias ortogonales.

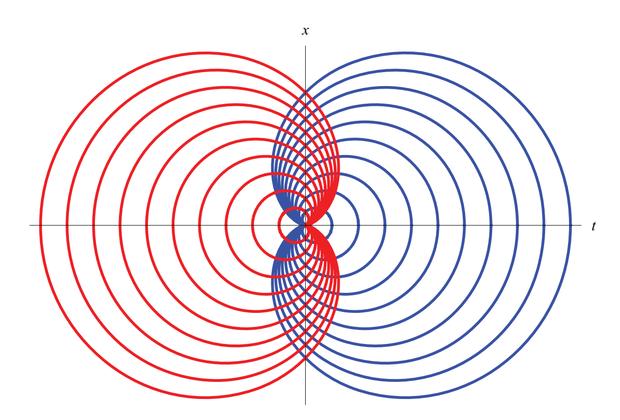


Figura 2.29: El dibujo muestra en azul la familia de curvas propuesta en el Problema 58, cada una de esas curvas se denomina cardioide. En rojo se han trazado las trayectorias ortogonales, que forman otra familia de cardioides pero girada 180° respecto de la anterior.

Problema 59. Consideramos la familia de curvas $(2a - t)x^2 - t^3 = 0$.

a) Determinar la ecuación diferencial que satisface la familia de curvas.

b) Encontrar la familia de trayectorias ortogonales.

La familia de curvas y sus trayectorias ortogonales se muestran en la figura 2.30.

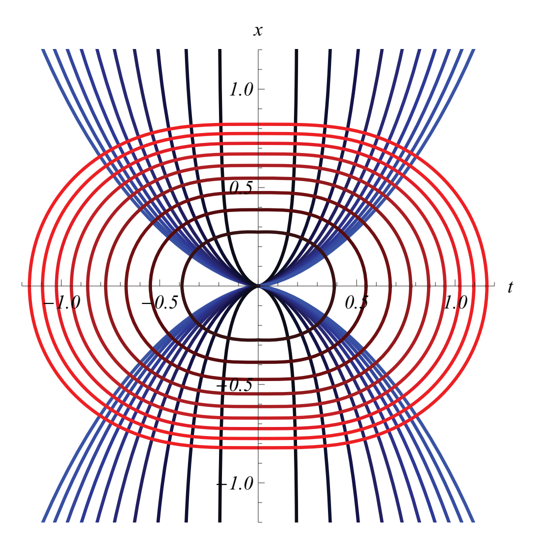


Figura 2.30: En gradación de azul se muestran algunas curvas de la familia propuesta en el Problema 59 (cada una de ellas tiene dos ramas). Las curvas en gradación de rojo son las trayectorias ortogonales solicitadas.

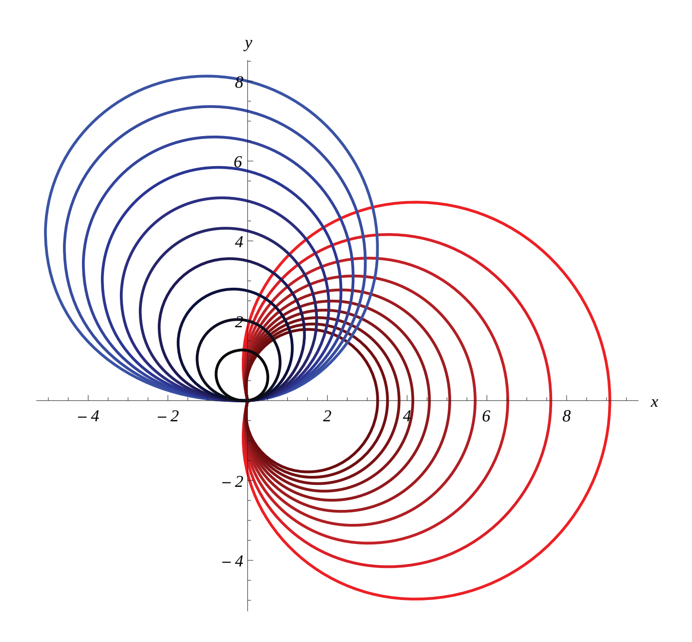


Figura 2.31: En rojo algunos de los caracoles de Pascal del Problema 60, trazados tomando $b = 4$, y en azul sus trayectorias ortogonales.

Problema 60. Para cada $b > 0$ fijo, los *caracoles de Pascal* son la familia uniparamétrica de curvas descrita por $a(x^2+y^2) - bx = \sqrt{x^2+y^2}$, con $a \in \mathbb{R}^+$.

Utilizando coordenadas polares, obtener la familia de trayectorias ortogonales a los caracoles de Pascal. Dar la expresión de la familia de curvas en coordenadas rectangulares. La figura 2.31 muestra, para $b = 4$, en rojo algunos caracoles de Pascal y en azul sus trayectorias ortogonales.

Problema 61. Si c es una constante positiva y a un parámetro positivo, entonces

$$\frac{t^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2 - c^2} = 1$$

es la ecuación de la familia de todas las elipses (si $a > c$), o bien hipérbolas (si $a < c$), con focos en los puntos $(\pm c, 0)$. Probar que esta familia de *cónicas confocales* es auto-ortogonal.

Problema 62. Determinar las trayectorias isogonales de ángulo $\pi/4$ a la familia de circunferencias $t^2 + x^2 = C$.

Problema 63. Determinar las trayectorias isogonales de ángulo $\pi/4$ a la familia de curvas $t^2 - 2tx - x^2 = C$.

Problema 64. Supongamos un sistema de coordenadas cartesianas OXY y la familia de circunferencias con centros en el eje OX y pasando por O. Determinar la familia de trayectorias isogonales de ángulo $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a dicha familia

de circunferencias. La circunferencias propuestas y dos familias de trayectorias isogonales se muestran en la figura 2.32.

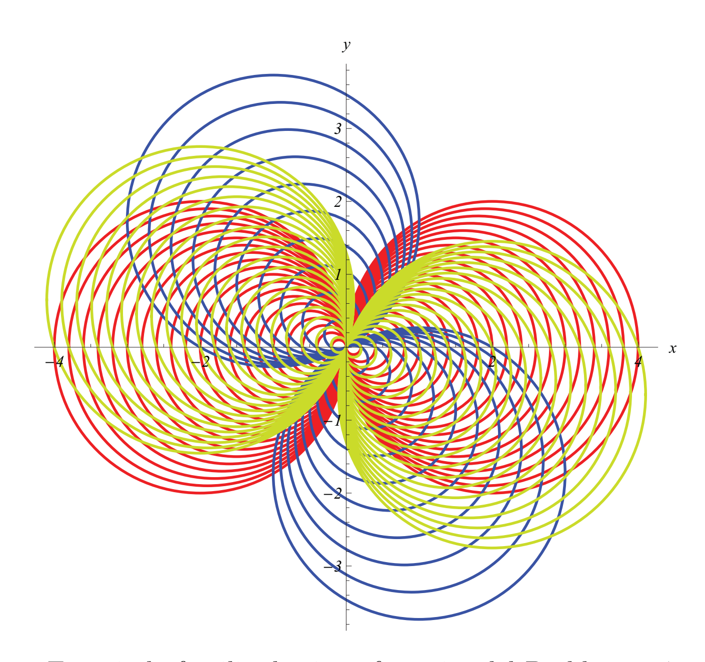


Figura 2.32: En rojo la familia de circunferencias del Problema 64, en azul las trayectorias isogonales de ángulo $\pi/3$ y en verde las correspondientes a $\pi/10$.

Problema 65. Determinar las trayectorias isogonales de ángulo $\alpha \in (0, \pi)$ a la familia de lemmniscatas $(t^2 + x^2)^2 = a^2(t^2 - x^2)$.

Problema 66. Determinar la familia de trayectorias ortogonales a un familia de circunferencias de radio constante centradas sobre una recta. La figura 2.33 muestra las circunferencias de la familia de circunferencias (de hecho, sólo la mitad de cada una de ellas) y sus trayectorias ortogonales.

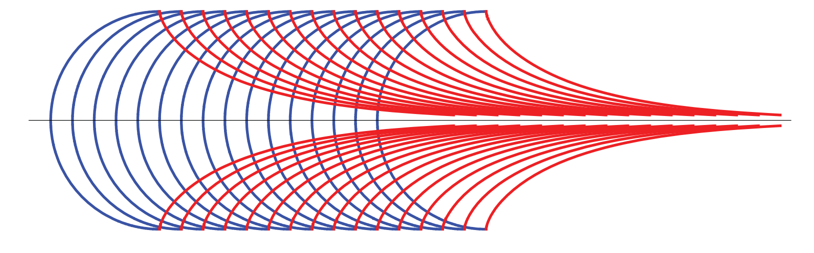


Figura 2.33: El dibujo muestra en azul la familia de circunferencias del Problema 66. En rojo se han trazado las trayectorias ortogonales.

Problema 67. Determinar la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $x(x^2 + y^2) + c(x^2 - y^2) = 0$. La familia de curvas y sus trayectorias ortogonales se muestran en la figura 2.34.

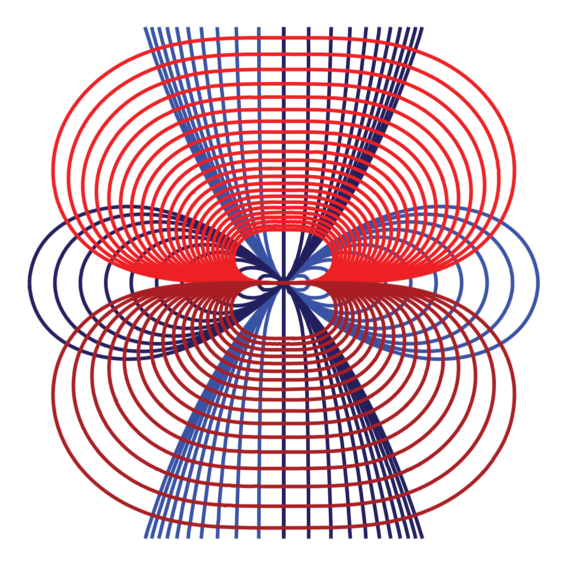


Figura 2.34: En azules la familia de curvas dada en la Problema 67 y en rojos la familia de trayectorias ortogonales.

Problema 68. Los *bifolium* regulares son curvas dadas por la ecuación cartesiana $(x^2 + y^2)^2 = 4ax^2y$, donde a es un cierto parámetro. Determinar las trayectorias ortogonales a los bifolium en coordendas cartesianas. En la figura 2.35 se muestran la familia de curvas dada y sus trayectorias ortogonales.

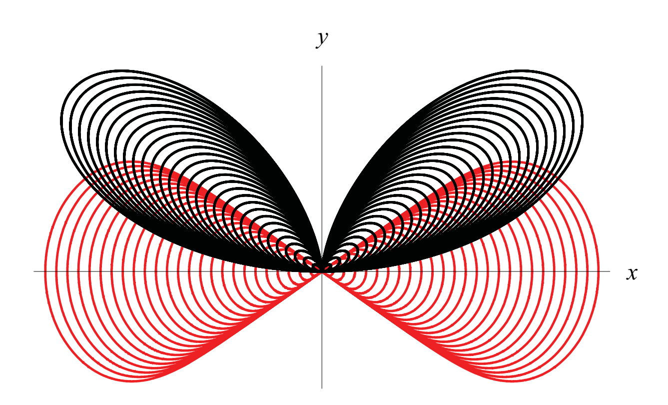


Figura 2.35: En negro los *bifolium* del Problema 68 y en rojo sus trayectorias ortogonales.

Problema 69. Sean n y k enteros positivos tales que $1 \leq k \leq n$. Determinar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $(x^2 + y^2)^n = Cx^{2k}$. En la figura 2.36 se muestran la familia de curvas y sus trayectorias ortogonales para $n = 7$ con $k = 1, \ldots, 6$.

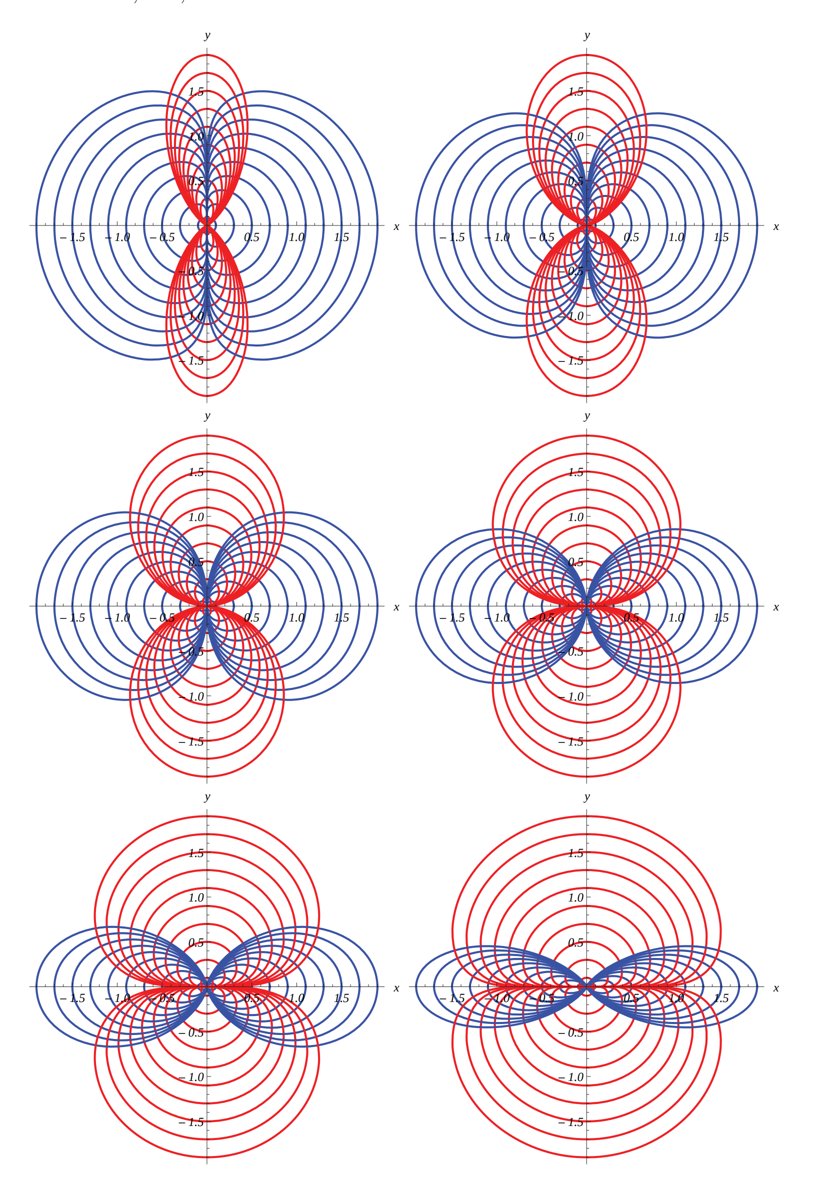


Figura 2.36: De izquierda a derecha y de arriba a abajo, la familia de curvas del Problema 69 (en azul) y sus trayectorias ortogonales (en rojo) para $n = 7$ y $k = 1, \ldots, 6$.

Problema 70. Encontrar todas las curvas tales que en cada punto (x, y) el segmento interceptado en el eje OY por la recta tangente tiene una longitud igual a $2xy$.

Problema 71. Hallar la familia de curvas para las que la longitud del segmento de recta tangente comprendido entre el punto de contacto (x, y) y el eje OY es igual a la del segmento interceptado en OY por la tangente.

Problema 72. Hallar la ecuación de la familia de curvas $y = f(x)$ tales que el volumen que genera el trapezoide formado por la curva, el OX y las rectas $x = 0$ y $x = b$, con b variable, al girar alrededor de OX es igual al del cilindro generado por rotación alrededor de OX de un rectángulo de altura $f(b)/2$ y cuya base es el segmento de extremos $(0, 0)$ y $(0, b)$.

Problema 73. Determinar todas las curvas planas para las cuales el eje OY biseca el segmento de recta tangente comprendido entre el punto de tangencia y el eje OX.

Problema 74. Determinar todas las curvas planas para las cuales el segmento de recta tangente interceptado por los ejes está bisecado por el punto de tangencia.

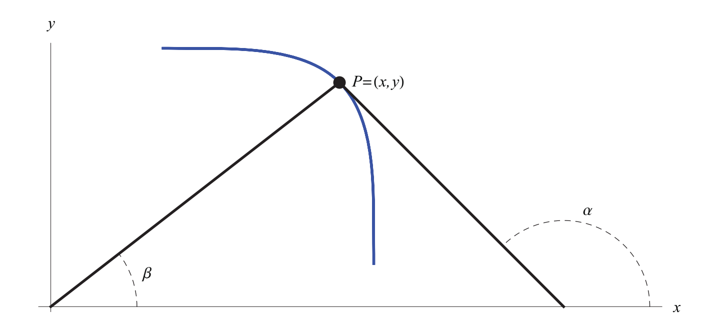


Figura 2.37: Esquema del movimiento del punto del Problema 75.

Problema 75. Un punto P se mueve en el plano OXY de tal forma que el ángulo α que forma la tangente a la curva de la trayectoria con el eje OX es el triple del ángulo β que forma el radio vector del punto P con el eje OX (véase el esquema en la figura 2.37). Determinar la ecuación en coordenadas cartesianas de la trayectoria del punto P. Resolver la misma cuestión cuando el ángulo α sea cuatro veces el ángulo β.

Analizar el caso general en que $\alpha = n\beta$ para un entero $n \geq 3$, usando coordenadas polares.

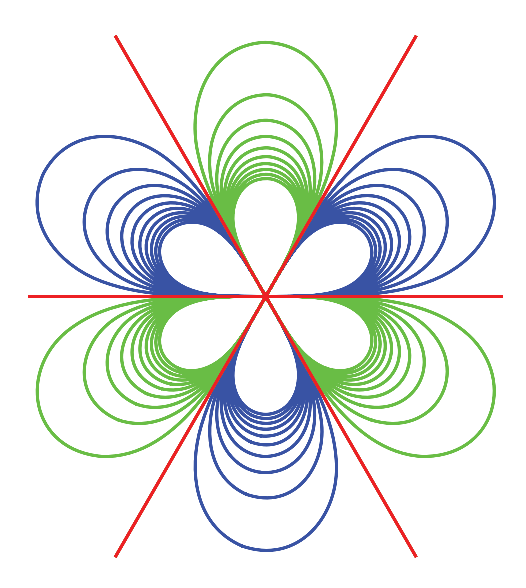


Figura 2.38: Curvas solución del Problema 75 en el caso $n = 4$.

2.7.5. La tractriz circular

Como ya comentamos al estudiar la tractriz, la ecuación de la tractriz circular fue determinada por L. Euler.[23] La tractriz circular se define como la curva descrita, en su arrastre, por un objeto sujeto a una cadena de longitud dada, cuando el extremo libre de la cadena (el que no sujeta al objeto) se desplaza sobre una circunferencia. La circunferencia se denomina directriz. A lo largo de varias cuestiones, procederemos a determinar la ecuación de la tractriz circular.

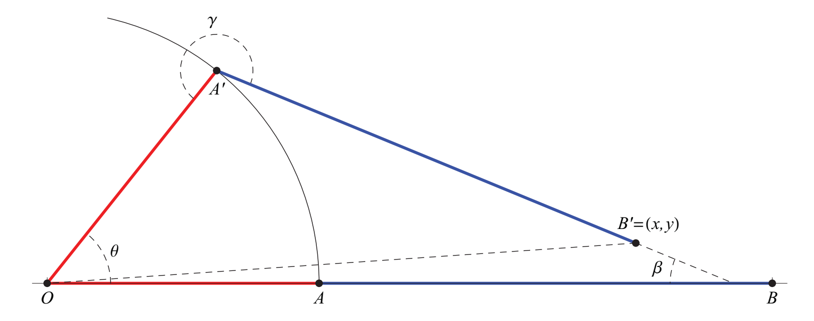


Figura 2.39: El dibujo muestra el esquema para la determinación de la ecuación de la tractriz circular.

[23] En un artículo de 1788 incluido en *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae II*.

Supongamos que la circunferencia directriz tiene radio a, y que la longitud de la cadena es b. Siguiendo el esquema que aparece en la figura 2.39, supongamos que inicialmente el extremo libre de la cadena se encuentra en el punto A (es decir, que el segmento OA tiene longitud a) y que el extremo que sujeta el objeto a desplazar se encuentra en B (por tanto el segmento AB mide b). Tras un giro de ángulo θ del punto A sobre la circunferencia, en que el extremo libre alcanza la posición A', el punto B se habrá desplazado hasta el punto $B' = (x, y)$ de la tractriz circular. Además, el segmento rectilíneo $A'B'$ será tangente a la tractriz circular en el punto B', y el ángulo formado por este segmento con la horizontal es $\pi - \beta$. A partir de la geometría de la situación resulta sencillo comprobar que el ángulo $\gamma = 2\pi - \angle OA'B'$, puede reescribirse como $\gamma = \pi + \beta + \theta$.

Problema 76. Siguiendo la notación precedente, probar que

$$(x, y) = (a\cos\theta + b\cos\beta, a\,\mathrm{sen}\,\theta - b\,\mathrm{sen}\,\beta).$$

(Notar que el vector OB' es la suma de los vectores OA' y $A'B'$.)

Problema 77. Usando que $\beta = \beta(\theta)$ y, evidentemente, que $x = x(\theta)$ e $y = y(\theta)$, obtener la ecuación diferencial

$$b\frac{d\beta}{d\theta} = a\cos(\theta + \beta)$$

y transformarla en

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = 1 - p\cos\gamma$$

mediante el cambio de función $\gamma = \pi + \theta + \beta$ y escribiendo $a/b = p$.

Problema 78. Denotando $\alpha = \arccos(b/a)$, probar que si $p > 1$,

$$\theta = \cot\alpha \log\left|\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\right|$$

para $\gamma \in [\pi, 2\pi - \alpha)$ (notar que para $\theta = 0$ se tiene $\gamma = \pi$). En la figura 2.40 se muestra la tractriz circular para $p > 1$.

Problema 79. Probar que si $p = 1$,

$$\theta = -\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

para $\gamma \in [\pi, 2\pi)$. La tractriz circular en este caso se muestra en la figura 2.41.

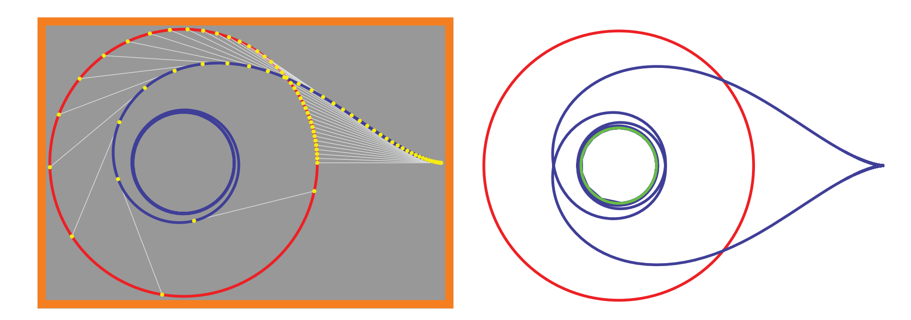


Figura 2.40: A la izquierda vamos mostrando distintas posiciones de la cadena y, en azul, la curva que va trazando el punto arrastrado en el caso $p > 1$ ($a > b$). A la derecha, la tractriz circular completa que se obtiene al tomar $\gamma \in (\alpha, 2\pi - \alpha)$. Observar que la curva se va aproximando a una circunferencia (que hemos trazado en verde) cuyo radio es $\sqrt{a^2 - b^2}$. Sería una interesante cuestión intentar probar este hecho. Se ha tomado $a = 2.7$ y $b = 2.5$ en ambas imágenes.

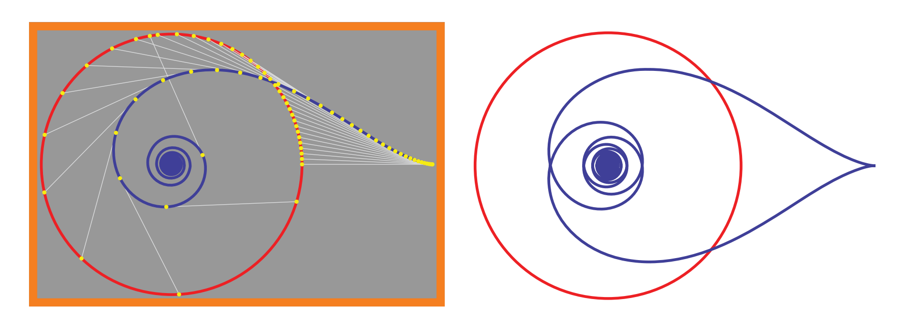


Figura 2.41: A la izquierda vamos mostrando distintas posiciones de la cadena y, en azul, la tractriz circular que va trazando en el caso $p = 1$ ($a = b$). A la derecha la curva completa que se obtiene al tomar $\gamma \in (0, 2\pi)$. Las imágenes se han realizado tomando $a = b = 1$.

Problema 80. Probar que si $p < 1$,

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+p}{1-p}} \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right) + (2k+1)\pi \right)$$

para $\gamma \in [(2k+1)\pi, (2k+3)\pi)$ y $k \geq 0$, suponiendo que $\theta((2k+1)\pi) = \frac{2k\pi}{\sqrt{1-p^2}}$.[24] Las figuras 2.42 y 2.43 muestran diversos casos de la tractriz circular para $p < 1$.

[24]Notar que este hecho está indicando que cada rotación completa del ángulo γ produce un giro de amplitud $\frac{2\pi}{\sqrt{1-p^2}}$ en el ángulo θ. Así mismo, si suponemos las coordenadas polares de la curva $(x, y) = (r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\operatorname{sen}\phi)$, el giro completo de ángulo γ, supondrá para ϕ una variación igual a la de γ. Por tanto la tractriz circular sólo será una curva cerrada si $\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}} = \frac{p}{q}$, para ciertos enteros positivos p y q tales que $p > q$.

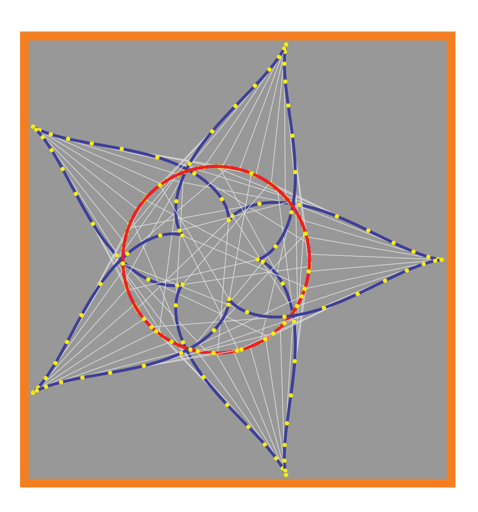


Figura 2.42: En la imagen se muestran distintas posiciones de la cadena y, en azul, la tractriz circular que va trazando en el caso $p < 1$ ($a < b$). Los valores de los parámetros en el dibujo son $a = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ y $b = 1$.

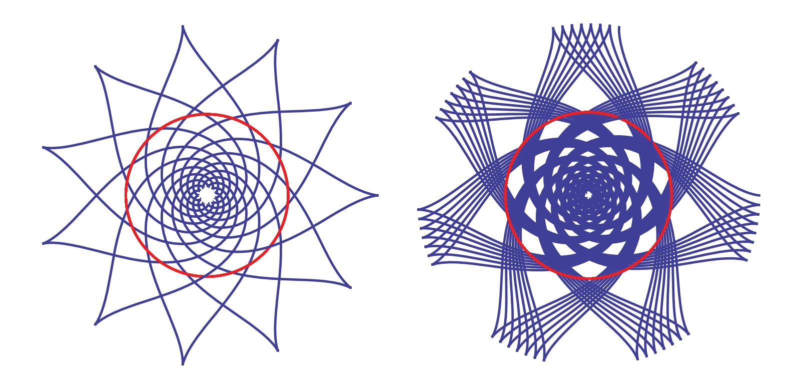


Figura 2.43: En la imagen otros dos casos de tractriz circular. Los valores de los parámetros son $a = \frac{\sqrt{455}}{24}$ y $b = 1$ (a la izquierda) y $a = \frac{\pi^2-1}{\pi}$ y $b = 1$ (a la derecha). Observar que en este último caso no se trata de una curva cerrada.

2.7.6. Problemas sobre vaciado de recipientes

Supongamos un recipiente lleno de algún tipo de fluido, con un pequeño orificio abierto en su parte inferior por el que se escapa el contenido. Sea $h(t)$ la altura del fluido en el recipiente en un cierto instante t. La ley de Torricelli establece que la velocidad a la que sale el fluido del recipiente es igual a la velocidad de una partícula que cae libremente y sin rozamiento desde una altura

h. Es fácil comprobar[25] que la ley de Torricelli puede expresarse como $v = \sqrt{2gh}$. Resulta evidente, por otra parte, que

$$\begin{aligned} &\text{Variación del volumen en un intervalo de tiempo} \\ &\quad = -\text{Cantidad de líquido expulsado del recipiente en ese mismo tiempo.} \end{aligned} \tag{2.11}$$

La variación del volumen es la derivada del volumen, V, con respecto al tiempo. Si $A(h)$ denota el área de la sección del recipiente a altura h, se verificará que

$$V(h) = \int_0^h A(s)\, ds.$$

Supongamos que el volumen es función de la altura y esta, a su vez, es función del tiempo (véase un razonamiento similar en la nota anterior a pie de página). Tendremos que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = A(h)\frac{dh}{dt}. \tag{2.12}$$

Si suponemos que en un pequeño intervalo de tiempo Δt se produce un pequeña variación en la altura del fluido, que denotaremos por Δh, podemos considerar que la cantidad de fluido expulsado del recipiente es igual al volumen de un cilindro de altura Δh y con base de área a; es decir, el volumen expulsado del recipiente será[26] $a\Delta h$, y la variación instantánea por unidad de tiempo podrá expresarse como

$$a\frac{dh}{dt} = av = a\sqrt{2gh}, \tag{2.13}$$

[25]En efecto, por la segunda ley de Newton, el movimiento de la partícula ocurre con aceleración constante, igual a la de la gravedad. Es decir,

$$\frac{dv}{dt} = g.$$

Supongamos ahora que la aceleración es función de la altura, h, y ésta, a su vez, es función del tiempo; es decir, tenemos un esquema del tipo

$$t \longleftarrow v \longrightarrow h \longrightarrow t.$$

Es claro que $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}\frac{dh}{dt} = v\frac{dv}{dx}$, teniendo en cuenta que la velocidad es la derivada de la altura respecto del tiempo. Por tanto, la velocidad de la partícula en función de la altura será la solución de la ecuación

$$v\frac{dv}{dh} = m.$$

Esta ecuación es de variables separadas y su solución general es

$$v^2 = 2mh + C.$$

Dado que la velocidad es nula al comenzar el moviento, concluimos que $C = 0$ y de este modo $v = \sqrt{2gh}$.

[26]En realidad ciertas observaciones experimentales sugieren que la base del cilindro no se corresponde exactamente con el orificio, se produce un pequeño estrechamiento dependiente de la forma del borde del orificio. Teniendo en cuanta este hecho, el volumen desalojado en el intervalo Δt sería $\phi a\Delta h$, donde $0 < \phi \leq 1$ es un parámetro que nos informa sobre el estrechamiento que se produce en el cilindro de fluido expulsado. Para bordes agudos o afilados se debe tomar $\phi = 0.62$ y para bordes redondeados $\phi = 0.97$. Por simplicidad, en nuestro caso suponemos $\phi = 1$.



Figura 2.44: Recreación del funcionamiento de una clepsidra.

donde hemos usado la ley de Torricelli para la velocidad. Ahora reuniendo (2.11), (2.12) y (2.13), deducimos que la altura del nivel del fluido en el recipiente viene descrita por la solución de la ecuación

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}.$$

Apliquemos esta última expresión para resolver, a continuación, diversos problemas de vaciado de recipientes.

Problema 81. (Tomado literalmente del libro de F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, McGraw-Hill, 1977.) La clepsidra, antiguo reloj de agua, era un tazón de agua del que se dejaba salir el agua por un orificio hecho en el fondo. Con frecuencia se usaba en las cortes griegas y romanas para medir el tiempo de los discursos de los letrados, a fin de evitar que hablaran demasiado.[27] Encuéntrese la forma que debe tener una clepsidra, para que el nivel del agua disminuya a un velocidad constante.

[27] La antigua clepsidra permite a Antonio Machado expresar el paso del tiempo de un modo casi trágico:

XXI

Daba el reloj las doce... y eran doce
golpes de azada en tierra...
... ¡Mi hora! -grité-... El silencio
me respondió: -No temas;
tú no verás caer la última gota
que en la clepsidra tiembla.
Dormirás muchas horas todavía
sobre la orilla vieja,
y encontrarás una mañana pura
amarrada tu barca a otra ribera.

Se trata de una estrofa del poema *Del camino* de la obra *Soledades, galerías y otros poemas*, 1907.

Problema 82. Un recipiente semiesférico de radio R, lleno inicialmente de agua, se vacía al practicar en el fondo un pequeño agujero circular de radio r. Determinar el tiempo necesario para vaciar el recipiente.

Problema 83. Un recipiente cilíndrico con base circular de radio R y altura H, lleno inicialmente de agua, se vacía al practicar en el fondo un pequeño agujero circular de radio r. Determinar el tiempo necesario para vaciar el recipiente.

Problema 84. Dos recipientes llenos de agua, con orificios idénticos en sus fondos, se vacían en el mismo tiempo. Uno de ellos es cilíndrico con base circular de radio R, y el otro es un cono invertido de base circular del mismo radio. Si la altura del recipiente cilíndrico es h, ¿cuál es la altura del cónico?

Problema 85. Un recipiente cilíndrico con base circular de radio R y altura h lleno de agua tiene un orificio de radio r, cerrado por un diafragma, en el fondo. Cuando el diafragma comienza a abrirse, su radio de abertura es proporcional al tiempo transcurrido desde que empezó a abrirse. Si T es el tiempo que tarda el diafragma en abrirse completamente, calcular la altura del agua en ese instante.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales exactas

3.1. Ecuaciones diferenciales exactas

Es sencillo observar que podemos resolver cualquier ecuación que se pueda escribir de la forma

$$\frac{d}{dt}V(t,x) = 0, \tag{3.1}$$

donde suponemos que $x = x(t)$. El teorema del valor medio permite escribir inmediatamente la solución general de la ecuación, definida implícitamente por la identidad

$$V(t,x) = C,$$

siendo C una constante arbitraria. A la vista de esto, sería interesante disponer de un método que nos permita saber cuándo una ecuación diferencial de primer orden puede escribirse en la forma (3.1). Esta cuestión no es, ni mucho menos, trivial. Resulta sencillo ver que la ecuación

$$x' = -\frac{1+\cos(t+x)}{\cos(t+x)} \iff 1+\cos(t+x)+\cos(t+x)\frac{dx}{dt} = 0$$

admite la reescritura

$$\frac{d}{dt}(t+\operatorname{sen}(t+x)) = 0$$

y que, por tanto, sus soluciones son las funciones

$$t+\operatorname{sen}(t+x) = C \Longrightarrow x = \operatorname{arc\,sen}(C-t)-t.$$

Sin embargo, ya no resulta tan obvio probar que

$$x' = -\frac{2t+x-\operatorname{sen} t}{3x^2+\cos x+t} \iff 2t+x-\operatorname{sen} t+(3x^2+\cos x+t)\frac{dx}{dt} = 0$$

puede tomar la forma

$$\frac{d}{dt}(x^3 + t^2 + tx + \operatorname{sen} x + \cos t) = 0$$

y que sus soluciones son las funciones definidas implícitamente por la ecuación

$$x^3 + t^2 + tx + \operatorname{sen} x + \cos t = C.$$

Desarrollando la derivada en (3.1), supuesto que $x = x(t)$, se tiene que

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0 \iff \frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}}{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}},$$

si $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} \neq 0$. Este hecho motiva que demos la siguiente definición.

Definición 3. Sea la ecuación

$$x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$$

con $P, Q \in C^1(D)$, siendo D un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ simplemente conexo,[1] y $Q \neq 0$. Si existe una función $V(t,x)$ tal que

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = P(t,x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = Q(t,x)$$

diremos que la ecuación diferencial dada es exacta. La función V se denomina función potencial.

Es claro que cualquier ecuación exacta se podrá reescribir en la forma (3.1) y sus soluciones serán $V(t,x) = C$.

Si se conoce la función potencial, por supuesto, ya se sabe que la ecuación es exacta. Sin embargo, lo que resultaría realmente útil es saber cuándo una ecuación es exacta sin haber determinado la función potencial.

Si $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ es exacta, resulta sencillo comprobar que

$$\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}. \tag{3.2}$$

Para ello es suficiente observar que $P, Q \in C^1(D)$ y que, entonces, las derivadas parciales de segundo orden cruzadas de V deben ser iguales.

La condición (3.2) resulta ser, además de necesaria, suficiente para que la ecuación sea exacta. Veamos que cualquier problema de valores iniciales asociado a la ecuación diferencial $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$, satisfaciendo (3.2), admite una solución única descrita en términos de una función potencial.

[1] Parece necesario dar una definición rigurosa de este concepto aunque, esencialmente, debemos hacernos a la idea de que se trata de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ sin agujeros. Un conjunto D se dice simplemente conexo si para cualquier curva cerrada $\gamma \subset D$ se verifica que el interior de dicha curva está completamente contenido en D.

Teorema 2. *Sean* $P, Q \in C^1(D)$*, con* D *un subconjunto de* $\mathbb{R}^2$ *simplemente conexo,* $Q \neq 0$ *y satisfaciéndose la condición* (3.2)*. Entonces, para cada* $(t_0, x_0) \in D$*, el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{P(t,x)}{Q(t,x)}, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admite una única solución $\phi \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$*, con* I *un intervalo de* $\mathbb{R}$ *tal que* $t_0 \in I$*. Además, la función* $x = \phi(t)$ *está definida implícitamente, en un entorno del punto* (t_0, x_0)*, por la ecuación* $V(t,x) = 0$*, donde*

$$V(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(s,x)\,ds + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,s)\,ds.$$

Demostración. Procederemos a construir la función potencial $V(t,x)$. Para que sea una función potencial debe satisfacerse que $\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = P(t,x)$. Así tendremos que

$$V(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(s,x)\,ds + \psi(x).$$

Si derivamos con respecto de x la identidad anterior y usamos la condición (3.2), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{t_0}^{t} P(s,x)\,ds\right) + \frac{d\psi(x)}{dx} \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial x} P(s,x)\,ds + \frac{d\psi(x)}{dx} \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} Q(s,x)\,ds + \frac{d\psi(x)}{dx} = Q(t,x) - Q(t_0,x) + \frac{d\psi(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la condición $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = Q(t,x)$, llegamos a que

$$-Q(t_0,x) + \frac{d\psi(x)}{dx} = 0 \Longrightarrow \psi(x) = \int_{x_0}^{x} Q(t_0,s)\,ds.$$

Es decir,

$$V(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(s,x)\,ds + \int_{x_0}^{x} Q(t_0,s)\,ds.$$

Al calcular las distintas primitivas se han tomado los extremos de integración de la manera apropiada para que se satisfaga la condición $V(t_0,x_0) = 0$. La hipótesis sobre el dominio D permite calcular las integrales sin problemas. Veamos que efectivamente la ecuación $V(t,x) = 0$ define la función $x = \phi(t)$ solución del problema de valores iniciales propuesto. Para ello basta aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación $V(t,x) = 0$ en un entorno del punto (t_0,x_0).

Por construcción, es claro que $V \in C^2(D)$, $V(t_0, x_0) = 0$ y $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = Q(t,x) \neq 0$. Luego existe $\phi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, tal que $\phi(t_0) = x_0$, $V(t, \phi(t)) = 0$ y

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(t,\phi(t)) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}V(t,\phi(t)) + \frac{\partial}{\partial x}V(t,\phi(t))\phi'(t) = 0 \\ \Longrightarrow \phi'(t) = -\frac{P(t,\phi(t))}{Q(t,\phi(t))}.\end{aligned}$$

□

Nota 1. La demostración del teorema anterior nos está dando un procedimiento para el cálculo de la función potencial. Omitiendo los extremos de integración, de la condición $\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = P(t,x)$ tendremos que

$$V(t,x) = \int P(t,x)\,dt + \psi(x).$$

Entonces, derivando respecto de x esta igualdad y usando la condición (3.2), la función ψ se determina a partir de la ecuación

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = Q(t,x) - \int \frac{\partial}{\partial x}P(t,x)\,dt.$$

Otro procedimiento análogo se puede obtener si comenzamos con la condición $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = Q(t,x)$. Así,

$$V(t,x) = \int Q(t,x)\,dx + \varphi(t)$$

y la función φ se obtendrá de la ecuación

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = P(t,x) - \int \frac{\partial}{\partial t}Q(t,x)\,dx.$$

No hay que olvidar que la solución general de la ecuación diferencial exacta vendrá dada por $V(t,x) = C$.

Nota 2. Es frecuente que las ecuaciones exactas se presenten como 1-formas diferenciales igualadas a cero. Si la ecuación $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ es exacta sabemos que existe $V(t,x)$, con $x = x(t)$, tal que $\frac{d}{dt}V(t,x) = 0$. Esto nos indica que el diferencial total de $V(t,x)$ es nulo; es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t}V(t,x)\,dt + \frac{\partial}{\partial x}V(t,x)\,dx = 0,$$

o, equivalentemente,

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0.$$

Veamos algunos ejemplos de resolución de ecuaciones exactas.

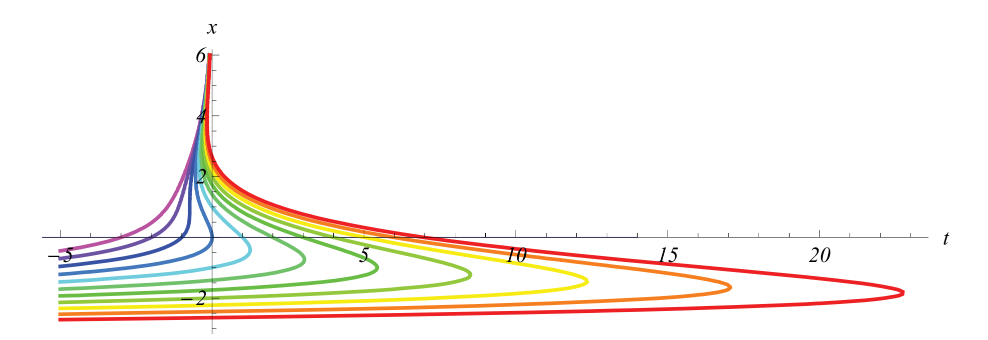


Figura 3.1: La imagen muestra algunas de las soluciones de la ecuación exacta del Ejemplo 10.

***Ejemplo* 10.** Determinar la solución general de la ecuación

$$x' = -\frac{e^x}{te^x + 2x}.$$

Es claro que $P(t,x) = e^x$ y $Q(t,x) = te^x + 2x$. Así,

$$\frac{\partial}{\partial x}P(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}Q(t,x) = e^x$$

y la ecuación es exacta. Obtengamos la función potencial. Integrando $P(t,x)$ en la variable t, tendremos

$$V(t,x) = \int e^x\, dt + \psi(x) = te^x + \psi(x).$$

Ahora, usando que por una parte $\frac{\partial}{\partial x}V(t,x) = Q(t,x) = te^x + 2x$ y que por otra

$$\frac{\partial}{\partial x}V(t,x) = te^x + \frac{d\psi(x)}{dx},$$

obtenemos que

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = 2x \Longrightarrow \psi(x) = x^2 + k.$$

Con lo que $V(t,x) = te^x + x^2 + k$ y la solución general de la ecuación será

$$te^x + x^2 = C.$$

En la figura 3.1 se muestran algunas soluciones. ◁

***Ejemplo* 11.** Determinar la solución general de la ecuación

$$(\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} t^2 \operatorname{sen} 2x)x' + \cos t + 2t\cos t^2 \cos 2x = 0.$$

Reescribiendo la ecuación como

$$x' = -\frac{\cos t + 2t\cos t^2 \cos 2x}{\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} t^2 \operatorname{sen} 2x}$$

podemos considerar

$$P(t,x) = \cos t + 2t\cos t^2 \cos 2x \qquad \text{y} \qquad Q(t,x) = \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} t^2 \operatorname{sen} 2x.$$

Además,

$$\frac{\partial}{\partial x}P(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}Q(t,x) = -4x\cos t^2 \operatorname{sen} 2x.$$

Integrando $P(t,x)$ respecto de la variable t, se cumplirá que

$$V(t,x) = \int P(t,x)\,dt + \psi(x) = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t^2 \cos 2x + \psi(x).$$

Ahora, de la relación $\frac{\partial V}{\partial x} = Q(t,x)$ deducimos que

$$\phi'(x) = \operatorname{sen} x$$

y, por tanto, las solución general buscada quedará definida implícitamente por

$$\operatorname{sen} t - \cos x + \operatorname{sen} t^2 \cos 2x = k.$$

Como puede verse en la figura 3.2, las curvas definidas implícitamente por la ecuación anterior producen un vistoso y singular tapiz cuando se pintan coloreadas para distintos valores de la constante k. $\triangleleft$

***Ejemplo* 12.** Encontrar la solución general de la ecuación

$$-\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{t}{x}\,dt + \frac{t}{x^2}\operatorname{sen}\frac{t}{x}\,dx = 0.$$

Es sencillo comprobar que

$$\frac{\partial}{\partial x}P(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}Q(t,x) = \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{t}{x} + \frac{t}{x^3}\cos\frac{t}{x}.$$

Entonces

$$V(t,x) = \int \frac{t}{x^2}\operatorname{sen}\frac{t}{x}\,dx + \varphi(t) = \cos\frac{t}{x} + \varphi(t)$$

y $\varphi(t) = C$. De esta forma la solución general de la ecuación es

$$\cos\frac{t}{x} = C;$$

es decir, la familia de rectas $x = kt$. $\triangleleft$

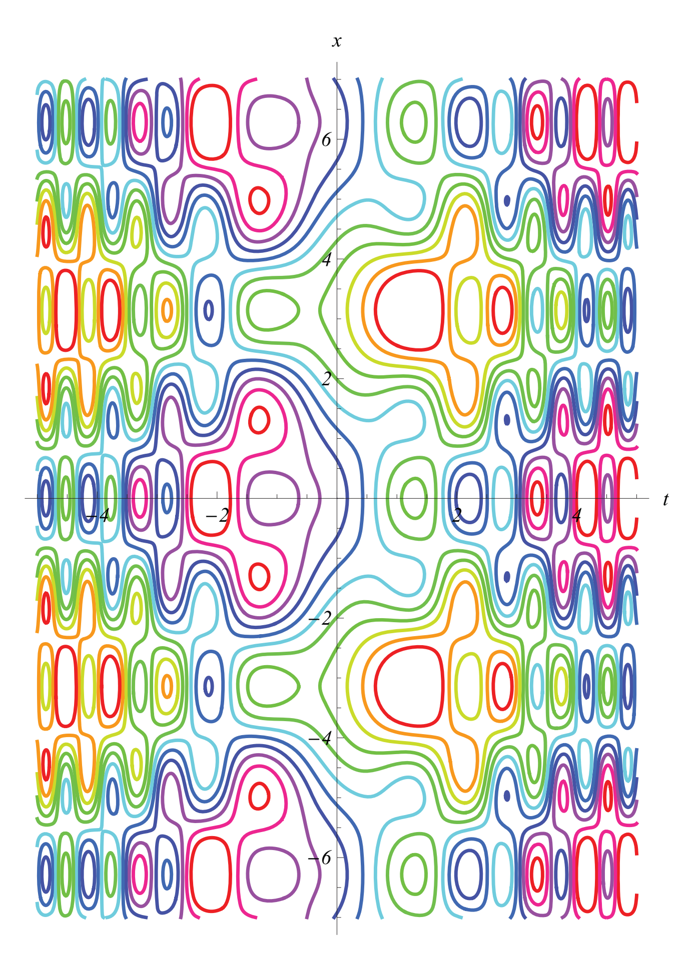


Figura 3.2: Algunas curvas correspondientes a la solución del Ejemplo 11. Se ha tomado $k \in [-2, 2]$ y para cada elección de k la curva está coloreada con un color distinto.

***Ejemplo* 13.** Obtener la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} dt = \dfrac{x}{1-t^2x^2}\,dt + \dfrac{t}{1-t^2x^2}\,dx, \\ x(a) = 0, \end{cases}$$

con $a \neq 0$.

Teniendo en cuenta que

$$P(t,x) = \frac{x}{1-t^2x^2} - 1 \quad \text{y} \quad Q(t,x) = \frac{t}{1-t^2x^2}$$

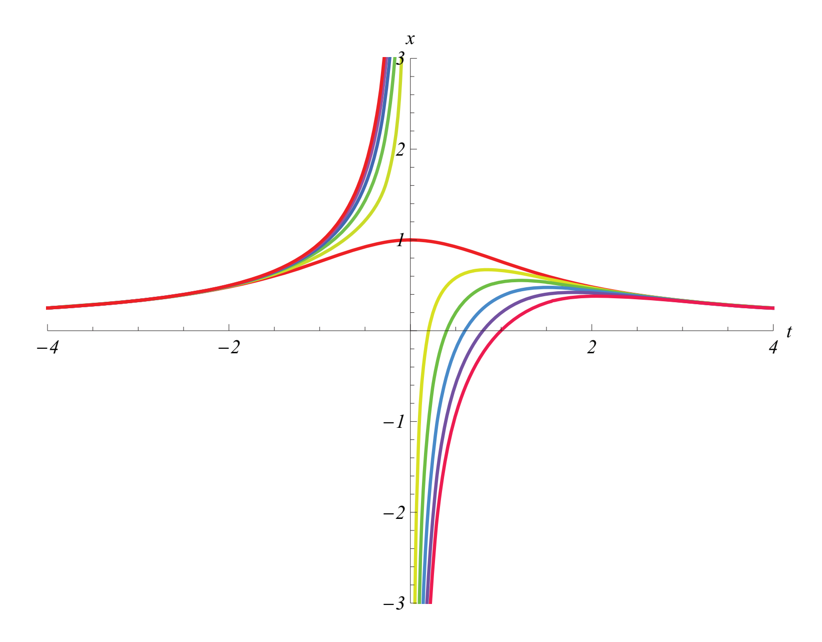


Figura 3.3: La imagen muestra la solución del problema de valores iniciales del Ejemplo 13 para distintos valores del parámetro a. La curva en rojo que no presenta una asíntota en el origen es la correspondiente al valor $a = 0$, las demás corresponden a distintos valores de a en el intervalo $(0, 1]$.

se comprueba que

$$\frac{\partial}{\partial x}P(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}Q(t,x) = \frac{1+t^2x^2}{(1-t^2x^2)^2}.$$

Aplicando el Teorema 2 tendremos una única solución para el problema de valor inicial definida por $V(t,x) = 0$, tomando

$$V(t,x) = \int_a^t \left(\frac{x}{1-s^2x^2} - 1 \right) ds + \int_0^x \frac{a}{1-a^2s^2}\, ds.$$

Usando que $\int \frac{dz}{1-z^2} = \arg\tanh z + C$, tenemos que

$$V(t,x) = \arg\tanh(tx) - (t-a)$$

y la solución del problema será

$$\arg\tanh(tx) - (t-a) = 0 \Longrightarrow x = \frac{\tanh(t-a)}{t}.$$

¿Por qué debemos considerar $a \neq 0$? En la figura 3.3 se muestra, para distintos valores del parámetro a, la solución del problema de valores iniciales estudiado en este ejemplo. ◁

3.2. Una cuestión de óptica

El estudio de las propiedades de la luz ha mantenido una larga relación con las matemáticas. La *ley de reflexión* de la luz es bien conocida desde la antigüedad. Recordemos que según esta ley el ángulo con el que sale reflejado de un espejo un rayo de luz es siempre igual al de incidencia. Este hecho sencillo permitió a Diocles (240–180 a. de C.) probar, en su trabajo *Sobre los espejos ustorios*,[2] la denominada propiedad focal de las parábolas. Esta propiedad afirma que cada rayo de luz que se refleja sobre un espejo parabólico pasa por un punto fijo. Este punto fijo fue bautizado bastantes años más tarde como *foco del paraboloide*. Más adelante, en estas mismas notas, volveremos sobre esta cuestión. De hecho analizaremos el problema inverso, probando que si un espejo tiene tal propiedad, es decir, cada haz de rayos paralelo se refleja pasando por un punto fijo, debe ser parabólico. La suposición de que los rayos sean paralelos se justifica pensando que son rayos solares y que su fuente de origen es el punto del infinito. Si suponemos que la fuente de luz es un punto fijo finito P, podemos plantearnos la siguiente generalización de la propiedad focal de las parábolas: ¿para qué curvas se verifica que cualquier rayo proviniente de P se refleja a través de rectas concurrentes en un mismo punto? En estos momentos esta cuestión queda fuera de nuestro alcance pero la abordaremos en un próximo capítulo.



René Descartes, también llamado Cartesius (de donde deriva el término *cartesiano*), (1596–1650) fue un filósofo, matemático y físico francés, considerado como el padre de la filosofía moderna, así como uno de los nombres más destacados de la revolución científica. Su obra fundamental es *Discurso del método para dirigir bien la razón y hallar la verdad en las ciencias*, publicada en 1637. Esta obra va acompañada de tres apéndices titulados *La dióptrica*, *Los meteoros* y *La geometría*. Es en este último donde incluye su aplicación del algebra a la geometría y da lugar a la denominada *geometría cartesiana*.

Nuestro interés ahora se va a centrar en estudiar la misma cuestión para la refracción de la luz. Más exactamente, nos gustaría determinar la forma de una lente de tal manera que todos los rayos emitidos por un foco emisor se refracten a través de rectas concurrentes en un mismo punto.

Este problema lo planteó René Decarstes en *La geometría* y la solución, como veremos a continuación viene dada por los denominados hoy día *óvalos de Descartes*. Dados dos puntos P y Q y dos constantes n y c, un *óvalo* es el lugar geométrico de los puntos del plano, R, para los que se verifica la igualdad

$$d(P,R) + nd(Q,R) = c,$$

donde $d(P,R)$ denota la distancia entre P y R. Los puntos P y Q se denominan focos del óvalo. Resulta interesante observar que los casos $n = 1$ y $n = -1$ se corresponden, respectivamente, con la elipse y la hipérbola. Descartes en su trabajo prueba que los óvalos así construidos refractan los rayos de luz emitidos por un foco en rectas pasando por el otro. Sin embargo, no comprueba, como efectivamente veremos, que se trata de las únicas curvas con esa propiedad. La pieza fundamental para probar este hecho es la denominada *ley de refracción de Snell*.

[2]La palabra *ustorio* no deja de ser extraña para la mayoría de las personas. Una búsqueda en el diccionario de la RAE nos informa de que procede de un término latino que puede traducirse como *el que quema* y nos remite a la entrada *espejo ustorio* que define del siguiente modo: espejo cóncavo que, puesto de frente al sol, refleja sus rayos y los reúne en el punto llamado foco, produciendo un calor capaz de quemar, fundir y hasta volatilizar los cuerpos allí colocados.

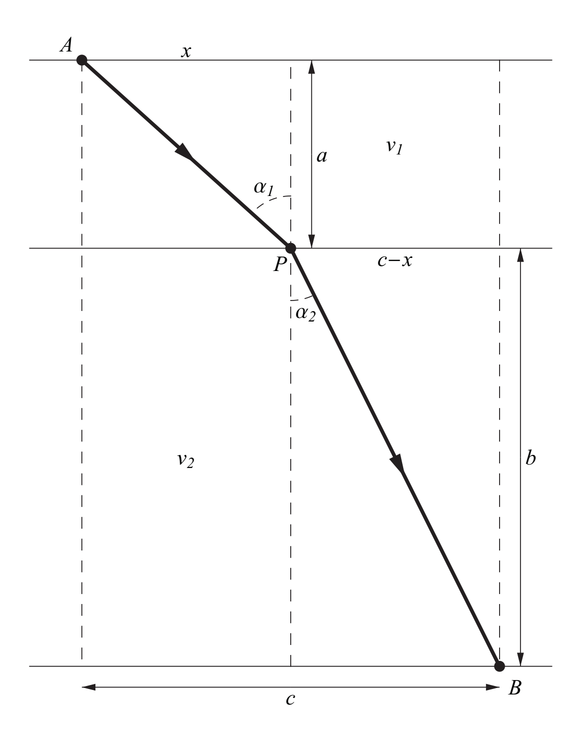


Figura 3.4: Refracción de un rayo de luz al cruzar de un medio transparente a otro en los que la luz se propaga con distinta velocidad.

Material complementario

La ley de de Snell

Un rayo de luz pasa de un medio transparente en el que su velocidad es v_1 *a otro medio en el que su velocidad es* v_2*, atravesando una superficie de separación (que puede formar parte material de uno de los dos medios). La ley de refracción de Snell establece una relación entre el ángulo de incidencia de un rayo y su velocidad, con las mismas magnitudes del rayo refractado. La suposición de que la luz sigue la trayectoria que requiere de un menor tiempo, conocida como* principio del mínimo tiempo de Fermat*, proporciona una base racional para obtener dicha relación.*

En la figura 3.4 se ilustra la modificación de la trayectoria de un rayo de luz que se desplaza de un punto A *a un punto* P *con una velocidad* v_1 *y que adquiere una velocidad* v_2*, por el cambio de densidad del medio, que se mantiene hasta alcanzar el punto* B*, atravesando una cierta superficie. Siguiendo la notación descrita en la figura 3.4, el tiempo total que necesita el rayo de luz para ir de* A

a B será

$$T = \frac{d(A,P)}{v_1} + \frac{d(P,B)}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}.$$

Si suponemos que el rayo de luz puede seleccionar su trayectoria para minimizar el tiempo en su recorrido desde A hasta B, se verificará que $\frac{dT}{dx} = 0$, es decir,

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}} \iff \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2},$$

donde α_1 y α_2 son los denominados, respectivamente, ángulo de incidencia y angulo de refracción. Puesto que podemos considerar las velocidades v_1 y v_2 como constantes tendremos que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = n,$$

para una cierta constante n.

En el supuesto analizado hemos considerado que la superficie de separación era plana. En caso de tratarse de una superficie con una forma cualquiera, los ángulos de incidencia y de refracción deben considerarse con respecto a la recta normal en el punto donde incide el rayo de luz. De esta forma podemos enunciar la ley de Snell del siguiente modo: la razón entre el seno del ángulo de incidencia de un rayo de luz sobre una determinada superficie de sepación de medios y el seno del ángulo de refracción, es constante para cada punto fijo de la superficie de separación.

Sigamos con la cuestión de Descartes sobre lentes. El esquema de la figura 3.5 nos servirá para plantear el problema convenientemente. Supongamos que un rayo de luz que parte de un cierto punto F', de coordenadas $(b, 0)$ y tal que $b < \infty$, pasa por un punto P de una curva que marca el límite de dos medios, y se refracta pasando por un punto fijo F que situaremos en el origen de coordenadas. Resulta sencillo comprobar que

$$\cos\angle PFF' = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{y} \quad \cos\angle PF'F = \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}}. \tag{3.3}$$

La situación que consideramos en el esquema se corresponde con la suposición $0 < \angle PF'F \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \angle PFF' < \frac{\pi}{2}$. Además, supone que los puntos F y F' se encuentran en lados distintos de la curva que hace el papel de lente para los rayos luminosos. En los restantes casos, aquellos en los que uno de los ángulos $\angle PF'F$ o $\angle PFF'$ es mayor que $\frac{\pi}{2}$ y el otro menor, no se va a producir el fenómeno de refracción pasando por el punto F exactamente, sino que los rayos se refractarán a lo largo de rectas que confluyen en el punto F pero alejándose de él. El procedimiento para analizar estas situaciones es análogo al que vamos a realizar a continuación.

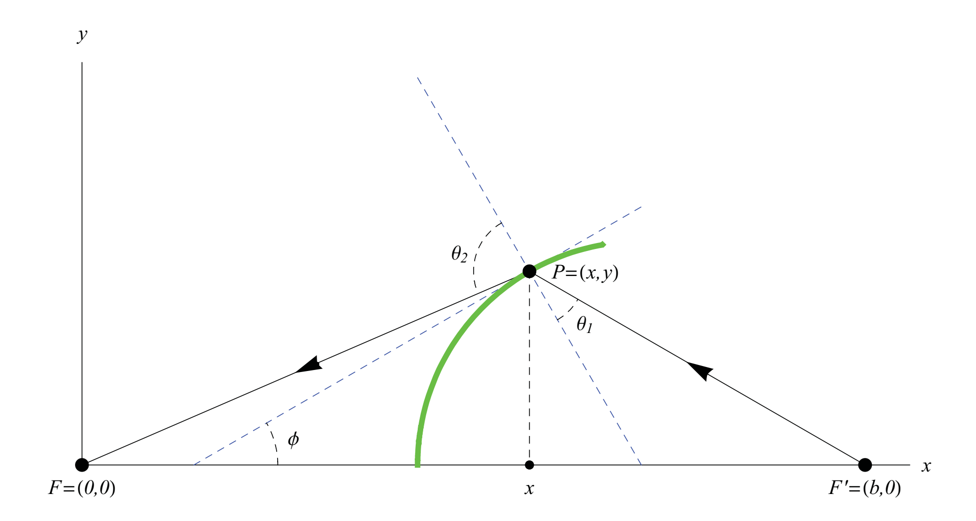


Figura 3.5: Esquema para la obtención de un perfil de lente con la propiedad deseada.

Siendo ϕ el ángulo que forma la tangente a la curva en el punto P con el eje OX y θ_1 y θ_2 los ángulos de incidencia y de refracción, respectivamente (véase la figura 3.5), podemos deducir fácilmente que

$$\angle PF'F = \frac{\pi}{2} - \phi - \theta_1 \qquad \text{y} \qquad \angle PFF' = \phi + \theta_2 - \frac{\pi}{2}.$$

Ahora, usando (3.3), tenemos que

$$\operatorname{sen}(\phi + \theta_1) = \cos \angle PF'F = \frac{b - x}{\sqrt{(b - x)^2 + y^2}}$$

y

$$\operatorname{sen}(\phi + \theta_2) = \cos \angle PFF' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Además, de las suposición $0 < \angle PF'F \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \angle PFF' < \frac{\pi}{2}$ deducimos que $0 \leq \phi + \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < \phi + \theta_2 \leq \pi$ y, por tanto

$$\cos(\phi + \theta_1) = \frac{y}{\sqrt{(b - x)^2 + y^2}} \qquad \text{y} \qquad \cos(\phi + \theta_2) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ahora podemos aplicar la ley de Snell. En efecto, para una constante n, que será el cociente de las velocidades en los dos medios que se suponen separados por la curva, se cumple que

$$n = \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{\operatorname{sen}(\phi + \theta_1) \cos \phi - \cos(\phi + \theta_1) \operatorname{sen} \phi}{\operatorname{sen}(\phi + \theta_2) \cos \phi - \cos(\phi + \theta_2) \operatorname{sen} \phi}$$

$$= \frac{\dfrac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}} - y' \dfrac{y}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y' \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}},$$

si sustituimos $\tan\phi = y'$. Una sencilla manipulación[3] nos da la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{\dfrac{nx}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}}}{\dfrac{ny}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}}} := -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = y\left(-\frac{nx}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{b-x}{((b-x)^2+y^2)^{3/2}}\right),$$

concluimos que se trata de una ecuación exacta y procedemos a calcular su función potencial. Puesto que

$$\int P(x,y)\,dx = n\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(b-x)^2+y^2} + \phi(y),$$

usando la expresión de $Q(x,y)$ obtenemos que $\phi(y) = C$ y, por tanto, las soluciones de la ecuación diferencial son las curvas

$$n\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(b-x)^2+y^2} = c;$$

es decir, son óvalos de Descartes con focos F y F'.

Las lentes buscadas deben tener el perfil descrito por óvalos de Descartes. La figura 3.6 muestra dos casos de los óvalos y el comportamiento de los rayos de luz al atravesarlos. A la izquierda aparece el caso en el que los focos están en distinto lado de la lente y a la derecha un caso en el que ambos focos se encuentran en el mismo lado. Las lentes solicitadas se obtendrán como superficies de revolución generadas a partir de los óvalos.

3.3. Una acrobacia aérea

En este ejemplo aplicaremos la técnica de las ecuaciones diferenciales exactas para analizar una acrobacia aérea. En concreto nos interesaremos por la velocidad y la pérdida de altitud de una avioneta que está cayendo en picado e intenta recuperar la posición horizontal.[4] Antes debemos, sin embargo, hacer

[3]La inversa de la función $f(x) = \frac{a-xb}{c+xd}$ es $f^{-1}(x) = \frac{a-cx}{b+dx}$.

[4]El ejemplo está tomado del libro *Introduction to Ordinary Differential Equations* de S. H. Saperstone, editado por Brooks/Cole Publishing Company en 1998, aunque la fuente original es el artículo *A model for predicting aircraft altitude loss in a pull-up from a dive*, *SIAM Rev.*, 1988, págs. 625–628.

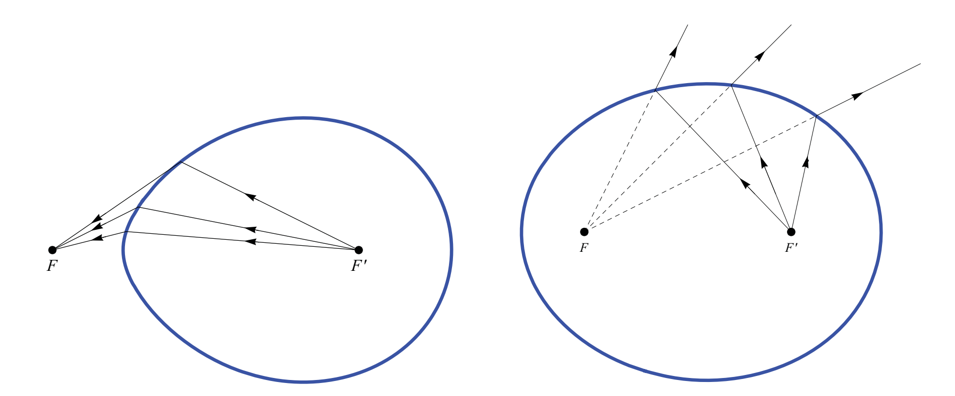


Figura 3.6: Dos ejemplos del comportamiento de los rayos de luz al atravesar lentes cuyo perfil son óvalos.

una pausa para la mejor comprensión del planteamiento de las ecuaciones que nos aparecerán.

Material complementario

Coordenadas intrínsecas de la aceleración

Supongamos que una partícula en movimiento en el plano se desplaza a lo largo de una curva de tal forma que en cada instante su posición viene dada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$*. Veamos que en cada instante la aceleración puede expresarse en términos de dos vectores unitarios* $\mathbf{T}$ *y* $\mathbf{N}$*, donde* $\mathbf{T}$ *es el vector tangente a la trayectoria en el instante* t *y* $\mathbf{N}$ *su vector normal, dirigido hacia el centro de curvatura de la trayectoria. En concreto, vamos a determinar los valores* a_t *y* a_n*, denominados aceleración tangencial y aceleración normal, respectivamente, tales que*

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = a_t\mathbf{T} + a_n\mathbf{N}.$$

El vector $\mathbf{T}$ *debe corresponderse con la dirección de la velocidad que se define como* $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$*; por tanto, teniendo en cuenta que debe ser de módulo uno, tenemos que*

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}(x'(t), y'(t)),$$

donde $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$*. Además, es claro que*

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}(-y'(t), x'(t)).$$

Ahora, se cumple que

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\|\mathbf{v}\|\mathbf{T})}{dt} = \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt}\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}.$$

Denotando por s la longitud de la curva entre el momento inicial t_0 y un cierto instante t, es decir $s = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{v}\|(z)\,dz$, y usando la identidad, fácilmente deducible por derivación,

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \kappa\frac{ds}{dt}\mathbf{N},$$

siendo κ la curvatura de la trayectoria, dada por[5]

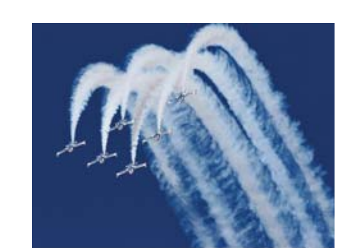
$$\kappa = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{\|\mathbf{v}\|^3},$$

tenemos que

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}.$$

A partir de esta expresión podemos definir las aceleraciones tangencial y normal, respectivamente, mediante las expresiones

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad y \qquad a_n = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$



Supongamos una avioneta de masa m volando a una altitud de y metros, con una velocidad de v m/seg. Además, consideraremos que la dirección de la velocidad es tangente a la trayectoria y forma un ángulo θ con la horizontal, tal y como se muestra en la figura 3.7 (por una cuestión práctica hemos transformado nuestra avioneta en una elipse; la imagen al margen muestra una instantánea de una escuadrilla de avionetas *reales* realizando una acrobacia que se podría analizar por el siguiente procedimiento). Tomaremos el ángulo θ negativo cuando la velocidad apunte por debajo de la horizontal. Suponiendo que la avioneta

---

[5]Esta expresión corresponde al caso en el que la curva esté dada mediante ecuaciones paramétricas. Si la curva está descrita en forma explícita por $y = y(x)$, la curvatura toma la forma $\kappa = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$ y, en caso de que esté dada por la ecuación polar $r = r(\theta)$, la expresión es $\kappa = \frac{r^2+2(r')^2-rr''}{(r^2+(r')^2)^{3/2}}$. Cualquiera de las expresiones para la curvatura puede obtenerse de las otras usando el correspondiente cambio de coordenadas.

La curvatura puede interpretarse del siguiente modo. En un breve intervalo de tiempo $[t, t+\Delta t]$, el arco de curva comprendido entre $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ puede aproximarse por el arco de una hipotética circunferencia tangente a la curva en $\mathbf{r}(t)$. El radio de dicha circunferencia, denominada circunferencia osculatriz es precisamente κ^{-1}, que se conoce como radio de curvatura. En el caso de una curva dada explícitamente, $y = y(x)$, el centro de la circunferencia osculatriz, llamado centro de curvatura, tiene coordenadas

$$\left(x - y'\frac{1+(y')^2}{y''}, y + \frac{1+(y')^2}{y''}\right).$$

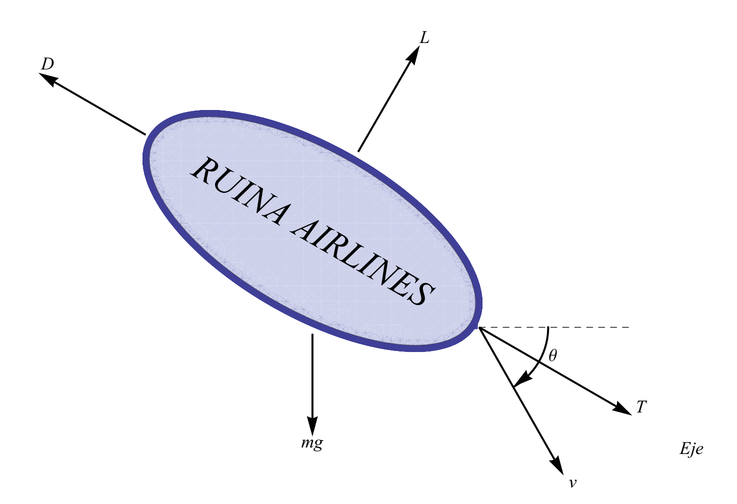


Figura 3.7: Esquema de las fuerzas actuando sobre la avioneta.

parte con una velocidad v_0 en el instante $t = 0$ y que en ese instante la velocidad forma con la horizontal un cierto ángulo $\theta_0 \in (-\pi/2, 0)$, determinaremos en primer lugar la velocidad de la avioneta, como función del ángulo θ, cuando haya retornado a la horizontal; es decir, cuando $\theta = 0$. Posteriormente encontraremos una ecuación que describirá la perdida de altitud de la avioneta cuando θ varía de θ_0 hasta cero. Las fuerzas actuando sobre el aparato están descritas en la figura 3.7. Tomaremos la descomposición de cada fuerza en las componentes tangencial y radial (o normal) de la trayectoria.

Por el comentario anterior, sabemos que la componente tangencial de la aceleración es $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, siendo v la velocidad. Así, por la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta que la fuerza del peso en este caso actúa como $-mg \operatorname{sen} \theta$, tendremos que

$$m\frac{dv}{dt} = -mg \operatorname{sen} \theta + T - D,$$

donde D es la fuerza de rozamiento y T es el empuje[6] de la avioneta. Si suponemos, por simplicidad, que durante la maniobra T y D son iguales en magnitud, llegamos a la ecuación

$$m\frac{dv}{dt} = -mg \operatorname{sen} \theta. \tag{3.4}$$

La componente normal de la aceleración es igual a κv^2, donde κ es la curvatura de la trayectoria de vuelo. En un breve intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, la

[6] El empuje es la fuerza de reacción descrita cuantitativamente por la tercera ley de Newton. Cuando un sistema expele o acelera masa en una dirección (acción), la masa acelerada causará una fuerza igual en dirección contraria (reacción). Por ejemplo, un avión genera empuje hacia adelante cuando la hélice que gira empuja el aire hacia atrás del avión. En este caso el empuje hacia adelante es proporcional a la masa del aire multiplicada por la velocidad media del flujo de aire.

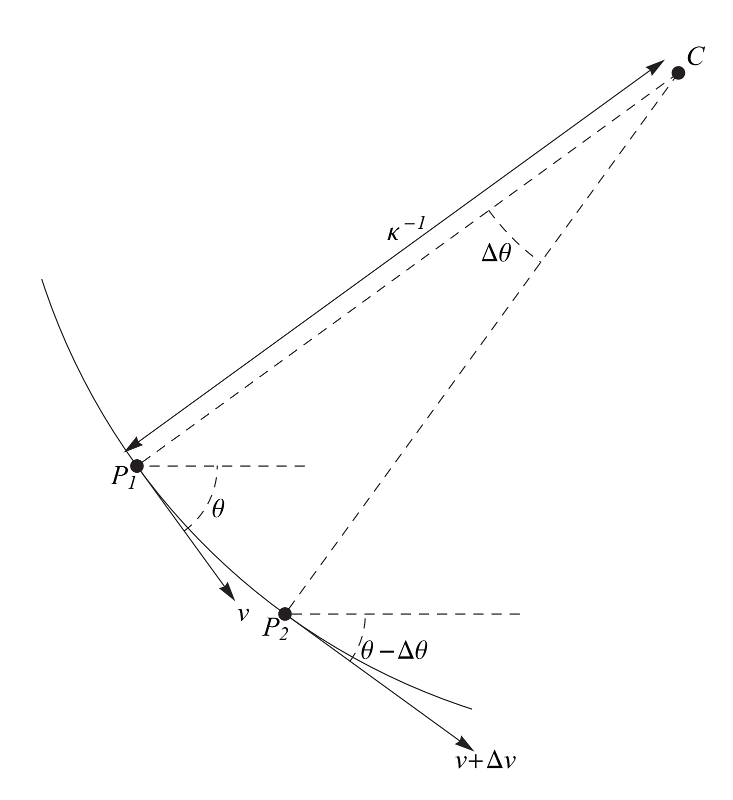


Figura 3.8: Desplazamiento de la avioneta en un intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$.

avioneta se desplazará de un punto P_1 a otro P_2 describiendo una curva que podemos aproximar por una circunferencia de radio κ^{-1} y centrada en el centro de curvatura, que denotaremos por C (véase la figura 3.8). A lo largo de ese desplazamiento se producirá una variación $-\Delta\theta$ en el ángulo con la horizontal, que se corresponderá con la variación del ángulo formado por la avioneta y el centro de la circunferencia osculatriz. Por tanto, la longitud de la trayectoria descrita por la avioneta puede aproximarse por $\kappa^{-1}\Delta\theta$. Esta misma longitud puede tomarse como $v\Delta t$ y, de este modo, es claro que

$$\kappa^{-1}\Delta\theta = v\Delta t \iff \kappa = \frac{1}{v}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Ahora, si $\Delta t \to 0$, tendremos que

$$\kappa = \frac{1}{v}\frac{d\theta}{dt}.$$

De esta relación, aplicando la segunda ley de Newton, tendremos que

$$m\kappa v^2 = mv\frac{d\theta}{dt} = L - mg\cos\theta,$$

donde $-mg\cos\theta$ es la componente radial del peso y L es la sustentación o fuerza de elevación (*lifting force*).[7] Es conocido que la fuerza de elevación actúa en la dirección normal de la trayectoria y se decribe como

$$L = \frac{1}{2}m\rho_A SC_L v^2,$$

donde m es la masa, ρ_A la densidad del aire, S la superficie del ala de la avioneta y C_L un coeficiente numérico específico de cada tipo de ala. Denotando $k = \frac{1}{2}\rho_A SC_L$, deducimos la ecuación

$$\frac{d\theta}{dt} = kv - g\frac{\cos\theta}{v}. \tag{3.5}$$

Observando que el lado derecho de las ecuaciones (3.4) y (3.5) es independiente de t y suponiendo que $v = v(\theta)$, llegamos a la ecuación

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{-g\operatorname{sen}\theta}{kv - g\frac{\cos\theta}{v}} = -\frac{gv\operatorname{sen}\theta}{kv^2 - g\cos\theta}.$$

Tomando $P(\theta, v) = gv\operatorname{sen}\theta$ y $Q(\theta, v) = kv^2 - g\cos\theta$, se cumple que

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial \theta} = g\operatorname{sen}\theta$$

y, por tanto, estamos ante una ecuación diferencial exacta. Integrando Q respecto de v tendremos que la función potencial será

$$V(\theta, v) = \frac{k}{3}v^3 - gv\cos\theta + \phi(\theta).$$

Ahora, usando que $\frac{\partial V}{\partial \theta} = P$, llegamos a que la solución de la ecuación viene descrita por la ecuación implícita

$$v^3 - \frac{3g}{k}v\cos\theta = C.$$

Finalmente, la condición inicial $v(\theta_0) = v_0$ nos da la relación

$$v^3 - \frac{3g}{k}v\cos\theta = v_0^3 - \frac{3g}{k}v_0\cos\theta_0.$$

De acuerdo con nuestro objetivo inicial, la determinación de la velocidad de la avioneta al recuperar la posición horizontal, que se corresponde con $\theta = 0$, estamos interesados en obtener el valor $v_f = v(0)$ que estará dado por la solución de la ecuación

$$v_f^3 - \frac{3g}{k}v_f = v_0^3 - \frac{3g}{k}v_0\cos\theta_0.$$

Esta ecuación puede resolverse de manera explícita ya que se trata de una ecuación cúbica, pero el resultado resulta de poca utilidad. Por ejemplo, si pedimos a *Mathematica* que nos la resuelva, es decir, que ejecute el *input*

[7] La sustentación es la fuerza generada sobre un cuerpo que se desplaza a través de un fluido, de dirección perpendicular a la de la velocidad de la corriente incidente. Es la principal fuerza que permite que una aeronave con alas se mantenga en vuelo. Ésta, al ser mayor que el peso total de la aeronave, le permite despegar.

```
Solve[vf^3 - 3*9.8*vf/k == theta0^3 - 3*9.8*Cos[theta0]*v0/k, vf]
```

nos devolverá unos resultados más bien inútiles desde un punto de vista práctico. La opción apropiada en este caso es intentar resolver la ecuación de un modo aproximado. Para esto es necesario considerar valores numéricos para los parámetros que aparecen en nuestra ecuación. La constante k depende de cada tipo de aeronave. Consideraremos el valor $k = 0.00145$ correspondiente al modelo A-7E de bombardero ligero de la marina americana. Además, tomaremos $\theta_0 = -\pi/4$ radianes y $v_0 = 150$ m/seg. Con estos valores estamos en condiciones de usar el método de Newton para aproximar las raíces de nuestra ecuación de tercer grado. Usando nuevamente *Mathematica*, en concreto usando el código

```
theta0 = -Pi/4; k = 0.00145; v0 = 150;
FindRoot[vf^3-3*9.8*vf/k ==v0^3-3*9.8*Cos[theta0]*v0/k,{vf, 150}]
```

llegaremos al resultado $v_f = 166.255$ m/seg.[8]

Una vez obtenido este valor procederemos a determinar la pérdida de altitud durante la maniobra. La componente vertical de la velocidad está dada por la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = v \operatorname{sen}\theta.$$

Si suponemos ahora que $y = y(v)$, diviendo la ecuación anterior por (3.4), concluimos que

$$\frac{dy}{dv} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dv}{dt}} = -\frac{v}{g}.$$

Esta ecuación es de variables separadas y su solución general toma la forma

$$y = C - \frac{v^2}{2g}.$$

Si denotamos por y_0 la altitud correspondiente a la velocidad inicial v_0, tendremos la condición inicial $y(v_0) = y_0$ y entonces la altitud como función de la velocidad será

$$y - y_0 = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}.$$

Para concluir, si y_f es la altitud correspondiente a la velocidad final v_f, llegaremos a que la variación de la altitud será

$$\Delta y = y_f - y_0 = \frac{v_0^2 - v_f^2}{2g},$$

que en nuestro caso particular da $\Delta y = -262.275$ m.

[8] Recordad que el comando `FindRoot` aplica el método de Newton a la ecuación que incluyamos en la primera posición, comenzando con el valor que aparece en la última posición, en este caso 150.

3.4. Factores integrantes

Sería deseable que el mayor número posible de ecuaciones de primer orden fuesen exactas. Existen algunas ecuaciones que no siendo exactas pueden llegar a serlo. De hecho, puede ocurrir que $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ no sea exacta y que sin embargo la ecuación equivalente $x' = -\frac{P(t,x)\mu(t,x)}{Q(t,x)\mu(t,x)}$ sí lo sea. Diremos que la función $\mu(t,x)$ es un factor integrante de la ecuación.

La determinación de factores integrantes no es, en general, una cuestión sencilla; sólo se pueden obtener en algunos casos particulares. En primer lugar se debe verificar que

$$\frac{\partial}{\partial x}(P(t,x)\mu(t,x)) = \frac{\partial}{\partial t}(Q(t,x)\mu(t,x)).$$

Esta condición puede reescribirse como

$$\mu(t,x)\left(\frac{\partial}{\partial x}P(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,x)\right) = Q(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\mu(t,x) - P(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\mu(t,x); \quad (3.6)$$

es decir, se trata de una ecuación en derivadas parciales. No siempre es posible resolver esta ecuación; sin embargo, en algunos casos particulares, puede hacerse.

Supongamos que estamos interesados en un factor integrante que dependa únicamente de x; es decir, de la forma $\mu = \mu(x)$. En este caso la ecuación en derivadas parciales 3.6 se transforma en la ecuación diferencial ordinaria

$$\mu(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}P(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,x)\right) = -P(t,x)\frac{d}{dx}\mu(x).$$

Por tanto, el factor integrante de la forma $\mu = \mu(x)$ existirá si la función

$$\frac{1}{P(t,x)}\left(\frac{\partial}{\partial x}P(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,x)\right)$$

depende únicamente de la variable x. Sí es así, tendremos que

$$\mu(x) = \exp\left(-\int\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right)\frac{dx}{P}\right),$$

donde $\exp(z) = e^z$. La suposición de que el factor integrante dependa únicamente de t (es decir, $\mu = \mu(t)$) da lugar a la expresión

$$\mu(t) = \exp\left(\int\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right)\frac{dt}{Q}\right).$$

supesto que la función

$$\frac{1}{Q(t,x)}\left(\frac{\partial}{\partial x}P(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,x)\right)$$

dependa exclusivamente de la variable t.

Aunque, como ya hemos comentado, no es posible dar una solución general para (3.6), otras suposiciones sobre la forma del factor integrante pueden permitir resolverla. Puede pensarse, por ejemplo, en factores integrantes de la forma $\mu(t,x) = g(t+x)$ o $\mu(t,x) = h(tx)$. Veamos algunos ejemplos de resolución de ecuaciones que se transforman en exactas utilizando factores integrantes.

***Ejemplo* 14.** Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$x\,dt + (t^2x - t)\,dx = 0.$$

Es claro que

$$\frac{\partial}{\partial x}P(t,x) = 1$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t,x) = 2tx - 1.$$

De esta forma tenemos que

$$\frac{1}{Q(t,x)}\left(\frac{\partial}{\partial x}P(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,x)\right) = \frac{2(1-tx)}{t^2x - t} = -\frac{2}{t}$$

y podemos asegurar la existencia de un factor integrante dependiente de t. Además,

$$\mu(t) = e^{-2\int \frac{dt}{t}} = \frac{1}{t^2}.$$

Ahora la ecuación, equivalente a la propuesta,

$$\frac{x}{t^2}\,dt + \frac{tx-1}{t}\,dx = 0$$

es exacta. Procedamos a determinar la función potencial,

$$V(t,x) = \int \frac{x}{t^2}\,dt + \psi(x) = -\frac{x}{t} + \psi(x)$$

y

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = x \Longrightarrow \psi(x) = \frac{x^2}{2} + k.$$

Con lo que concluimos que las soluciones de la ecuación vienen dadas por

$$x\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{t}\right) = c.$$

Algunos miembros de esta familia de curvas se muestran en la figura 3.9. ◁

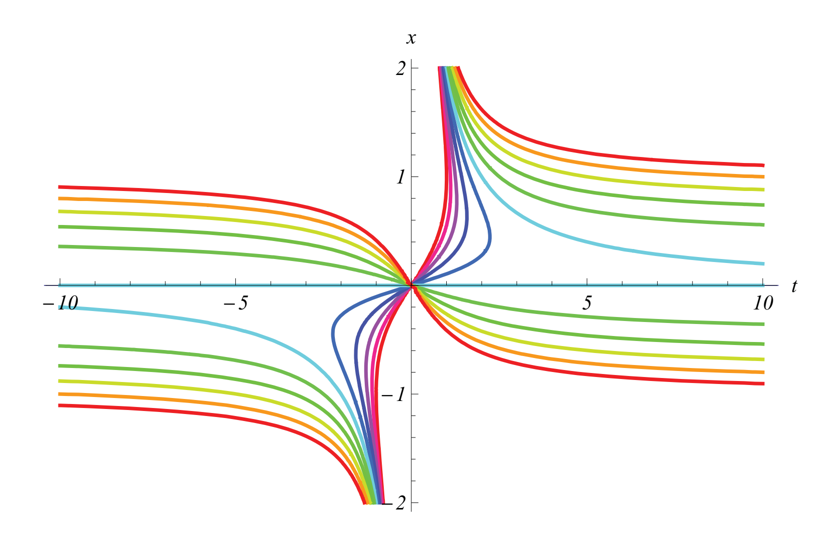


Figura 3.9: La imagen muestra algunas curvas de la familia de soluciones de la ecuación del Ejemplo 14.

***Ejemplo* 15.** Determinar un factor integrante de la forma $\mu(t,x) = g(t^2+x^2)$ para resolver la ecuación

$$x\,dt - t\,dx = 0.$$

La ecuación (3.6) en este caso se reescribe como

$$g(t^2+x^2)\left(\frac{\partial}{\partial x}P(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,x)\right) = g'(t^2+x^2)(2tQ(t,x) - 2xP(t,x)).$$

Teniendo en cuenta las expresiones para P y Q obtenemos la ecuación

$$\frac{g'(t^2+x^2)}{g(t^2+x^2)} = -\frac{1}{t^2+x^2}$$

que podemos transformar en la ecuación

$$\frac{g'(s)}{g(s)} = -\frac{1}{s}.$$

Considerando la solución $g(s) = 1/s$ llegamos al factor integrante $\mu(t,x) = 1/(t^2+x^2)$. Ahora la ecuación

$$\frac{x}{t^2+x^2}\,dt - \frac{t}{t^2+x^2}\,dx = 0$$

es exacta. La función potencial será

$$V(t,x) = \int \frac{x}{t^2+x^2}\,dt + \psi(x) = \int \frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{t}{x}\right)^2+1}\,dt + \psi(x) = \arctan\left(\frac{t}{x}\right) + \psi(x).$$

Teniendo en cuenta que se debe cumplir que

$$\frac{\partial}{\partial x} V(t,x) = -\frac{t}{t^2 + x^2}$$

concluimos que $\psi(x) = k$ y la solución general de la ecuación vendrá dada por[9]

$$\arctan\left(\frac{t}{x}\right) = c \Longrightarrow x = Ct,$$

que se corresponde con una familia de rectas pasando por el origen. $\triangleleft$

3.5. Esquiando una pendiente

Supongamos un esquiador de masa m que se desliza por una pendiente que forma un ángulo α con la horizontal, tal y como se muestra en la figura 3.10, y manteniendo una posición fija sobre los esquís. (De nuevo, por ser prácticos, hemos transformado a nuestro esquiador en un monolito, de este modo nos aseguramos que mantendrá la posición fija. La imagen del margen nos muestra un esquiador descendiendo una pendiente aunque en ese caso no podemos asegurar que mantenga la posición fija sobre los esquís.) Nos interesaría conocer la velocidad que alcanzaría el esquiador si suponemos que se desliza por la pendiente durante un tiempo largo. Esta velocidad se denomina terminal y se considera que coincide con el límite de la velocidad cuando $t \to \infty$.

Las fuerzas que actúan sobre nuestro esquiador son el peso mg, la fuerza de rozamiento entre la pendiente y el esquiador F y la fuerza de rozamiento aerodinámico D que se produce por la resistencia al aire que muestra el esquiador.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, el movimiento del esquiador vendrá descrito por la ecuación

$$m\frac{dv}{dt} = mg \operatorname{sen}\alpha - F - D$$

donde v denota su velocidad y $mg \operatorname{sen}\alpha$ es la componente del peso en la dirección del movimiento. La componente del peso en la dirección perpendicular, $mg\cos\alpha$, se cancela por la reacción del suelo de la pendiente; además, es conocido que la fuerza de rozamiento F entre la pendiente y el esquiador es proporcional a esta componente del peso, por tanto,

$$F = \nu mg \cos\alpha.$$

[9]Para llegar a este resultado, obviamente, no necesitábamos tanto rodeo: la ecuación puede reescribirse como $x' = x/t$ y es una ecuación de variables separadas que sabemos resolver sin ningún problema. El objetivo de este ejemplo es mostrar cómo es posible buscar otros tipos de factores integrantes.

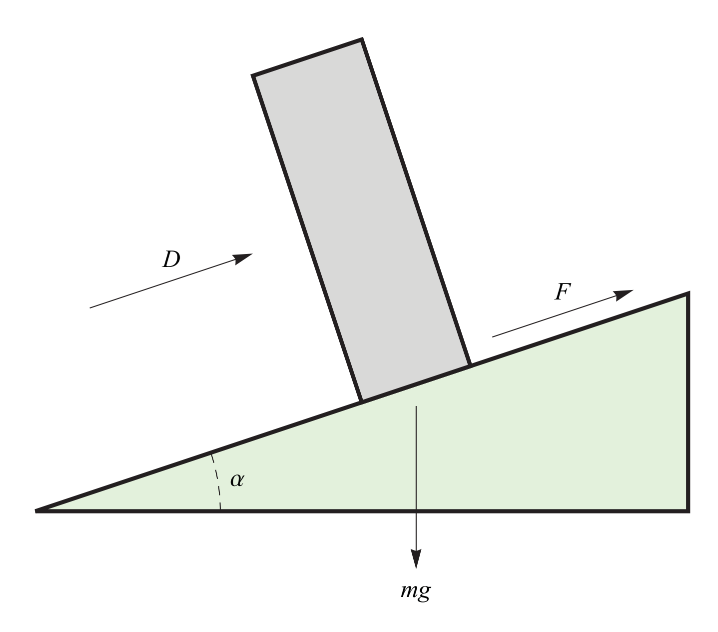


Figura 3.10: Esquema de las fuerzas que actúan sobre el esquiador durante el descenso de la pendiente.

El factor ν se conoce como coeficiente de rozamiento. Podemos suponer también que la fuerza de rozamiento aerodinámico D toma la forma

$$D = c_D A\rho v^2,$$

donde c_D es el coeficiente de rozamiento aerodinámico, A el área frontal del cuerpo del esquiador y ρ la densidad del aire. Con esto, la ecuación del movimiento se convierte en

$$m\frac{dv}{dt} = mg\operatorname{sen}\alpha - \nu mg\cos\alpha - c_D A\rho v^2.$$

Supongamos que tomamos como nueva variable la posición del esquiador $x = x(t)$.[10] Así, usando que $\frac{dx}{dt} = v$, tendremos que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$

y la ecuación del movimiento se convierte en

$$mv\frac{dv}{dx} = mg\operatorname{sen}\alpha - \nu mg\cos\alpha - c_D A\rho v^2.$$

[10] Es decir, tenemos un esquema del tipo

$$t \longleftarrow v \longrightarrow x \longrightarrow t.$$

Esta ecuación puede reescribirse como

$$(c_D A\rho v^2 + \nu mg\cos\alpha - mg\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,dx + mv\,dv = 0.$$

Tomando

$$P(x,v) = c_D A\rho v^2 + \nu mg\cos\alpha - mg\,\mathrm{sen}\,\alpha \quad \text{y} \quad Q(x,v) = mv$$

podemos comprobar fácilmente que

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 2c_D A\rho v \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

para deducir que la ecuación no es exacta. Sin embargo resulta elemental comprobar que

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2c_D A\rho}{m},$$

lo que nos asegura que podemos encontrar un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x)$. Es más,

$$\mu(x) = \exp\left(\int\left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{dx}{Q}\right) = e^{\frac{2c_D A\rho}{m}x}.$$

Con este factor integrante convertimos la ecuación en exacta y obtenemos como solución $V(x,v) = K$, donde la función potencial toma la forma

$$V(x,v) = \frac{m}{2}\left(v^2 - \frac{mg(\mathrm{sen}\,\alpha - \nu\cos\alpha)}{c_D A\rho}\right)e^{\frac{2c_D A\rho}{m}x}.$$

Tomando como condición inicial $v(0) = 0$ (es decir, el esquiador parte del reposo) se tiene que

$$v^2 = \frac{mg(\mathrm{sen}\,\alpha - \nu\cos\alpha)}{c_D A\rho}\left(1 - e^{-\frac{2c_D A\rho}{m}x}\right)$$

o

$$v = \overline{v}\left(1 - e^{-\frac{2c_D A\rho}{m}x}\right)^{1/2},$$

donde

$$\overline{v} = \left(\frac{mg(\mathrm{sen}\,\alpha - \nu\cos\alpha)}{c_D A\rho}\right)^{1/2}.$$

Por supuesto, hemos considerado que $\mathrm{sen}\,\alpha - \nu\cos\alpha > 0$ (o $\tan\alpha > \nu$).

Comprobemos que la velocidad terminal del esquiador coincide con $\overline{v}$. Usando que $v = \frac{dx}{dt}$, la condición $x(0) = 0$ y denotando $b = \frac{c_D A\rho}{m}$, llegamos a que

$$\overline{v}t = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{1 - e^{-2bs}}} = \frac{1}{b}\log\left(e^{bx} + \sqrt{e^{2bx} - 1}\right).$$

Si despejamos la posición como función del tiempo tenemos que

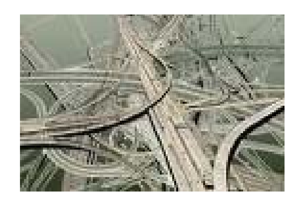
$$x = \frac{1}{b}\log\left(\frac{e^{b\overline{v}t} + e^{-b\overline{v}t}}{2}\right)$$

y $x \to \infty$ cuando $t \to \infty$. De esta forma

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{x\to\infty} v(x) = \lim_{x\to\infty} \overline{v}\left(1 - e^{-\frac{2c_D A\rho}{m}x}\right)^{1/2} = \overline{v}.$$



3.6. Una curva de transición





Sobre una circunferencia el radio de curvatura es, obviamente, constante e igual a su radio y sobre una recta el radio de curvatura podemos considerarlo como infinito. La fuerza centrípeta que actúa sobre un cuerpo en movimiento es inversamente proporcional al radio de curvatura y será nula cuando el desplazamiento de un móvil se produzca sobre una recta y constante cuando el movimiento tenga lugar sobre una circunferencia. El paso de un movimiento rectilíneo a uno circular, o viceversa, sin una zona de transición puede producir efectos desagradables debidos al cambio brusco en la fuerza centrípeta. Esto podría suceder, por ejemplo, en las carreteras con curvas o en las montañas rusas con vueltas completas (véanse las imágenes en el margen). Para evitar ese efecto, los tramos rectilíneos y curvilíneos se unen mediante lo que se denominan curvas de transición, en las que se produce un cambio progresivo del radio de curvatura. Una de estas curvas, aunque no la única, es la denominada *clotoide* o *espiral de Cornu*.

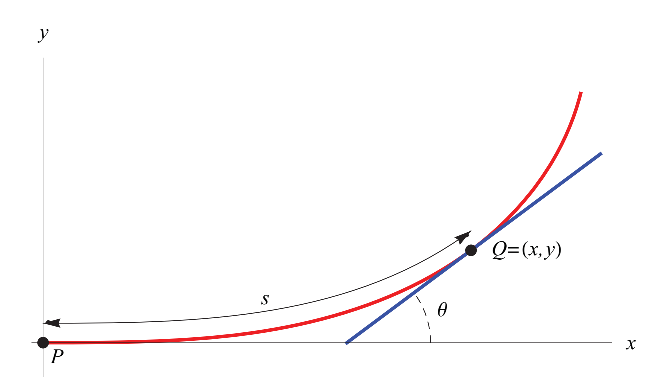


Figura 3.11: Esquema para la determinación de la clotoide.

Supongamos que la curvatura de nuestra curva de transición en cada uno de sus puntos es proporcional a la distancia que hemos recorrido sobre ella desde un cierto punto fijo P (ese punto fijo podría ser donde haya finalizado nuestro tramo rectilíneo). Es decir, si denotamos por s la longitud desde el punto P hasta un punto cualquiera de nuestra curva Q, ésta vendrá definida por la ecuación

$$s = \alpha\kappa, \tag{3.7}$$

para una cierta constante α, donde κ denota la curvatura. La figura 3.11 muestra un esquema de la situación. Supongamos que la curva de transición está descrita en ecuaciones paramétricas $(x, y) = (x(s), y(s))$, donde s es el parámetro arco; es decir, se verificará que

$$s = \int_0^s \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt,$$

donde las derivadas se han calculado respecto a s. Resulta evidente a partir de esta identidad, sin más que derivar respecto a s, que

$$1 = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}. \tag{3.8}$$

Sea θ el ángulo formado por la recta tangente en el punto $Q = (x(s), y(s))$. Tendremos que

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}. \tag{3.9}$$

Usando (3.8) y (3.9), podemos probar que $\kappa^{-1} = \frac{ds}{d\theta}$. En efecto, suponiendo que $s = s(\theta)$ y derivando respecto a θ la ecuación (3.9), llegamos a la igualdad

$$1 + (\tan\theta)^2 = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}}{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}\frac{ds}{d\theta},$$

que puede reescribirse como

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}{\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}}.$$

De este modo, teniendo en cuenta (3.8) y la expresión para la curvatura para curvas en coordenadas paramétricas, concluimos que

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}} = \kappa^{-1}.$$

Por tanto, la ecuación que define la clotoide (3.7) se transforma en $s\frac{ds}{d\theta} = \alpha$ que, con la condición inicial $s(0) = 0$, nos da $s^2 = 2\alpha\theta$. Ahora, podemos considerar las relaciones

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\theta,$$

que se deducen inmediatamente de (3.8) y (3.9), y las ecuaciones de la clotoide se obtienen sin más que integrarlas. En efecto, usando que cuando $s = 0$ se tiene que $x = 0$ e $y = 0$ y, por tanto,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta = \cos\left(\frac{s^2}{2\alpha}\right) \Longrightarrow x = \int_0^s \cos\left(\frac{r^2}{2\alpha}\right)\,dr$$

y

$$\frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{s^2}{2\alpha}\right) \Longrightarrow y = \int_0^s \operatorname{sen}\left(\frac{r^2}{2\alpha}\right)\,dr.$$

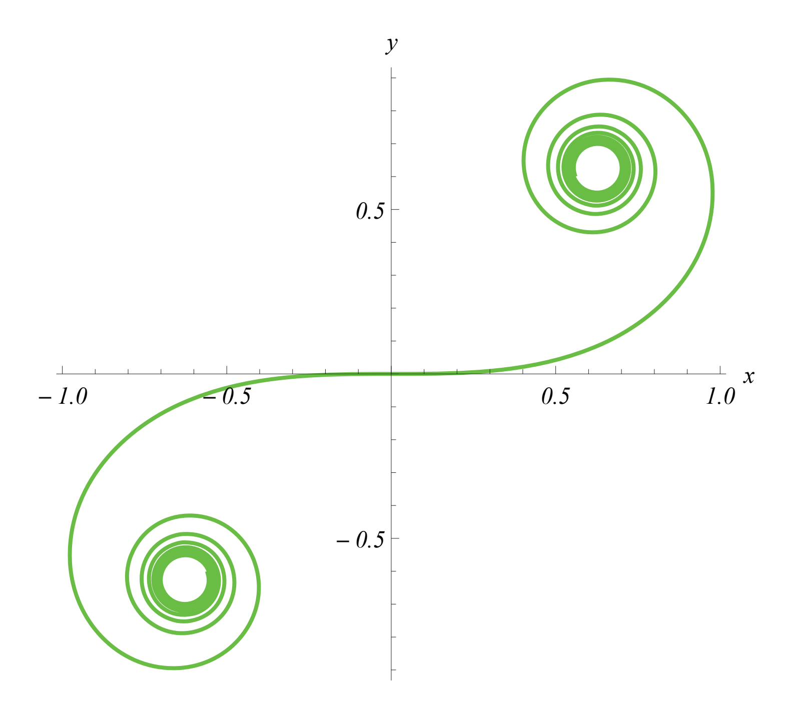


Figura 3.12: La clotoide o espiral de Cornu para $2\alpha = 1$.

La figura 3.12 muestra la clotoide cuando $2\alpha = 1$. Observar cómo la curva se va acumulando alrededor de un cierto punto cuando $s \to \pm\infty$. En el caso de $+\infty$, ese punto es

$$\left(\int_0^\infty \cos\left(\frac{r^2}{2\alpha}\right) dr, \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{r^2}{2\alpha}\right) dr \right) = \left(\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{2}, \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{2} \right).$$

La evaluación de estas integrales, conocidas como integrales de Fresnel y que aparecen en la teoría de la difracción de la luz, es una cuestión avanzada y que queda fuera del alcance de estas notas; sin embargo, su valor puede encontrarse sin dificultad en cualquier libro de tablas integrales.

3.7. Problemas

Problema 86. Determinar el valor de a para que las siguientes ecuaciones diferenciales sean exactas. En ese caso obtener la solución general.

a) $(tx^2 + at^2x)\,dt + t^2(t + x)\,dx = 0$,

b) $t + xe^{2tx} + ate^{2tx}x' = 0$,

c) $2atx + (1 + t^2)x' = 0$,

d) $\dfrac{(t-x)\,dt + (t+x)\,dx}{(t^2+x^2)^a} = 0.$

Problema 87. Determinar las funciones $P(t,x)$ para las que es exacta la ecuación

$$P(t,x)\,dt + \left(te^{tx} + 2tx + \frac{1}{t}\right)\,dx = 0.$$

Obtener la solución general de la ecuación resultante.

Problema 88. Determinar las funciones $Q(t,x)$ para las que es exacta la ecuación

$$\left(\sqrt{\frac{x}{t}} + \frac{t}{t^2+x}\right)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0.$$

Obtener la solución general de la ecuación resultante.

Problema 89. Supongamos que $xQ(t,x) - tP(t,x) \neq 0$. Probar que si

$$\frac{1}{xQ(t,x) - tP(t,x)}\left(\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}\right) = g(tx),$$

entonces la ecuación diferencial $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ admite un factor integrante de la forma $\mu(t,x) = h(tx)$, donde $h(z) = \exp\left(\int g(z)\,dz\right)$. ¿Qué ocurre si

$$xQ(t,x) - tP(t,x) = 0?$$

Utilizar este hecho para encontrar la solución general de la ecuación

$$(2x + t^2x^3)\,dt + (2t - 2t^3x^2)\,dx = 0.$$

Determinar una condición que nos permita asegurar que la ecuación diferencial $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ admite un factor integrante del tipo $\mu(t,x) = h(t+x)$.

Problema 90. Sea la ecuación

$$xf(tx)\,dt + tg(tx)\,dx = 0,$$

con $f(tx) \neq g(tx)$. Probar que

$$\mu(t,x) = \frac{1}{tx(f(tx) - g(tx))}$$

es un factor integrante para la ecuación dada.

Utilizar este hecho para encontrar la solución general de las ecuaciones

a) $x((tx)^2 + 2)\,dt + 2t(1 - (tx)^2)\,dx = 0,$

b) $x(2tx + 1)\,dt + t(1 + 2tx - (tx)^3)\,dx = 0.$

Problema 91. Demostrar que si $M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0$ puede escribirse como
$$t^r x^s (mx\,dt + nt\,dx) + t^v x^u (px\,dt + qt\,dx) = 0,$$
donde r, s, v, u, m, n, p y q son constantes y $mq - np \neq 0$, entonces la ecuación diferencial dada admite un factor integrante de la forma $t^\alpha x^\beta$, con α y β constantes a determinar.

Utilizar este hecho para obtener la solución general de la ecuaciones

a) $t(4x\,dt + 2t\,dx) + x^3(3x\,dt + 5t\,dx) = 0$,

b) $(8x\,dt + 8t\,dx) + t^2x^3(4x\,dt + 5t\,dx) = 0$,

c) $t^3x^3(2x\,dt + t\,dx) - (5x\,dt + 7t\,dx) = 0$.

Problema 92. Probar que si la ecuación $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ es homogénea, entonces admite un factor integrante de la forma
$$\mu(t,x) = \frac{1}{tP(t,x) + xQ(t,x)},$$
supuesto que $tP(t,x) + xQ(t,x) \neq 0$. Estudiar que ocurre si
$$tP(t,x) + xQ(t,x) = 0.$$

Problema 93. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones sabiendo que admiten un factor integrante del tipo que se indica.

a) $(x^2 + 2tx)\,dt - t^2\,dx = 0$, con $\mu(t,x) = x^n$,

b) $(3x^2 - t)\,dt + (2x^3 - 6tx)\,dx = 0$, con $\mu(t,x) = h(t + x^2)$,

c) $(3t + 2x + x^2)\,dt + (t + 4tx + 5x^2)\,dx = 0$, con $\mu(t,x) = h(t + x^2)$,

d) $(t + t^4 + 2t^2x^2 + x^4)\,dt + x\,dx = 0$, con $\mu(t,x) = h(t^2 + x^2)$.

Problema 94. Obtener la solución general de la ecuación
$$x' = \frac{-2tx}{(t^2 + x^2)^2 + x^2 - t^2}.$$
Algunas de las soluciones de esta ecuación se muestran en la gráfica que aparece en la figura 3.13.
Indicación: Escribiendo la ecuación en una forma apropiada, es posible determinar un factor integrante de la forma $\mu(t,x) = g(t^2 + x^2)$.

Problema 95. Consideramos[11] la ecuación diferencial
$$t^2(1-t)\frac{d^2x}{dt^2} + 2t(2-t)\frac{dx}{dt} + 2(1+t)x = t^2.$$

[11] Este problema está inspirado por el Problema 2792 propuesto en 1919, en la revista *The American Mathematical Monthly* (pág. 414), por B. J. Brown.

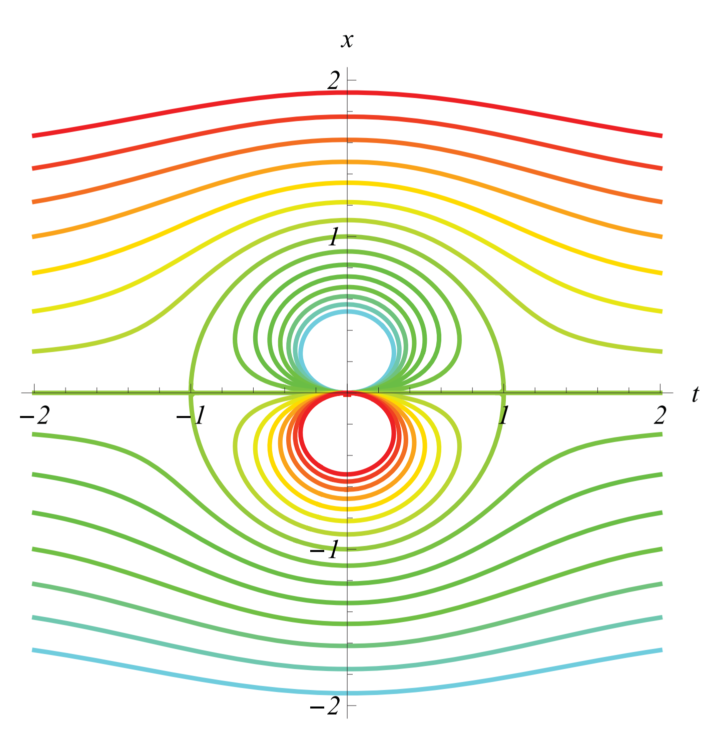


Figura 3.13: Algunas de las soluciones del Problema 94.

a) Probar que la ecuación propuesta se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\left(t^2(1-t)\frac{dx}{dt}+t(t+2)x\right)=t^2.$$

b) Usando el apartado anterior, obtener la solución general de la ecuación propuesta determinando un factor integrante apropiado.

Problema 96. En un sistema de referencia OXY consideramos el punto $A=(0,a)$. Determinar todas las curvas cuya recta tangente corta al eje OX en un punto P equidistante de A y del punto de tangencia.
Indicación: La ecuación resultante podrá resolverse determinando un factor integrante adecuado.

Problema 97. Sea la ecuación

$$(t^2x+x^3-tx)\,dt+t^2\,dx=0.$$

Obtener la solución general de la ecuación dada determinando un factor integrante de la forma $\mu(t,x)=\frac{1}{t^3}f\left(\frac{x}{t}\right)$.

Problema 98. Sean $\mu_1(t,x)$ y $\mu_2(t,x)$ dos factores integrantes para la ecuación

$$x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}.$$

Probar que la relación

$$\frac{\mu_1(t,x)}{\mu_2(t,x)} = c$$

define implícitamente la solución general de la ecuación dada.

Buscar dos factores integrantes (uno de ellos de la forma $\mu(t,x) = g(x/t)$) para la ecuación

$$tx' \cos\frac{x}{t} = x\cos\frac{x}{t} - t$$

y determinar la solución general mediante el procedimiento descrito.

Problema 99. Sea la ecuación $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$.

a) Probar que si

$$\frac{1}{P(t,x) + \operatorname{sen} t Q(t,x)}\left(\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial P(t,x)}{\partial x} - \frac{P(t,x)}{x}\right) = h(x+\cos t),$$

para una cierta función h, entonces existe un factor integrante de la forma $\mu(t,x) = xg(x+\cos t)$ para la ecuación dada.

b) Obtener la solución general de la ecuación

$$x' = \frac{x^2 \operatorname{sen} t}{\cos t(x + 2\cos t)}.$$

Capítulo 4

Ecuaciones lineales de primer orden

4.1. Absorción de medicamentos y ecuaciones lineales de primer orden

Aunque, como veremos enseguida, las llamadas ecuaciones lineales de primer orden pueden resolverse como ecuaciones exactas, ya que siempre admiten un factor integrante, les dedicamos un capítulo aparte por diversos motivos. En primer lugar, desde una perspectiva teórica, tienen interés por anticipar ciertos aspectos del método de resolución de ecuaciones lineales de orden superior que estudiaremos más adelante. Pero sin duda la razón más importante para tratarlas por separado es su aplicabilidad. Este tipo de ecuaciones se presenta al realizar modelizaciones de muy diversos fenómenos. Vamos a introducirlas con un ejemplo relacionado con la absorción de medicamentos.

Un medicamento suministrado por vía oral llega al tracto intestinal del paciente y de ahí al torrente sanguíneo, donde surte su efecto y de donde es eliminado posteriormente. Veamos, en el caso de un antihistamínico concretamente, cómo se puede modelizar este proceso mediante ecuaciones diferenciales lineales. En la figura 4.1 se esquematiza el flujo del medicamento a través del organismo del paciente.

La cantidad de antihistamínico en el tracto intestinal en el instante t, cuyo valor supondremos que es A inicialmente, la denotaremos por $x(t)$. Si aplicamos a la variación de $x(t)$ la denominada ley de equilibrio

$$\text{Tasa de cambio neta} = \text{Tasa de entrada} - \text{Tasa de salida}$$

y tenemos en cuenta que el medicamento pasa del tracto intestinal al torrente sanguíneo en una tasa proporcional a la cantidad presente en el tracto intestinal, llegaremos a la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 x$$

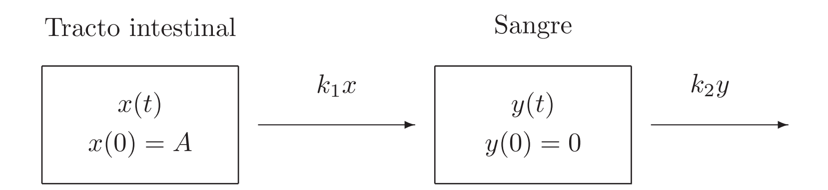


Figura 4.1: Diagrama compartimental mostrando el flujo del medicamento.

con $k_1 > 0$ ($x(t)$ va disminuyendo con el tiempo). Debemos considerar, además, la condición inicial $x(0) = A$.

Denotaremos ahora por $y(t)$ la cantidad de antihistamínico en la sangre. Esta magnitud se acumula desde un nivel inicial cero, pero disminuye a medida que los riñones y el hígado van eliminando las sustancias extrañas de la sangre a una tasa proporcional a la cantidad existente, con constante k_2. Para la variación de $y(t)$, aplicando otra vez la ley de equilibrio, tenemos la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y,$$

a la que debemos aplicar la condición inicial $y(0) = 0$. El primer sumando del lado derecho se justifica teniendo en cuenta que la tasa de entrada de medicamento en el torrente sanguíneo debe coincidir con la tasa de salida del tracto intestinal. El segundo sumando modela la eliminación de antihistamínico por la sangre. Reuniendo toda la información tendremos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -k_1 x, \\ \dfrac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y, \end{cases} \tag{4.1}$$

con las condiciones $x(0) = A$ e $y(0) = 0$. La ecuación que involucra únicamente a $x(t)$ puede resolverse sencillamente, puesto que es de variables separadas; de hecho,

$$x(t) = Ae^{-k_1 t}.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación llegamos a

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_1 A e^{-k_1 t}, \tag{4.2}$$

con $y(0) = 0$.

Esta ecuación responde al patrón

$$x' + f(t)x = g(t)$$

que, habitualmente, se denomina una ecuación diferencial lineal de primer orden. Veamos, antes de continuar con nuestro ejemplo, cómo resolver este tipo de ecuaciones y algunos comentarios respecto a ellas.

Primer método de resolución: por factor integrante. Reescribiendo la ecuación lineal como

$$x' = -f(t)x + g(t)$$

podemos plantearnos la búsqueda de un factor integrante que la convierta en exacta. Dicho factor integrante depende únicamente de t y viene dado por

$$\mu(t) = \exp\left(\int f(t)\,dt\right).$$

De este forma la función potencial es

$$V(t,x) = x\exp\left(\int f(t)\,dt\right) - \int g(t)\exp\left(\int f(t)\,dt\right)\,dt$$

y por tanto la solución general será

$$x(t) = \exp\left(-\int f(t)\,dt\right)\left(C + \int g(t)\exp\left(\int f(t)\,dt\right)\,dt\right).$$

Segundo método de resolución: por variación de la constante. Resolveremos en primer lugar la ecuación de variables separadas

$$x' + f(t)x = 0,$$

obtenida de la ecuación lineal eliminando el término independiente g y que se denomina ecuación homogénea.[1] La solución será

$$x(t) = k\exp\left(-\int f(t)\,dt\right). \tag{4.3}$$

Suponemos ahora que $k = k(t)$ e imponemos que la función satisfaga la ecuación diferencial lineal completa. De esto obtenemos que

$$k'(t)\exp\left(-\int f(t)\,dt\right) = g(t)$$

y por tanto

$$k(t) = \int g(t)\exp\left(\int f(t)\,dt\right)\,dt + C,$$

con lo que sustituyendo en (4.3) nuevamente obtenemos la solución general de la ecuación lineal.

[1]Es conveniente remarcar el distinto uso de la palabra *homogénea* en este capítulo y en el Capítulo 2. En el Capítulo 2 denominábamos la ecuación $x' = f(t,x)$ como homogénea si $f(t,x)$ era una función homogénea de grado cero. En este nuevo contexto se refiere a una ecuación lineal en la que el término $g(t)$ es nulo.

Nota 3. Resulta interesante observar un fenómeno sobre la solución que se repetirá más tarde cuando hablemos de ecuaciones lineales de orden superior. La solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden se puede escribir de la forma

$$x(t) = cx_1(t) + x_p(t),$$

donde $x_1(t)$ es una solución particular de la ecuación homogénea y $x_p(t)$ es una solución particular de la ecuación lineal completa. Para comprobar este hecho es suficiente observar que $x(t)$ es solución de la ecuación lineal si y sólo si $x(t) - x_p(t)$ es solución de la lineal homogénea asociada. Esto último es claro ya que

$$\begin{aligned}&(x(t) - x_p(t))' + f(t)(x(t) - x_p(t))\\ &\qquad = (g(t) - f(t)x(t) - g(t) + f(t)x_p(t)) + f(t)(x(t) - x_p(t)) = 0.\end{aligned}$$

De este hecho resulta que $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, donde x_h es solución de la ecuación homogénea asociada a la lineal. Pero resulta que $x_h(t) = cx_1(t)$ para algún valor c, donde $x_1(t)$, considerando lo que hemos visto, puede tomarse como $\exp\left(-\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right)$, para algún t_0 perteneciente al dominio de f.

Nota 4. Si aplicásemos el resultado de existencia y unicidad de solución para problemas de valores iniciales asociados con ecuaciones diferenciales exactas a problemas de valores iniciales con ecuaciones lineales de primer orden, deberíamos imponer la condición de que tanto f como g fuesen derivables. Sin embargo, esta hipótesis, como muestra el siguiente teorema, puede suavizarse.

Teorema 3. *Sean $f, g \in C(I)$, con I un intervalo en $\mathbb{R}$. Si $t_0 \in I$, el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} x' + f(t)x = g(t), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

admite una única solución $\phi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Omitiremos la prueba de este teorema ya que más adelante veremos un resultado más general sobre ecuaciones diferenciales lineales de orden superior que tendrá éste como caso particular.

Continuemos con nuestro ejemplo sobre absorción de medicamentos. Para resolver la ecuación (4.2) usaremos el método de variación de la constante. La ecuación homogénea asociada con (4.2) es

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = 0,$$

cuya solución general es de la forma

$$y = Ke^{-k_2 t}.$$

Suponiendo que $K = K(t)$ y sustituyendo en (4.2), llegaremos a la ecuación

$$K'(t) = k_1 A e^{-(k_1-k_2)t},$$

de donde

$$K(t) = -\frac{k_1 A}{k_1 - k_2} e^{-(k_1-k_2)t} + P$$

y, por tanto,

$$y(t) = -\frac{k_1 A}{k_1 - k_2} e^{k_1 t} + P e^{-k_2 t}.$$

Finalmente, usando la condición inicial $y(0) = 0$, obtenemos la expresión

$$y(t) = \frac{k_1 A}{k_1 - k_2}(e^{-k_2 t} - e^{-k_1 t}).$$

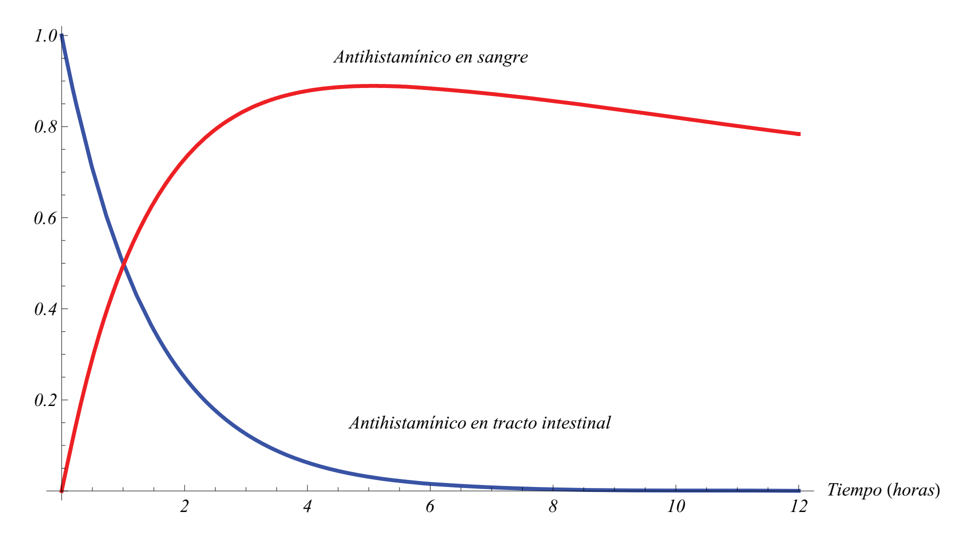


Figura 4.2: La curva en rojo representa la cantidad de antihistamínico en torrente sanguíneo y la curva en azul en tracto intestinal, a lo largo de doce horas cuando se ha consumido una dosis de antihistamina ($A = 1$). Se han considerado $k_1 = 0.6931$ y $k_2 = 0.0231$.

En lo anterior hemos supuesto que las constantes k_1 (constante de absorción) y k_2 (constante de eliminación) son distintas,[2] hecho que viene justificado por datos farmacéuticos empíricos. La figura 4.2 muestra el comportamiento de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ a lo largo de doce horas para $k_1 = 0.6931$, $k_2 = 0.0231$ y $A = 1$.

Como se muestra en la figura 4.3, la función $y(t)$ es muy sensible a las variaciones en la constante de eliminación k_2. Esta constante se hace muy pequeña

[2]Esta suposición ha sido usada tácitamente al calcular $K(t)$. Para un análisis del caso $k_1 = k_2$ véase el Problema 100.

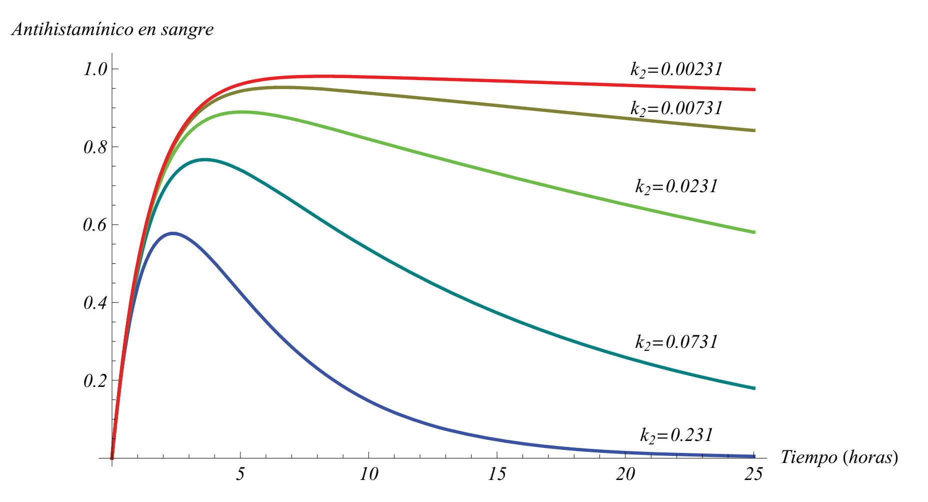


Figura 4.3: La función y para distintos valores del parámetro k_2.

cuando se trata de personas mayores y con enfermedades crónicas y es más alta para personas jóvenes y sanas. De hecho, para valores pequeños de k_2 puede ocurrir que la concentración de medicamento en la sangre no disminuya significativamente en las primeras 24 horas.

Una vez concluido nuestro análisis de la absorción de medicamentos, veamos algunos ejemplos más de resolución de ecuaciones lineales de primer orden.

***Ejemplo* 16.** Obtener la solución general de la ecuación

$$x' \cos t + x \operatorname{sen} t = 1.$$

La ecuación propuesta es equivalente a

$$x' + x \tan t = \frac{1}{\cos t},$$

que es una ecuación lineal con $f(t) = \tan t$ y $g(t) = \frac{1}{\cos t}$. Resolvámosla por el método del factor integrante. Consideramos

$$\mu(t) = \exp\left(\int \tan t \, dt\right) = \exp\left(-\log(\cos t)\right) = \frac{1}{\cos t}.$$

De esta forma la ecuación

$$x' = -\frac{\left(-\frac{1}{\cos t} + x \tan t\right) \frac{1}{\cos t}}{\frac{1}{\cos t}}$$

es exacta. Así,

$$V(t,x) = \int \frac{1}{\cos t} \, dx + \varphi(t) = \frac{x}{\cos t} + \varphi(t)$$

con
$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{1}{\cos^2 t} \Longrightarrow \varphi(t) = -\tan t + c.$$
Luego la solución general vendrá dada por
$$\frac{x}{\cos t} - \tan t = c \Longrightarrow x = \operatorname{sen} t + c\cos t.$$

En la resolución que acabamos de hacer hemos usado el procedimiento habitual para la resolución de ecuaciones exactas. Sin embargo el factor integrante nos permite proceder de un modo más *rápido*. Al multiplicar la ecuación dada por el factor integrante podemos observar que se transforma en
$$\left(\frac{x}{\cos t}\right)' = \frac{1}{\cos^2 t}.$$
Así, integrando, se tiene
$$\frac{x}{\cos t} = \tan t + c$$
y la solución general es
$$x = \operatorname{sen} t + c\cos t.$$

El fenómeno que acabamos de observar ocurre siempre en la ecuaciones lineales de primer al considerar el factor integrante $\mu(t) = \exp\left(\int f(t)\,dt\right)$. Es decir, la ecuación
$$x' + f(t)x = g(t)$$
siempre puede reescribirse como
$$(x\mu(t))' = g(t)\mu(t)$$
y podemos integrar a ambos lados de la igualdad. ◁

***Ejemplo* 17.** Obtener la solución general de la ecuación
$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{x^4 + 2t}.$$
En principio esta ecuación no encaja dentro del patrón de las ecuaciones lineales. Sin embargo, si consideramos $t = t(x)$,[3] se cumple que
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}},$$

[3]Este cambio de variable y función (consideramos como nueva variable la x y como nueva función t, con $t = t(x)$) corresponde al esquema
$$x \longleftarrow t \longleftarrow x \longrightarrow x.$$

y tendremos

$$\frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{x}{x^4+2t} \Longrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{x^4+2t}{x} = \frac{2t}{x} + x^3 \Longrightarrow \frac{dt}{dx} - \frac{2t}{x} = x^3,$$

que es una ecuación lineal en $t = t(x)$. Resolvemos la ecuación homogénea asociada

$$\frac{dt}{dx} - \frac{2t}{x} = 0 \Longrightarrow t = kx^2.$$

Haciendo la variación de la constante $t = k(x)x^2$ ($\frac{dt}{dx} = \frac{dk(x)}{dx}x^2 + 2k(x)x$) y sustituyendo en la ecuación completa, llegamos a que

$$\frac{dk(x)}{dx} = x \Longrightarrow k(x) = \frac{x^2}{2} + c.$$

De esta forma la solución general de la ecuación propuesta es $t = \frac{x^4}{2} + cx^2$. $\lhd$

***Ejemplo* 18.** Obtener la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} (t^2+1)x' + 4tx = t, \\ x(2) = 1. \end{cases}$$

La ecuación puede reeescribirse como

$$x' + \frac{4t}{t^2+1}x = \frac{t}{t^2+1}$$

que responde al patrón de las ecuaciones lineales. Calculamos el factor integrante

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{4t}{t^2+1}\,dt\right) = (t^2+1)^2.$$

Así, la ecuación

$$x' = -\frac{t(t^2+1)(4x-1)}{(t^2+1)^2}$$

es exacta y la solución del problema de valores iniciales, equivalente al propuesto,

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{t(t^2+1)(4x-1)}{(t^2+1)^2}, \\ x(2) = 1, \end{cases}$$

vendrá dada por

$$\int_2^t s(s^2+1)(4x-1)\,ds + \int_1^x 25\,ds = 0,$$

lo que nos da

$$x = \frac{1}{4} + \frac{75}{4(t^2+1)^2},$$

que es la única solución del problema de valores iniciales propuesto. $\lhd$

***Ejemplo* 19. Una cuestión mecánica de masa variable.** Veamos un problema físico con un cuerpo de masa variable que se resuelve mediante ecuaciones lineales de primer orden.

> Una gota de agua que inicialmente tiene una masa de M gramos se va evaporando a una tasa constante de m gramos por segundo mientras cae libremente en el aire. Si la resistencia del aire es proporcional a la velocidad de la gota, determinar la velocidad de caída.

Teniendo en cuenta que la gota de agua pierde masa a una velocidad constante de m gramos por segundo, la masa de la gota en el instante t será $M - mt$. Si suponemos que el movimiento de la gota de agua es perpendicular a la superficie de la Tierra con la dirección positiva hacia abajo, la fuerza del peso tendrá la forma $P = (M - mt)g$ y la fuerza de resistencia del aire, que se opone al movimiento, será $R = -kv$ para una cierta constante positiva k. Ahora, usando la segunda ley de Newton para masas variables, tendremos que

$$\frac{d((M - mt)v)}{dt} = P + R = (M - mt)g - kv,$$

que puede reescribirse como

$$(M - mt)\frac{dv}{dt} = (M - mt)g + (m - k)v$$

o, de manera equivalente, como

$$\frac{dv}{dt} + \frac{(k - m)v}{M - mt} = g.$$

Esta ecuación es lineal de primer orden. Consideramos la ecuación homogénea asociada

$$\frac{dv}{dt} + \frac{(k - m)v}{M - mt} = 0$$

cuya solución es

$$v(t) = \frac{A}{(M - mt)^{1-k/m}}.$$

Suponiendo ahora que $A = A(t)$, llegamos a la ecuación

$$A'(t) = g(M - mt)^{1-k/m} \Rightarrow A(t) = \begin{cases} \dfrac{g}{k - 2m}(M - mt)^{2-k/m} + C, & \text{si } k \neq 2m, \\ -\dfrac{g}{m}\log(M - mt) + C, & \text{si } k = 2m. \end{cases}$$

Con esto concluimos que

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{g}{k - 2m}(M - mt) + C(M - mt)^{k/m-1}, & \text{si } k \neq 2m, \\ -\dfrac{g}{m}(M - mt)\log(M - mt) + C(M - mt), & \text{si } k = 2m. \end{cases}$$

Por último, si suponemos que la gota de agua parte del reposo, $v(0) = 0$, obtenemos la expresión

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{g}{k-2m}(M-mt)\left(1-\left(1-\dfrac{mt}{M}\right)^{k/m-2}\right), & \text{si } k \neq 2m, \\ \dfrac{g}{m}(M-mt)\log\left(\dfrac{M}{M-mt}\right), & \text{si } k = 2m. \end{cases}$$

Resulta interesante observar que en el instante en el que la masa de la gota de agua desaparece, correspondiente a $t = M/m$, su velocidad es nula si $k > m$ y es infinita si $k < m$. $\lhd$

Nota 5. La modelización de la absorción de medicamentos analizada al inicio del capítulo se ha realizado mediante lo que se denomina un *modelo compartimental*. Esencialmente se trata de diagramas compuestos por una serie de compartimentos (cajas) unidos mediante flechas. La caja de la que sale la flecha pierde parte de su contenido en favor de la caja a la que llega la flecha. Si una flecha no sale de una caja se denomina una *entrada* y si una flecha no llega a una caja se llama una *salida*.

Los modelos compartimentales más sencillos son las llamadas *cascadas lineales*, que se caracterizan por dos hechos:

a) Ninguna cadena de cajas y flechas empieza y termina en una misma caja.

b) Cada elemento sale de su caja correspondiente a una tasa proporcional a la cantidad en el interior de la caja y, cuando entra en otra, lo hace en la misma tasa.

El modelo de absorción de medicamentos que hemos tratado es una cascada lineal muy sencilla, pero este tipo de problemas pueden complicarse mucho. La figura 4.4 muestra una situación más compleja; su sistema de ecuaciones asociado será

$$\begin{cases} x_1' = I_1 - k_1x_1, \\ x_2' = I_2 - k_2x_2, \\ x_3' = I_3 + k_1x_1 + k_2x_2 - (k_3+k_4+k_5)x_3, \\ x_4' = k_4x_3 - k_6x_4, \\ x_5' = k_5x_3 - k_7x_5. \end{cases}$$

Notar que este sistema se puede resolver de arriba abajo obteniendo una función en cada paso.

Los modelos compartimentales, en general, dan lugar a sistemas de ecuaciones más complicados cuya resolución estudiaremos más adelante

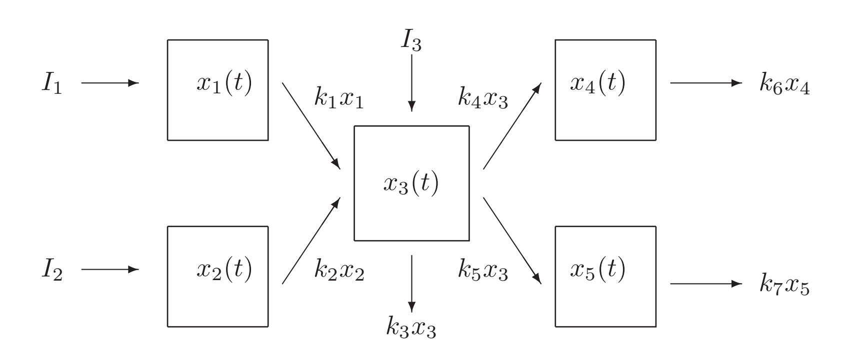


Figura 4.4: Diagrama compartimental relacionado con la Nota 5.

4.2. Un estudio matemático de carreras de atletismo

Como ya tuvimos ocasión de comprobar en el capítulo anterior con el ejemplo del esquiador, utilizando ecuaciones diferenciales puede realizarse un análisis básico de algunas cuestiones del mundo del deporte. En esta sección volveremos a modelizar un fenómeno deportivo con ecuaciones lineales.

En las carreras de atletismo el objetivo es correr una cierta distancia D en el menor tiempo posible τ. Si suponemos que el atleta lleva en cada instante de la carrera la velocidad $v(t)$, es claro que se deberá verificar la relación

$$D = \int_0^\tau v(t)\, dt. \tag{4.4}$$

Considerando que las cuestiones tácticas no tienen influencia sobre el desarrollo de la carrera (lo que puede asumirse en carreras rápidas y no tanto en las de larga distancia), se puede deducir la velocidad del atleta teniendo en cuenta la ecuación diferencial que describe su movimiento. Considerando que un deportista de masa m consigue (por reacción de la fuerza de rozamiento de la pista contra sus pies) una fuerza externa de propulsión $F(t)$, y que experimenta una fuerza de resistencia del aire $R(t)$, ambas consideradas por unidad de masa, por la segunda ley de Newton tendremos que

$$m\frac{dv}{dt} = mF(t) - mR(t).$$

La fuerza de resistencia del aire suele considerarse como proporcional a una potencia de la velocidad, es decir como kv^α con $1 \leq \alpha \leq 2$, donde el exponente α y la constante de proporcionalidad se determinan experimentalmente. Se considera proporcional a v^2 (con una constante de proporcionalidad pequeña) en el caso de cuerpos aerodinámicos; así ocurría, por ejemplo, en el caso de nuestro

esquiador del capítulo anterior. En un caso general, se puede considerar proporcional a v, como hemos hecho antes en el caso de la gota de lluvia. Aquí también tomaremos, entonces, $R(t) = kv(t)$. De este modo, la ecuación para la velocidad del corredor será

$$\frac{dv}{dt} + kv = F(t),$$

que responde al patrón de las ecuaciones lineales.

Aunque ignoremos la naturaleza de la fuerza de propulsión $F(t)$ conseguida por el corredor, podemos hacer ciertas suposiciones sobre ella. Las limitaciones físicas de cada deportista determinarán un valor máximo para dicha fuerza, que denotaremos por F^*, que no podrá ser excedido; es decir, $F(t) \leq F^*$. Para carreras cortas (de 100, 200 o 400 metros) podemos considerar que la fuerza de propulsión es constante a lo largo del tiempo e igual a su máximo. Con esta suposición, la ecuación para la velocidad se reduce a

$$\frac{dv}{dt} + kv = F^*.$$

Con la condición inicial $v(0) = 0$ (que nos indica que el deportista parte del reposo), llegamos a que

$$v(t) = \frac{F^*}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Sustituyendo esta función en (4.4), tendremos que

$$D = \int_0^\tau \frac{F^*}{k}(1 - e^{-kt})\, dt$$

o, lo que es lo mismo,

$$D = \frac{F^*}{k^2}(e^{-k\tau} - 1 + \tau k).$$

Esta última expresión relaciona la distancia recorrida en una carrera rápida y el tiempo empleado en ella, supuesto que el atleta se emplea a fondo durante todo el tiempo que dura la prueba. Aunque este resultado es de tipo teórico y necesitaríamos conocer ciertos parámetros para poder validarlo, resulta interesante preguntarse ¿cuál podría ser el récord mundial de Usain Bolt si mantuviese durante toda la carrera su máxima fuerza de propulsión? Esta pregunta parece natural a la vista de la forma de correr del jamaicano, que en los últimos metros se relaja de una manera bastante evidente.

En carreras de larga distancia, una suposición que puede hacerse es que la velocidad del corredor sea constante a lo largo de toda la prueba; es decir, $v(t) = v$ y $\frac{dv}{dt} = 0$. De esta forma, de la ecuación del movimiento se obtiene que

$$F(t) = kv.$$

Es conocido que la capacidad de locomoción del ser humano depende del hecho de que la sangre puede absorber el oxígeno del aire inspirado y puede transportarlo hasta los músculos encargados del movimiento. El punto hasta el cual este



Figura 4.5: ¿Cuál podría ser el récord mundial de Usain Bolt si mantuviese durante toda la carrera su máxima fuerza de propulsión? En la imagen le vemos junto al tiempo que hizó el año 2009 en Berlin y que le supuso el récord mundial de los cien metros lisos.

sistema de transporte de oxígeno está desarrollado varía de un deportista a otro. Si denotamos por $E(t)$ la cantidad de oxígeno por unidad de masa disponible en los músculos para realizar el movimiento, podemos dar la ecuación

$$\frac{dE}{dt} = S - F(t)v(t),$$

donde S es la cantidad de oxígeno almacenado mientras el atleta no está corriendo y $F(t)v(t)$ la cantidad de oxígeno consumida en el desarrollo de la fuerza de propulsión. En el caso de velocidad constante y suponiendo que la cantidad de oxígeno inicial es E_0, tendremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = S - kv^2, \\ E(0) = E_0. \end{cases}$$

De donde deducimos que

$$E(t) = E_0 + t(S - kv^2).$$

Si ahora suponemos que al final de la carrera, por el esfuerzo realizado, el atleta ha agotado el oxígeno; es decir, $E(\tau) = 0$, concluimos que

$$0 = E_0 + \tau(S - kv^2),$$

o, despejando la velocidad,

$$v = \sqrt{\frac{1}{k}\left(S + \frac{E_0}{\tau}\right)}.$$

Introduciendo este valor en la ecuación (4.4) resulta

$$D^2 = \tau^2 \frac{S}{k} + \tau \frac{E_0}{k},$$

relación que vincula la distancia de la carrera con el tiempo empleado en ella mediante los valores S/k y E_0/k.

4.3. Dos problemas de la revista *The American Mathematical Monthly*

Para aportar un par de ejemplos poco conocidos referentes a ecuaciones lineales de primer orden, vamos a recurrir a dos problemas propuestos en la revista *The American Mathematical Monthly.* En el primero se analiza la cantidad de vino en cada una de las copas de una cierta torre de copas que se desbordan. El otro problema es variante, debida a Murray Klamkin, del *Problema del quitanieves* que tratamos en el primer capítulo.

> **Un problema con vino.** Una copa de vino es suspendida sobre otra, de igual forma y tamaño, que está llena de agua. A través de un pequeño orificio en la copa de vino, éste cae sobre el agua y la mezcla se desborda de la copa de agua en la misma cantidad que ha recibido de vino. Cuando la copa de vino queda vacía, ¿qué parte del contenido de la copa inferior es vino?

Este problema se propuso en la revista *The American Mathematical Monthly* en el año 1919 (pág. 144) y fue planteado por Charles Gilpin Jr.[4] En la solución a este problema, aparecida en la misma revista en 1921 (págs. 143–145), R. E. Gaines propone y resuelve la siguiente generalización:

> Consideremos una columna de k copas iguales llenas de agua colocadas una sobre otra. Sobre la primera copa colocamos otra llena de vino que pierde su contenido por un pequeño orificio. Cada copa va recibiendo de la inmediata superior una cantidad de la mezcla que ésta contiene, y va eliminando la misma cantidad de su propia mezcla. Determinar la cantidad de vino en cada copa para $t \in [0, T]$, siendo T el tiempo necesario para que la copa de vino se vacíe.

Veamos cómo obtener la solución de esta generalización. La situación puede describirse mediante un modelo de cajas, como el que mostramos en la figura 4.6. Si $x_i(t)$, con $i = 1, \ldots, k$, es la cantidad de vino en la copa i-ésima en el instante t, cada copa pierde en cada instante la cantidad $\frac{x_i(t)}{T}$ de vino y recibe la cantidad $\frac{x_{i-1}(t)}{T}$; excepto la primera, que recibe $\frac{q}{T}$, donde q es la cantidad de

[4] La propuesta no era realmente nueva, se trataba de una republicación del Problema 287 de la revista *The mathematical visitor* (1881, pág. 193), propuesto por el mismo autor.

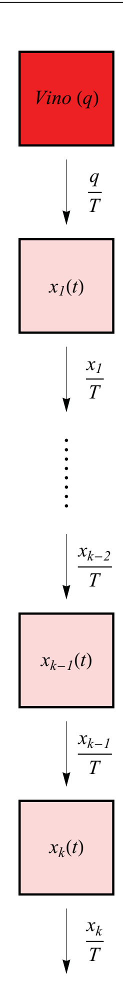


Figura 4.6: Cada copa se ha representado como una caja y las flechas indican la cantidad de vino que entra y sale en cada una de ellas.

vino en la primera copa. De este modo el sistema de ecuaciones que debemos resolver es

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{q}{T} - \dfrac{x_1}{T}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_1}{T} - \dfrac{x_2}{T}, \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_{k-1}}{dt} = \dfrac{x_{k-2}}{T} - \dfrac{x_{k-1}}{T}, \\ \dfrac{dx_k}{dt} = \dfrac{x_{k-1}}{T} - \dfrac{x_k}{T}, \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $x_1(0) = \cdots = x_k(0) = 0$. Procediendo como en los ejemplos anteriores, resolvemos la ecuación lineal de primer orden correspondiente a x_1, obteniendo, tras aplicar la condición inicial,

$$x_1(t) = q\left(1 - e^{-t/T}\right).$$

De este modo la ecuación para x_2 se transforma en

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{q}{T}\left(1 - e^{-t/T}\right) - \frac{x_2}{T},$$

cuya solución es

$$x_2(t) = q\left(1 - e^{-t/T}\left(1 + \frac{t}{T}\right)\right).$$

En este punto, resulta sencillo conjeturar y comprobar que

$$x_i(t) = q\left(1 - e^{-t/T}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{j!}\left(\frac{t}{T}\right)^j\right).$$

Así, la cantidad de vino en cada copa al final del proceso ($t = T$) está dada por

$$x_i(T) = q\left(1 - \frac{1}{e}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{j!}\right)$$

La solución correspondiente a la propuesta original del problema, es decir, la cantidad de vino en la primera copa al final del proceso, es $x_1(T) = q\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

Vayamos ahora con la anunciada variante del *Problema del quitanieves*, propuesta en *The American Mathematical Monthly* por Murray Klamkin en el año 1951 (pág. 260). La solución que presentamos sigue la publicada en la revista en 1952 (pág. 42), que fue elaborada por L. A. Ringenberg.

> **Más de una máquina quitanieves.** Un día comenzó a nevar de manera regular antes de mediodía y tres máquinas quitanieves salieron a limpiar una misma carretera a mediodía, a la una de la tarde y a las dos, respectivamente. Si en un momento coinciden las tres máquinas en un mismo punto de la carretera, determinar la hora del encuentro y la hora en que comenzó a nevar.

Como en la versión original del problema, podemos considerar que la velocidad de una quitanieves es inversamente proporcional a la altura de la nieve que está limpiando.

Teniendo esto en cuenta, si denotamos por $x_i(t)$, con $i = 1, 2$ y 3, la posición de la i-ésima máquina quitanieves, tendremos, en primer lugar, que

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{k}{h_i(t)},$$

donde h_i es la cantidad de nieve que se encuentra la i-ésima quitanieves en el instante t. La cantidad de nieve que encuentra x_1 puede escribirse como $h_1(t) = ct$, ya que suponemos que nieva de manera regular, y de este modo

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{k}{h_1(t)} = \frac{A}{t},$$

con $A = k/c$. Si tomamos $t = 0$ como el momento en que comenzó la nevada y denotamos por T el tiempo transcurrido hasta la salida de la primera quitanieves, la posición de la primera máquina quitanieves viene dada por

$$x_1(t) = A \log\left(\frac{t}{T}\right)$$

o, tomando el tiempo como función de la posición,

$$t(x_1) = Te^{x_1/A}.$$

Ahora, para cada valor de la posición x_2 tenemos que

$$\begin{aligned} h_2(t) &= c(t - \text{Tiempo empleado por la primera quitanieves en llegar a } x_2) \\ &= c(t - t(x_2)) = c(t - Te^{x_2/A}). \end{aligned}$$

Con esto deducimos que

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{k}{h_2(t)} = \frac{A}{t - Te^{x_2/A}}.$$

Suponiendo que $t = t(x_2)$, la ecuación se transforma en

$$\frac{dt}{dx_2} = \frac{1}{A}(t - Te^{x_2/A}),$$

cuya solución general es

$$t(x_2) = e^{x_2/A}\left(K - \frac{Tx_2}{A}\right).$$

Si usamos que $t(0) = T + 1$ llegamos a la solución

$$t(x_2) = e^{x_2/A}\left(1 + T - \frac{Tx_2}{A}\right).$$

Finalmente, para obtener la posición de la tercera máquina observamos que

$$\begin{aligned} h_3(t) &= c(t - \text{Tiempo empleado por la segunda quitanieves en llegar a } x_3) \\ &= c(t - t(x_3)) = c\left(t - e^{x_3/A}\left(1 + T - \frac{Tx_3}{A}\right)\right) \end{aligned}$$

y llegamos a la ecuación

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{A}{t - e^{x_3/A}\left(1 + T - \frac{Tx_3}{A}\right)}.$$

Tomando otra vez el tiempo dependiente de la posición tendremos la ecuación lineal

$$\frac{dt}{dx_3} = \frac{1}{A}\left(t - e^{x_3/A}\left(1 + T - \frac{Tx_3}{A}\right)\right).$$

Usando que la solución general es

$$t(x_3) = e^{x_3/A}\left(B - \frac{(1+T)x_3}{A} + \frac{Tx_3^2}{2A^2}\right)$$

y la condición $t(0) = T + 2$, concluimos que

$$t(x_3) = e^{x_3/A}\left(2 + T - \frac{(1+T)x_3}{A} + \frac{Tx_3^2}{2A^2}\right).$$

Si denotamos por T_e el momento del encuentro de las tres quitanieves y por d la posición en que se produce, tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} T_e e^{-d/A} &= T \\ &= 1 + T - \frac{Td}{A} \\ &= 2 + T - \frac{(1+T)d}{A} + \frac{Td^2}{2A^2}, \end{aligned}$$

de donde concluimos que $T = 1/2$ (por consiguiente comenzó a nevar a las once y media de la mañana) y $T_e = e^2/2 = 3.69453$ (así que el momento del encuentro fue, aproximadamente, a las 3:12). La posición del momento del encuentro es $d = 2A = 2k/c$ y depende, obviamente, de la intensidad de la nevada y de la potencia de las máquinas.

4.4. Cómo reconocer una parábola

Las secciones cónicas y en particular las parábolas, han sido posiblemente las curvas más estudiadas por los matemáticos desde la antigüedad. Sin embargo, muchas de sus interesantes propiedades se han convertido en rarezas casi desconocidas o simples cuestiones marginales en el estudio de alguna teoría más general. En el caso de las parábolas muchas de esas propiedades permiten caracterizarlas, es decir, dichas propiedades solamente se cumplen para las parábolas. El artículo del que toma el título este comentario, *How to recognize a parabola*, de B. Richmond y T. Richmond, aparecido en *The American Mathematical Monthly*, **10** (2009), págs. 910–922, nos proporciona una docena de tales caracterizaciones, que pueden probarse por medio de técnicas elementales del análisis

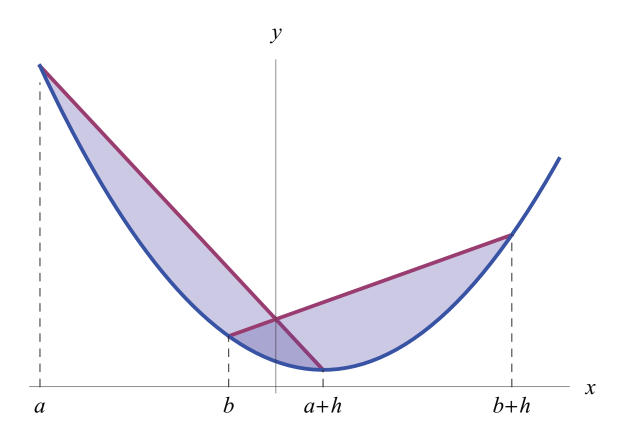


Figura 4.7: Las dos regiones sombreadas tendrán igual área si y sólo si la curva azul es una parábola.

matemático o la geometría. Aquí mostraremos tres de ellas, en las que aparece involucrada una misma ecuación diferencial lineal. En el próximo capítulo presentaremos otras dos caracterizaciones para la parábola que pueden también obtenerse usando ecuaciones diferenciales.

> **Primera caracterización.** Supongamos que f es una función diferenciable no lineal. Sean $y = \ell(a, h, x)$ la ecuación de la recta secante a la curva $y = f(x)$ que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$, y $A(a, h)$ el área signada
>
> $$A(a, h) = \int_a^{a+h} \ell(a, h, x)\, dx - \int_a^{a+h} f(x)\, dx.$$
>
> Entonces $y = f(x)$ es una parábola si y sólo si el área $A(a, h)$ es independiente de a.

Esta caracterización establece que una curva es una parábola si cualquier recta secante a la curva que una dos puntos cuyas abscisas tienen diferencia constante, limita con la curva un área constante. Las dos regiones mostradas en la figura 4.7 serán iguales si la curva es una parábola.

Arquímedes ya conocía esta propiedad, y de hecho es posible probarla sin usar cálculo integral. En efecto, la *Proposición 24* del tratado de Arquímedes *La cuadratura de la parábola*[5] establece que el área de cada segmento limitado por una parábola y una cuerda que la corta es igual a cuatro tercios del área del triángulo que tiene la misma base y la misma altura que el segmento parabólico. Siguiendo la notación de la figura 4.8, el área del segmento limitado por la parábola y la cuerda AB es cuatro tercios del área del triángulo ABC.

[5]El tratado de Arquímedes *La cuadratura de la parábola* puede consultarse en la referencia T. L. Heath, *The works of Archimedes*, Cambridge University Press, 1897.

Arquímedes utiliza el término *altura* de un segmento parabólico para referirse al mayor de los segmentos rectilíneos paralelos al eje de simetría de la parábola comprendidos en el interior del segmento parabólico. Además, la *Proposición 18* del citado texto de Arquímedes permite identificar la altura de un segmento parabólico fácilmente: es el segmento rectilíneo paralelo al eje de simetría que parte del punto medio de la cuerda. En la figura 4.8, la altura es el segmento rectilíneo MC.

Entonces, si suponemos que $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, con $\alpha > 0$, el área limitada por la parábola y la cuerda $y = \ell(a, h, x)$ será cuatro tercios del área del triángulo de vértices $(a, f(a))$, $\left(a + \frac{h}{2}, f\left(a + \frac{h}{2}\right)\right)$ y $(a + h, f(a + h))$. El área de dicho triángulo es

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & a + \frac{h}{2} & f\left(a + \frac{h}{2}\right) \\ 1 & a + h & f(a + h) \end{vmatrix} = \frac{\alpha}{8}h^3$$

y, por tanto, el área del segmento parábolico es $\frac{\alpha}{6}h^3$, que como puede verse es independiente de a.

Veamos ahora el resultado recíproco. Teniendo en cuenta que

$$y = \ell(a, h, x) = f(a) + \frac{f(a + h) - f(a)}{h}(x - a),$$

es claro que

$$A(a, h) = \frac{h}{2}(f(a) + f(a + h)) - \int_a^{a+h} f(x)\, dx.$$

Usando que $A(a, h)$ es independiente de a y derivando con respecto de a la igualdad anterior, obtenemos la ecuación

$$0 = \frac{h}{2}(f'(a) + f'(a + h)) - f(a + h) + f(a), \tag{4.5}$$

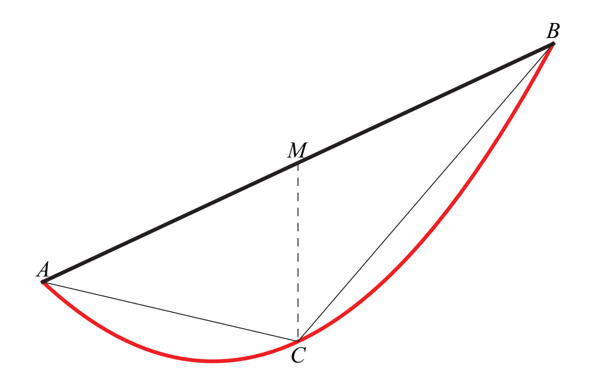


Figura 4.8: La figura muestra un segmento parabólico y el triángulo que podemos usar para determinar su área.

para todo a y para todo h. Si ahora fijamos a y tomamos como variable $x = a+h$, llegamos a la ecuación diferencial

$$f'(x) - \frac{2}{x-a}f(x) = -f'(a) - \frac{2}{x-a}f(a).$$

Es evidente que se trata de una ecuación lineal de primer orden. Imponiendo que la solución de la ecuación pasa por $(a+h, f(a+h))$, por el Teorema 3 podremos asegurar existencia y unicidad de solución en el intervalo $(-\infty, a)$ o en el intervalo (a, ∞). Supongamos que nos encontramos en este último caso, el otro es similar. La solución general de la ecuación homogénea

$$f'(x) - \frac{2}{x-a}f(x) = 0,$$

es $f(x) = k(x-a)^2$. Aplicando ahora el método de variación de las constantes llegaremos a la ecuación

$$k'(x) = -\frac{f'(a)}{(x-a)^2} - \frac{2f(a)}{(x-a)^3},$$

que implica

$$k(x) = c + \frac{f'(a)}{x-a} + \frac{f(a)}{(x-a)^2}$$

y así,

$$f(x) = c(x-a)^2 + f'(a)(x-a) + f(a),$$

y, evidentemente, se trata de una parábola si $c \neq 0$. Usando que la curva debe pasar por $(a+h, f(a+h))$, se deduce que

$$c = \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h^2}$$

y este valor no es nulo ya que $f(a+h) - f(a) - f'(a)h = 0$ si y sólo si f es una función lineal, y éstas funciones no están entre las posibles soluciones de la ecuación.

La prueba que acabamos de hacer esconde otra forma de caracterizar las parábolas. La ecuación (4.5) puede reescribirse como

$$\frac{f'(a+h) + f'(a)}{2} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{4.6}$$

y a partir de esta expresión puede probarse el siguiente resultado:

Segunda caracterización. Una función diferenciable f no lineal es una parábola si y sólo si la media aritmética de las pendientes de las rectas tangentes en $x = a$ y $x = a+h$ es igual a la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$. Es decir, una función diferenciable f no lineal es una parábola si y sólo si satisface (4.6) para todo a y para todo h.

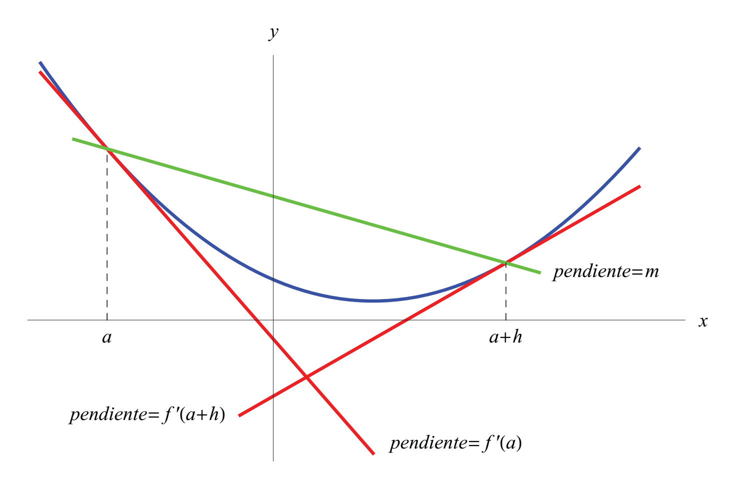


Figura 4.9: La pendiente de la recta verde será siempre la media aritmética de $f'(a)$ y $f'(a+h)$ si y sólo si la curva azul es una parábola.

Esta caracterización aparece ilustrada en la figura (4.9); en rojo aparecen las rectas tangentes a la curva azul en $x = a$ y $x = a + h$, cuyas pendientes serán $f'(a)$ y $f'(a+h)$. La pendiente m de la recta verde será $\frac{f'(a)+f'(a+h)}{2}$ si y sólo si la curva azul es una parábola. El hecho de que una parábola satisface la propiedad anterior puede demostrarse de manera inmediata. La prueba de que toda función no lineal que cumpla la condición es una parábola se obtiene como en el caso anterior.

> **Tercera caracterización.** Una función diferenciable f no lineal es una parábola si y sólo si las rectas tangentes a f en los puntos $x = a$ y $x = b$ se cortan en un punto cuya abcisa es $x = \frac{a+b}{2}$.

Siguiendo la notación de la figura 4.10, tendremos que $c = \frac{a+b}{2}$ si y sólo si la curva es una parábola. Resulta sencillo comprobar que una parábola satisface esta condición. Para probar el resultado inverso consideremos las rectas tangentes en $x = a$ y $x = b$, que estarán dadas por $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ y $y = f(b) + f'(b)(x - b)$. En el punto de corte entre ambas rectas se cumplirá que

$$f(a) + f'(a)(x - a) = f(b) + f'(b)(x - b)$$

y puesto que en dicho punto es $x = \frac{a+b}{2}$ por hipótesis, llegaremos a la ecuación

$$f(a) + f'(a)\frac{b - a}{2} = f(b) + f'(b)\frac{a - b}{2},$$

que es equivalente a (4.5) y se resuelve del mismo modo.

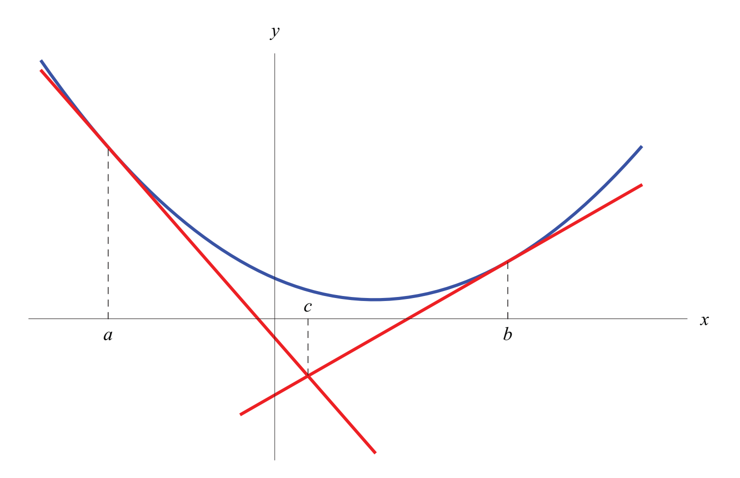


Figura 4.10: La igualdad $c = \frac{a+b}{2}$ se verificará si y sólo si la curva azul es una parábola.

4.5. La ecuación de Bernoulli

La ecuación diferencial

$$x' + f(t)x = g(t)x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\},$$

se denomina ecuación de Bernoulli[6] en honor a Jacob Bernoulli, que fue quien primero obtuvo la solución general de este tipo de ecuaciones en el año 1696.

Para resolverla basta efectuar el cambio de función $w = x^{1-\alpha}$. Con este cambio la ecuación se transforma en

$$w' + (1 - \alpha)f(t)w = (1 - \alpha)g(t),$$

que es lineal de primer orden.

Existe otro procedimiento de resolución alternativo para las ecuaciones de tipo Bernoulli. El factor integrante

$$\mu(t, x) = x^{-\alpha} \exp\left(-(\alpha - 1)\int f(t)\, dt\right)$$

las convierte en ecuaciones exactas. En efecto, la ecuación de Bernoulli multiplicada por el factor integrante $\mu(t, x)$ puede escribirse como

$$x' = -\frac{P(t, x)}{Q(t, x)},$$

[6]El hecho de eliminar los valores $\alpha = 0$ y 1 se debe a que son dos casos que ya se han analizado y no son ecuaciones de Bernoulli genuinas. En el caso $\alpha = 0$ se tiene una ecuación lineal de primer orden y en el caso $\alpha = 1$ una ecuación de variables separadas.

con

$$P(t,x) = (f(t)x - g(t)x^{\alpha})\mu(t,x) \qquad \text{y} \qquad Q(t,x) = \mu(t,x),$$

y resulta sencillo comprobar que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} = -(\alpha - 1)f(t)\mu(t,x).$$

***Ejemplo* 20.** Obtener la solución general de la ecuación

$$x' + x = x^3 t.$$

Se trata de una ecuación de Bernoulli con $\alpha = 3$. Haremos el cambio de función $w = x^{-2}$. De esta forma llegamos a la ecuación lineal

$$w' - 2w = -2t.$$

Resolviendo la ecuación homogénea $w' - 2w = 0$ obtenemos la solución $w = ke^{2t}$ y haciendo la variación de la constante ($w = k(t)e^{2t}$ y $w' = k'(t)e^{2t} + k(t)e^{2t}$) tendremos que

$$k'(t)e^{2t} = -2t \Longrightarrow k(t) = \int -2te^{-2t}\,dt = \left(t + \frac{1}{2}\right)e^{-2t} + C.$$

Así llegamos a que $w = t + \frac{1}{2} + Ce^{2t}$ y entonces

$$x^2 = \frac{1}{t + \frac{1}{2} + ke^{2t}}$$

nos da, en forma implícita, la solución general buscada.

Para usar el procedimiento del factor integrante, debemos considerar

$$\mu(t,x) = x^{-3}e^{-2t},$$

ya que $f(t) = 1$. Así la ecuación, equivalente a la dada,

$$x' = -\frac{x^{-2}e^{-2t} - te^{-2t}}{x^{-3}e^{-2t}}$$

será exacta y podremos proceder a calcular su función potencial:

$$V(t,x) = \int x^{-3}e^{-2t}\,dx + \varphi(t) = \frac{x^{-2}}{-2}e^{-2t} + \varphi(t)$$

con

$$\varphi'(t) = -te^{-2t} \Longrightarrow \varphi(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)e^{-2t} + k.$$

Por tanto las soluciones vendrán dadas por

$$\frac{x^{-2}}{-2}e^{-2t} + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)e^{-2t} = c \iff x^{-2} = t + \frac{1}{2} + Ce^{2t},$$

que coinciden con las obtenidas por el procedimiento anterior. $\lhd$

4.6. La ecuación de Riccati

Normalmente se denominan ecuaciones de Riccati a las ecuaciones diferenciales de la forma

$$x' + f(t)x + g(t)x^2 = h(t). \tag{4.7}$$

La denominación de ecuaciones de Riccati puede verse ya en la segunda mitad del siglo XVIII usada por J. D'Alambert. Sin embargo, resulta curioso que este tipo de ecuaciones se asocien con J. Riccati, cuando la primera aparición de una ecuación de este tipo se produjo en un trabajo de Johann Bernoulli. En concreto en un artículo de este autor del año 1694 sobre curvas aparece como un ejemplo la ecuación $x' = x^2 + t^2$ (que es, sin duda, la ecuación más paradigmática de esta clase) con un comentario en el que afirma no haber sido capaz de resolverla *pese a haberlo intentado de mil maneras*. Durante varios años esta ecuación aparece en la correspondencia entre Leibniz y Jacob Bernoulli y, finalmente, este último en 1702 obtiene una solución que comunica a Leibniz un año más tarde. Veintidos años más tarde de todo esto, en 1724, es cuando hace su aparición en esta historia J. Riccati. En ese año, Riccati publica un trabajo en *Acta Eruditorum* en el que aparece, sin solución, la ecuación diferencial más general



Jacopo Riccati (1676–1754), matemático italiano. Su trabajo como matemático estuvo centrado en el desarrollo de métodos para la resolución de distintos tipos de ecuaciones diferenciales, y no sólo para la que lleva su nombre. Realizó varios trabajos en hidraúlica y colaboró en la construcción de diques en los canales de Venecia.

$$x' = at^n + bx^2. \tag{4.8}$$

En una nota publicada a continuación, también en *Acta Eruditorum*, por Daniel Bernoulli (hijo de Johann y sobrino de Jacob), éste afirma que la resolución de la ecuación es un problema complicado e introduce un anagrama en el que esconde su demostración.[7] La solución apareció publicada un año más tarde y luego comentaremos algo más sobre ella. El hecho de que la ecuación (4.8) fuese algo más general que la propuesta por Johann Bernoulli, y la preeminencia dada por Daniel Bernoulli al trabajo de Riccati parecen ser los responsables de que la ecuación lleve el nombre de este último.

Tras esta introducción histórica veamos algo propiamente de matemáticas. Las ecuaciones del tipo (4.7) se consideran genuinamente de tipo Riccati si g y h no son funciones nulas.[8] Para resolver, de manera elemental, las ecuaciones del tipo (4.7) debemos conocer, al menos, una solución particular $x_1(t)$ de la ecuación. Esta solución particular se obtendrá por tanteo. Una vez determinada, el cambio de función

$$x(t) = x_1(t) + w^{-1}(t)$$

transforma (4.7) en la ecuación lineal

$$w' - (f(t) + 2g(t)x_1(t))w = g(t).$$

El problema, por consiguiente, es determinar la solución particular. Este procedimiento fue desarrollado por Euler en una memoria publicada en el año 1763.

[7] "Solutio problematis ab Ill. Riccato proposito characteribus occultis involuta $24a$, $6b$, $6c$, $8d$, $33e$, $5f$, $2g$, $4h$, $33i$, $6l$, $21m$, $26n$, $16o$, $8p$, $5q$, $17r$, $16s$, $25t$, $32u$, $5x$, $3y$, $+$, $-$, —, $\pm$, $=$, 4, 2, 1."

[8] Notar que si $h(t) = 0$ nos encontraremos con una ecuación de tipo Bernoulli con $\alpha = 2$ y que si $g(t) = 0$ estaremos ante una ecuación lineal de primer orden.

***Ejemplo* 21.** Obtener la solución general de la ecuación

$$x' + x^2 = 1 + t^2.$$

Es claro que se trata de una ecuación diferencial de tipo Riccati. Una solución particular[9] es $x_1(t) = t$. Haciendo el cambio de función $x = t + \frac{1}{w}$ $(x' = 1 - \frac{w'}{w^2})$, tenemos la ecuación lineal

$$w' - 2tw = 1.$$

En primer lugar resolvemos la ecuación homogénea asociada, $w' - 2tw = 0$, cuya solución es $w(t) = ke^{t^2}$. Haciendo la variación de la constante y sustituyendo en la ecuación lineal llegamos a que

$$k'(t)e^{t^2} = 1 \Longrightarrow k(t) = \int e^{-t^2}\, dt = \int_0^t e^{-s^2}\, ds + C.$$

De esta manera,

$$w(t) = Ce^{t^2} + \int_0^t e^{t^2 - s^2}\, ds$$

y

$$x(t) = t + \frac{1}{Ce^{t^2} + \int_0^t e^{t^2-s^2}\, ds},$$

que es la solución general solicitada. ◁

El procedimiento desarrollado involucra el cálculo de dos primitivas, es decir involucra dos *cuadraturas* en la terminología de Euler. Veamos ahora dos proposiciones sencillas que permiten reducir el número de cuadraturas cuando se conozcan más soluciones particulares. La primera es otro resultado de Euler aparecido junto con el método que hemos mostrado.

Proposición 4. *Si se conocen dos soluciones de la ecuación de Riccati* (4.7)*, entonces su solución general puede obtenerse mediante una única cuadratura.*

Demostración. Si denotamos por x_1 y x_2 las soluciones particulares conocidas de la ecuación de Riccati, efectuamos el cambio de función

$$x = \frac{x_1 - wx_2}{1 - w}.$$

[9]Si uno tiene buen ojo, es claro que puede dar con la solución particular rápidamente. Sin embargo, podemos proceder de un modo algo más sistemático. Ante la forma que tiene la función $h(t)$, parece sensato tantear como solución particular un polinomio en t. Tomaremos un polinomio completo de grado uno $x_1(t) = at + b$ y lo insertamos en la ecuación (basta considerar un polinomio de grado uno ya que en este caso el grado del cuadrado del polinomio será dos coincidiendo con el grado del polinomio que define h). Así,

$$a + a^2t^2 + 2abt + b^2 = 1 + t^2$$

de donde, por identificación de coeficientes, obtenemos las ecuaciones

$$a + b^2 = 1, \quad 2ab = 0, \quad a^2 = 1,$$

cuya única solución es $a = 1$ y $b = 0$. Por tanto, $x_1(t) = t$.

Sustituyendo en la ecuación (4.7) y haciendo uso de que x_1 y x_2 son soluciones particulares, llegamos a que w debe satisfacer

$$w'(x_1 - x_2) + wg(t)(x_1 - x_2)^2 = 0.$$

Esta ecuación es de variables separadas, su solución es

$$w(t) = k \exp\left(-\int g(t)(x_1 - x_2)\, dt\right)$$

y, por tanto, la solución general de la ecuación de Riccati puede obtenerse mediante una única cuadratura. □



El siguiente resultado fue obtenido independientemente por dos matemáticos en el último cuarto del siglo XIX: Eduard Weyr en un trabajo publicado en 1876 y Emile Picard en un artículo de 1877. Es sorprendente que dos resultados con tantas analogías, la Proposición 4 y la Proposición 5, estén separados históricamente por más de un siglo.

En la imagen superior el matemático checo Eduard Weyr (1852–1903) y en la inferior el francés Emile Picard (1856–1941). El trabajo de Picard en la teoría de ecuaciones diferenciales es de gran importancia. Su metodo de las aproximaciones sucesivas (conocidas como *Iteradas de Picard*) permite probar de un modo riguroso un fundamental resultado de existencia y unicidad de solución para un problema de valores iniciales.



Proposición 5. *Si se conocen tres soluciones de la ecuación de Riccati* (4.7)*, entonces su solución general puede obtenerse sin cuadraturas.*

Demostración. Denotemos por x_1, x_2 y x_3 las tres soluciones particulares conocidas de (4.7). Sabemos que el cambio de función $x(t) = x_3(t) + w^{-1}(t)$ transforma la ecuación (4.7) en la ecuación lineal de primer orden

$$w' - (f(t) + 2g(x)x_3(t))w = g(t).$$

Con las otras dos soluciones podemos construir dos soluciones particulares para esta última,

$$v_1 = (x_1 - x_3)^{-1} \quad \text{y} \quad v_2 = (x_2 - x_3)^{-1},$$

que nos darán la solución general de la ecuación lineal

$$w(t) = C(v_2 - v_1) + v_1.$$

Notar que $v_1 - v_2$ es una solución particular de la ecuación homogénea asociada con la lineal (véase la Nota 3). De esta forma,

$$C = \frac{w(t) - v_1}{v_2 - v_1} \iff C = \frac{x - x_1}{x - x_3}\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1}$$

da la solución general de la ecuación de Ricatti. □

Analicemos ahora con más detalle la ecuación (4.8), que se suele denominar ecuación especial de Riccati. Daniel Bernoulli consiguió dar la solución de esta ecuación en términos de funciones elementales[10] para los valores

$$n = -\frac{4m}{2m \pm 1}$$

[10] Entendiendo por funciones elementales aquellas que se obtienen como composición de funciones algebraicas, la exponencial, el logaritmo, las funciones circulares y sus inversas.

con m entero no negativo, y también para el caso límite $n = -2$. Su técnica es sencilla. Para simplificar, denotaremos por $R_{n,a,b}$ la ecuación (4.8). Mediante el cambio de variable y función

$$x = -\frac{1}{X} \quad \text{y} \quad T = \frac{t^{n+1}}{n+1}, \tag{4.9}$$

la ecuación $R_{n,a,b}$ para $x = x(t)$ se transforma en la $R_{N,b(n+1)^N,a}$ para $X = X(T)$, donde $N = -n/(n+1)$. Usando ahora el cambio de variable y función

$$x = -\frac{s}{b} - zs^2 \quad \text{y} \quad t = \frac{1}{s}, \tag{4.10}$$

la ecuación $R_{n,a,b}$ para $x = x(t)$ pasa a ser la $R_{-n-4,a,b}$ para $z = z(s)$. Si tenemos en cuenta que el caso $n = 0$ es trivial (se trata de una ecuación de variables separadas), usando el cambio (4.10) obtendremos la solución para el caso $n = -4$; de éste, con (4.9), pasamos a $n = -4/3$, y reiterando el proceso tenemos los valores de n

$$0, -4, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{8}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{12}{7}, -\frac{16}{7}, -\frac{16}{9}, \dots$$

que se agrupan en la mencionada sucesión $n = -4m/(2m \pm 1)$.

En el caso límite $n = -2$, usando el cambio de función $x = w/t$, $w = w(t)$, llegamos a

$$t\frac{dw}{dt} = a + w + bw^2,$$

que es de variables separadas.

Aunque su demostración queda fuera del alcance de estas notas, cabe mencionar un resultado de Liouville del año 1841 en el que se deduce, como consecuencia de una teoría más general, que los únicos casos en los que las ecuaciones de Riccati especiales son resolubles en términos de funciones elementales son, precisamente, los avanzados por D. Bernoulli.

Más adelante veremos que existen ciertos cambios de función que permiten expresar algunas ecuaciones de tipo Riccati no resolubles en términos de funciones elementales como ecuaciones lineales de segundo orden resolubles por series de potencias. Estas series, por consiguiente, definirán funciones no elementales.

4.7. Problemas

Problema 100. La solución de la ecuación (4.2) se ha obtenido suponiendo que $k_1 \neq k_2$. ¿Cómo sería la solución de la ecuación en caso contrario?

Problema 101. Probar que en el modelo (4.1), supuesto que $k_1 \neq k_2$, la máxima concentración de antihistamínico en el torrente sanguíneo se obtiene para

$$t = \frac{\log k_1 - \log k_2}{k_1 - k_2}$$

Problema 102. Obtener la solución del sistema (4.1) con las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 1$. Obténgase una gráfica de la solución suponiendo los valores $k_1 = 0.6931$ y $k_2 = 0.0231$.

Problema 103. Suponiendo los valores de las constantes iguales a los del problema anterior, hágase un análisis del comportamiento de las funciones x e y a lo largo de 48 horas, si se suministra una dosis de antihistamina cada ocho horas.

Problema 104. La figura 4.3 muestra la sensibilidad del sistema (4.1) a las variaciones en el parámetro k_2. En este problema se pretende analizar la sensibilidad de las soluciones a las variaciones en el parámetro k_1.

a) Tomando la concentración de antihistamina en el torrente sanguíneo que se obtiene del sistema (4.1) con $k_2 = 0.0231$, dibujar las gráficas correspondientes a los valores $k_1 = 0.06931, 0.11, 0.3, 0.6931, 1$. ¿Por qué las gráficas correspondientes a los valores más grandes de k_1 cortan a las gráficas que corresponden a valores menores de este parámetro?

b) Para que las concentraciones de un medicamento sean terapéuticamente seguras deben mantenerse dentro de un intervalo fijo. Supongamos que el intervalo deseado de concentración para los antihistamínicos va de 0.2 a 0.8 por unidad de dosis suministrada. Con k_2 igual que en el apartado anterior, calcular los límites superior e inferior de k_1 de modo que la concentración de antihistamínico en sangre llegue a 0.2 en un intervalo de dos horas y se mantenga por debajo de 0.8 durante 24 horas.

Problema 105. Determinar los sistemas de ecuaciones asociados a los modelos compartimentales siguientes

a) $\xrightarrow{1+\operatorname{sen} t}$ $\boxed{x}$ $\xrightarrow{3x}$ $\boxed{y}$ $\xrightarrow{y}$

b) $\xrightarrow{t}$ $\boxed{x}$ $\xrightarrow{x}$ $\boxed{y}$ $\xrightarrow{y}$; $\boxed{x}$ $\xrightarrow{2x}$ $\boxed{z}$

Determinar las soluciones de los sistemas considerando $x(0) = y(0) = 0$ en a) y $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ en b). Analizar el comportamiento de las soluciones cuando $t \to \infty$.

Problema 106. Suponga que una célula está inmersa en una solución que contiene un soluto con concentración constante C_s. Suponga además que la célula tiene volumen constante V y que el área de su membrana permeable es



El médico alemán Adolf E. Fick (1829–1901), además de derivar la ley de difusión que lleva su nombre, desarrolló, a finales del siglo XIX, las primeras lentes de contacto.

una cierta constante A. Por la **ley de Fick**, si $C(t)$ denota la concentración de soluto en el interior de la célula en el instante t, la tasa instantánea de cambio de masa de la célula es directamente proporcional al área y a la diferencia entre C_s y $C(t)$. Encuentre $C(t)$ si $m(t) = V \cdot C(t)$ y $C(0) = C_0$. Si suponemos que $C_s > 2C_0$, determine el tiempo necesario para que se duplique la concentración inicial de soluto en el interior de la célula.

Problema 107. (Otro problema de máquinas quitanieves.) Una mañana comenzó a nevar temprano de manera regular y abundante. A mediodía, transcurridas T horas desde el comienzo de la nevada, una máquina quitanieves salió a despejar una carretera. Una segunda máquina partió del mismo lugar y siguiendo el mismo camino algún tiempo, τ, más tarde. Si la segunda máquina alcanzó a la primera, determinar, en función de T y τ, en qué momento y en qué posición se produjo el encuentro. (¿Qué le ocurre a la velocidad del segundo quitanieves en el momento del encuentro?)

Problema 108. (Y otro más.) Una mañana comenzó a nevar temprano de manera regular y abundante. A mediodía, transcurridas T horas desde el comienzo de la nevada, una máquina quitanieves salió a despejar una carretera. A las dos de la tarde la máquina dió la vuelta (instantáneamente) para volver al punto de partida, llegando a éste a las tres de la tarde. ¿Cuándo comenzó la nevada? ¿A qué hora debería haber dado la vuelta el quitanieves si hubiese querido llegar de vuelta al punto de partida a las dos de la tarde?

Problema 109. (Otro problema sobre cuerpos de masa variable.) Una gota de lluvia esférica, partiendo del reposo, cae por efecto de la gravedad. Si recoge vapor de agua (que se supone que está en reposo) a un ritmo proporcional a su superficie y su radio inicial es cero, probar que cae con una aceleración igual a $g/4$.

Problema 110. Encontrar la solución general de

a) $x' + \frac{2t}{1+t^2}x = \frac{1}{1+t^2}$,

b) $x' + x = te^t$,

c) $x' + t^2x = t^2$,

d) $(1+t^2)x' + tx = (1+t^2)^{5/2}$

e) $x^2 + (3tx-1)x' = 0$,

f) $3tx' - 2x = \frac{t^3}{x^2}$,

g) $tx' + x = t^4x^3$,

h) $(tx + t^2x^3)x' = 1$,

i) $x' - x^2 + 2tx = t^2$, sabiendo que admite una solución particular polinómica,

j) $x' = -2\frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} + x^2 \operatorname{sen} t$, sabiendo que $x(t) = \frac{-1}{\cos t}$ es una solución particular.

Problema 111. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones de tipo Riccati, determinando en cada caso más de una solución particular. En todos los casos debe intentarse encontrar soluciones polinómicas.

a) $x'(1-t^3)+2t+t^2x-x^2=0$.

b) $x'=t^2-2tx+x^2$.

c) $t(1-t^2)x'-t^2+(t^2-1)x+x^2=0$.

Problema 112. Resolver los problemas de valores iniciales

a) $\begin{cases} x'+tx=1+t, \\ x(3/2)=0, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x'+x=\frac{1}{1+t^2}, \\ x(1)=2, \end{cases}$

c) $\begin{cases} (1+t^2)x'+4tx=t, \\ x(1)=1/4. \end{cases}$

Problema 113. *Una caracterización para ecuaciones lineales de primer orden.* Sea $f(t,x)$ una función de clase C^2. Probar que la ecuación $x'=f(t,x)$ es lineal de primer orden si y sólo si

$$\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}=0.$$

Problema 114. *Una caracterización para ecuaciones de Bernoulli.* Sea $f(t,x)$ una función de clase C^2. Probar que la ecuación $x'=f(t,x)$ es de tipo Bernoulli si y sólo si la función

$$u(t,x)=x\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(t,x)}{x}\right)\right)\right)$$

satisface que

$$\frac{1}{1+u(t,x)}\left(\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2\right)=0.$$

Problema 115. *Una caracterización para ecuaciones de Riccati.* Sea $f(t,x)$ una función de clase C^3. Probar que la ecuación $x'=f(t,x)$ es de tipo Riccati si y sólo si

$$\frac{\partial^3 f(t,x)}{\partial x^3}=0.$$

Problema 116. Resolver la ecuación[11]

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{dw}{dr}+\frac{2w}{r}\right)=0.$$

[11]Propuesta por F. P. Matz como Problema 3442 en la revista *The American Mathematical Monhtly* en 1930, pág. 380.

Problema 117. Probar las siguientes afirmaciones:

a) Sean $a, c > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces cada solución de la ecuación

$$x' + ax = be^{-ct}$$

verifica que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

b) Sean $a(t)$ y $f(t)$ funciones continuas en $\mathbb{R}$, $a(t) \geq c > 0$ y $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, entonces cada solución de la ecuación

$$x' + a(t)x = f(t),$$

verifica que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Problema 118. Sabiendo que la ecuación diferencial

$$f(t)\,dx + (t^2 + x)\,dt = 0$$

admite un factor integrante de la forma $\mu(t) = t$, determinar todas las posibles funciones f. En ese caso obtener la solución general de la ecuación dada.

Problema 119. Sean las funciones

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \qquad \text{y} \qquad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}.$$

a) Dar una expresión explícita de $g(t)$.

b) Demostrar que $f'(t) = 1 + tf(t)$. A partir de esta relación, obtener $f(t)$.

c) Calcular

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)}.$$

Problema 120. Hallar la solución de la ecuación diferencial

$$tx' + \lambda x = \frac{1}{1+t}, \qquad \lambda > 0,$$

definida en $(0, \infty)$ y tal que $\lim_{t\to 0^+} x(t) \in \mathbb{R}$. Obtener el desarrollo en serie de potencias de t para dicha solución. Utilizar todo lo anterior para obtener la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n} \frac{1}{2^{3n}}.$$

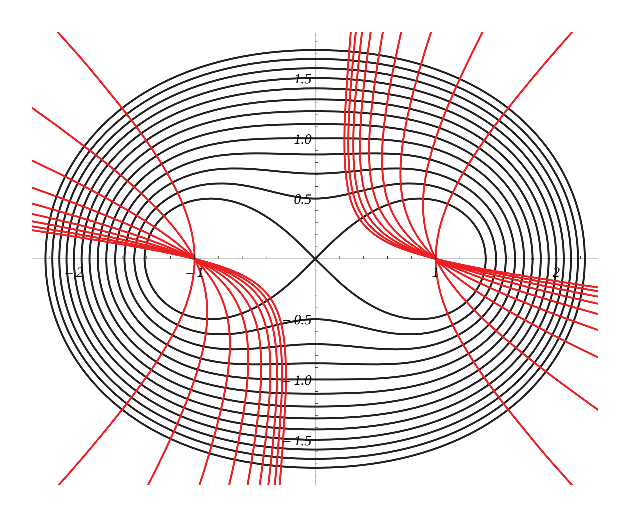


Figura 4.11: En negro algunas curvas de la familia del Problema 123 con $a = 1$ y en rojo sus trayectorias ortogonales.

Problema 121. Sabemos que las funciones $x_1(t) = t$ y $x_2(t) = t \operatorname{sen} t$ son soluciones particulares de la ecuación diferencial $x' + p(t)x + q(t) = 0$. Encontrar la solución general de la ecuación, las funciones $p(t)$ y $q(t)$ y determinar aquella solución que verifica que $x(u) = 2u$, para cada $u \in \mathbb{R}$ fijo.

Problema 122. Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de soluciones de cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $5t^2x^5x' + \dfrac{xx'}{2t} = -1$,

b) $x\,dt + (2t - x^2)\,dx = 0$.

Problema 123. Calcular las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada en coordendas polares $(\theta, r(\theta))$, donde

$$r^4 - 2a^2r^2\cos(2\theta) + a^4 = b^4,$$

siendo a una constante y b un parámetro. En la figura 4.11 se muestran la familia de curvas y sus trayectorias ortogonales.

Problema 124. Calcular las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada en coordendas polares $(\theta, r(\theta))$, donde

$$r^4 - 2a^2r^2\tan(2\theta) + a^4 = b^4,$$

siendo a una constante y b un parámetro. La expresión para las trayectorias ortogonales quedará expresada en términos de una integral. En la figura 4.12 se muestran la familia de curvas y sus trayectorias ortogonales.

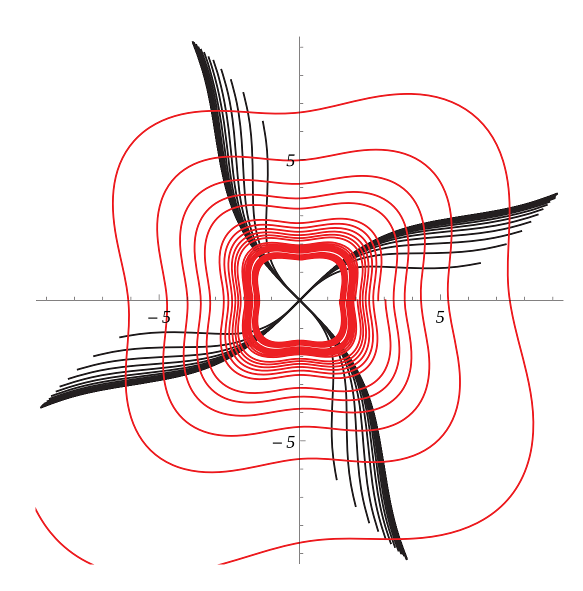


Figura 4.12: En negro algunas curvas de la familia del Problema 124 y en rojo sus trayectorias ortogonales.

Problema 125. Sea $P = (x, y)$ un punto de una cierta curva y r la recta tangente en dicho punto. Determinar la familia de curvas tal que para cada punto P se verifica que el segmento de la recta tangente r comprendido entre P y el eje OY es igual a $2xy^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Problema 126. En cada recta normal a una curva γ, se considera el segmento cuyos extremos son el punto de contacto con la curva y la intersección con el eje OX. Si suponemos que el punto medio de este segmento está sobre la parábola $y^2 = x$:

a) Hallar la familia de curvas γ cuyas normales cumplen esta propiedad.

b) Calcular las trayectorias ortogonales a la familia de curvas γ.

Problema 127. En un modelo de crecimiento económico *neoclásico simple* se supone que una sociedad ahorra (con el fin de invertir) una fracción constante s de la producción en cada instante de tiempo y consume el resto. La acumulación de capital por individuo $k(t)$ está caracterizada por la ecuación

$$\frac{dk}{dt} = sf_0 k^\alpha - \mu k,$$

donde f_0, α y μ son parámetros reales tales que $f_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$ y $\mu > 0$. Determinar la solución de la ecuación supuesto que $k(0) = k_0 > 0$.

Problema 128. La propagación de una acción simple en una población grande (por ejemplo, los conductores que encienden los faros de su automóvil al atardecer) a menudo depende en parte de circunstancias externas (que oscurezca)

y en parte de una tendencia a imitar a quienes ya han realizado la acción en cuestión. En este caso, la proporción $P(t)$ de personas que ya han realizado la acción en el instante t puede describirse por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = (1 - P)[e(t) + bP]$$

donde $e(t)$ mide el estímulo externo y b es un coeficiente de imitación.

a) Observar que esta ecuación es de Riccati y transformarla mediante un cambio de función en una ecuación diferencial lineal de primer orden.

b) Resolver la ecuación propuesta para $e(t) = at$, con a constante.

4.7.1. Problemas de mezclas

Los problemas de mezclas pueden analizarse mediante modelos compartimentales y dan lugar a ecuaciones o sistemas lineales. Esquemáticamente un problema de mezclas se modeliza mediante un recipiente en el que va a entrar una disolución con una determinada concentración de soluto, se va a mezclar con la disolución presente en el recipiente, y va a salir con una concentración distinta del soluto. Una suposición fundamental del modelo es que la mezcla se produce de manera instantánea y uniforme en todo el recipiente. Las velocidades de entrada y salida de la disolución no han de coincidir necesariamente. El modelo de absorción de medicamentos estudiado al comienzo de este capítulo es en esencia un problema de este tipo (la sangre y el tracto intestinal hacen el papel del disolvente y el medicamento es el soluto), y también el problema de las copas de vino. Hay otros muchos fenómenos que comparten esta misma estructura y todos ellos se analizan del mismo modo. La idea fundamental es aplicar la ley de equilibrio

$$\text{Tasa de cambio neta} = \text{Tasa de entrada} - \text{Tasa de salida}$$

Veamos algunos ejemplos que dan lugar a ecuaciones o sistemas que podemos resolver con los métodos que hemos desarrollado hasta ahora.

Problema 129. Supongamos un depósito que contiene V litros de una solución salina que contiene ρ gramos de sal,[12] tal y como está representado en el esquema de la figura 4.13. Si recibe por la parte superior otra solución con una concentración de c_1 gramos/litro a una velocidad de v_1 litros/minuto y desagua por la parte inferior a una velocidad de v_2 litros/minuto, probar que la cantidad x de sal en el depósito en un cierto instante t es la función solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c_1 v_1 - v_2 \dfrac{x}{V + (v_1 - v_2)t}, \\ x(0) = \rho. \end{cases}$$

Determinar la solución x.

[12] Asumiremos, si fuese necesario, que el depósito tiene una capacidad ilimitada.

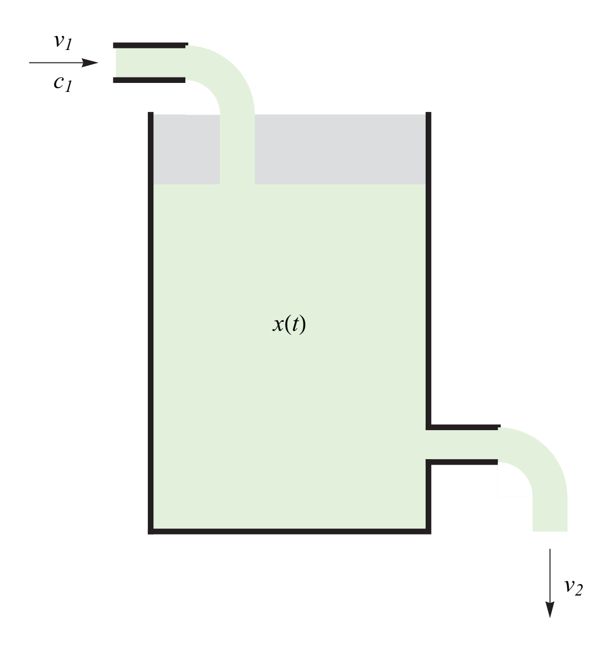


Figura 4.13: Esquema asociado al Problema 129.

Problema 130. Supongamos tres depósitos iguales con V litros de agua unidos como se muestra en el esquema de la figura 4.14. El primero de los recipientes recibe por la parte superior una solución con una concentración de c_1 gramos/litro a una velocidad de v_1 litros/minuto. Además el primer depósito trasvasa su mezcla al segundo a una velocidad de v_2 litros/minuto y éste al tercero a una velocidad de v_3 litros/minuto. Si el sistema desagua a una velocidad de v_4 litros/minuto, comprobar que la cantidad de sal en cada uno de los depósitos, denotadas por x, y y z respectivamente, es la solución del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c_1 v_1 - v_2 \dfrac{x}{V + (v_1 - v_2)t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = v_2 \dfrac{x}{V + (v_1 - v_2)t} - v_3 \dfrac{y}{V + (v_2 - v_3)t}, \\ \dfrac{dz}{dt} = v_3 \dfrac{y}{V + (v_2 - v_3)t} - v_4 \dfrac{z}{V + (v_3 - v_4)t}, \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0. \end{cases}$$

Resolver el sistema en el caso $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$.

Problema 131. Un tanque de almacenaje de una empresa situada junto a un lago vierte en él, a través de pequeñas fisuras, una solución concentrada al 37 % en el volumen de ácido clorhídrico. El ácido se mezcla uniformemente con el agua del lago. Sabiendo que la solución sale del depósito a una velocidad de 20 litros por hora, que el lago contiene cuatro millones de litros de agua en el

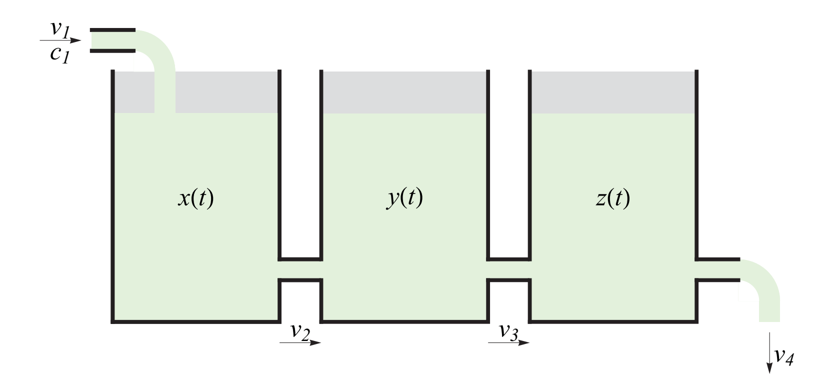


Figura 4.14: Esquema asociado al Problema 130.

momento inicial del vertido, que recibe agua limpia de fuentes externas a una velocidad de 1000 litros por hora y que desagua a través de un riachuelo a la misma velocidad, determinar la cantidad de ácido clorhídrico en el lago al cabo de un año.

Problema 132. Una piscina con capacidad de 40000 litros renueva 12000 de ellos cada día. Las tabletas de cloro para el mantenimiento son depositadas en un pequeño recipiente para su disolución. Sabemos que cada pastilla tiene un peso de 100 gramos y tarda una semana en disolverse. Si inicialmente hay 100 gramos de cloro en el agua e introducimos dos pastillas para su disolución, ¿cuál será la cantidad de cloro t días después?

Problema 133. El tricloroetileno y otros disolventes clorados son causa frecuente de contaminación de aguas subterráneas. Este tipo de sustancias, conocidas como DNAPL's (siglas inglesas de *dense nonaqueous phase liquids*), son más densas que el agua y escasamente solubles en ella. Las DNAPL's tienen tendencia a acumularse como una capa bajo el nivel inferior del agua. El paso de aguas subterráneas a través de la sustancia contaminante produce una lenta disolución de ésta y su difusión. La situación aparece ilustrada en la figura 4.15.

Supongamos que m es la masa de sustancia contaminante, A_s es el volumen de la región que produce la contaminación, v_d es la velocidad a la que fluyen las aguas subterráneas[13] y c_s es la concentración de sustancia contaminante en el agua que procede de la fuente de sustancias químicas. En este caso la ecuación que describe la variación con el tiempo de la masa de DNAPL es

$$\frac{dm}{dt} = -A_s v_d c_s(t),$$

donde la relación entre la concentración y la masa está dada por una ley de la

[13] Conocida como velocidad de Darcy.

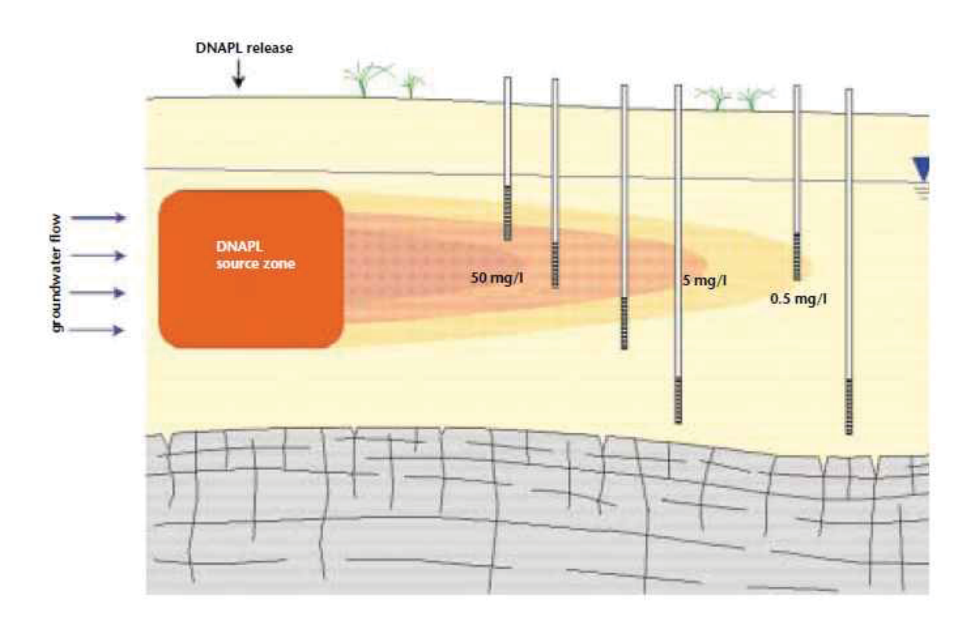


Figura 4.15: Esquema de la contaminación de aguas subterráneas con DNAPL. La imagen ha sido tomada del informe *An illustrated handbook of DNAPL transport and fate in the subsurface*, de la Environment Agency del Gobierno Británico.

forma

$$\frac{c_s(t)}{c_0} = \left(\frac{m(t)}{m_0}\right)^{\gamma}$$

siendo γ una constante determinada experimentalmente, m_0 la masa de DNAPL inicial y c_0 la concentración que genera la masa inicial m_0 cuando el agua comienza a fluir a través de la sustancia contaminante.

a) Probar que la variación de la masa sigue la ecuación

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m^{\gamma}$$

con $\alpha = v_d A_s c_0 / m_0^{\gamma}$.

b) Diversos procesos debidos a degradaciones *biótica y abiótica* producen una disminución de la sustancia contaminante que es proporcional a la masa, dando lugar a la ecuación

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m^{\gamma} - \lambda m$$

para una cierta constante de decaimiento λ. Determinar la solución de la ecuación.

c) Probar que si $\gamma \geq 1$ la sustancia contaminante permanece indefinidamente y si $0 < \gamma < 1$ desaparece en un tiempo finito t_f. Determinar el tiempo de desaparición t_f en el segundo caso.

d) Tomando los valores $m_0 = 1260$ kilogramos, $c_0 = 100$ miligramos por litro, $A_s = 30$ metros cuadrados, $v_d = 20$ metros por año y $\lambda = 0$, dibujar gráficos de la concentración c_s en los casos:

  i) $\gamma = 0.5$, para $0 \leq t \leq t_f$,

  ii) $\gamma = 2$, para $0 \leq t \leq 100$ años.

e) Supongamos que las autoridades emprenden acciones de reparación que producen una reducción del 90 % en la cantidad inicial de DNAPL. Repetir el apartado anterior reemplazando m_0 y c_0 por $m_1 = 0.1m_0$ y $c_1 = (0.1)^\gamma c_0$. Comparar las gráficas obtenidas en ambos casos.

f) Supongamos que las acciones de reparación tienen lugar 10 años después del depósito de la sustancia contaminante. Teniendo esto en cuenta, realizar las correspondientes modificaciones para trazar las gráficas correspondientes a los datos proporcionados en el apartado e). Comparar y comentar los resultados obtenidos con los de los apartados anteriores.

4.7.2. La ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton establece que la tasa de cambio de temperatura de un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que le rodea.

Problema 134. Un cuerpo se calienta hasta 110ºC y se expone al aire libre a una temperatura de 10ºC. Al cabo de una hora, su temperatura es de 60ºC. ¿Cuánto tiempo adicional es necesario para que se enfríe hasta 30ºC?

Problema 135. A las ocho de mañana de un cierto día le preparé a mi mujer un café cuya temperatura inicial era de 90ºC. A las ocho y media, cuando salimos para dejar a los niños en el colegio, la temperatura del café era de 45ºC. Desgraciadamente no le dio tiempo de tomárselo antes de salir de casa, y cuando volvimos a las nueve la temperatura del café era sólo de 30ºC. ¿A qué temperatura estaba nuestra casa esa mañana?

Problema 136. ¿Cuántas mediciones de la temperatura corporal son necesarias para determinar la hora de fallecimiento de una persona que se encuentra en un entorno de temperatura constante? ¿Cómo obtendremos la temperatura del cadáver?

Problema 137. Si la temperatura del medio oscila de manera regular en torno a una temperatura media μ, ésta puede describirse considerando la función

$$T_m(t) = \mu + a\cos(\omega t).$$

Con este tipo de función se dice que la temperatura oscila alrededor del valor medio μ con amplitud a (es decir, la temperatura se moverá en el intervalo $[\mu - a, \mu + a]$). La frecuencia de las oscilaciones es $\omega/2\pi$ e indica el número de veces que ocurre una oscilación completa por unidad de tiempo. El inverso de la frecuencia, $2\pi/\omega$, es el período, tiempo que tarda una oscilación completa, es decir, el tiempo entre dos máximos consecutivos.

Deseamos conocer la temperatura de un cuerpo en un medio donde la temperatura fluctúa de este modo. Si la temperatura inicial del cuerpo es T_0 y k es la constante de proporcionalidad de la ley de enfriamiento de Newton, probar que

$$T(t) = \mu + e^{-kt}\left(T_0 - \mu - \frac{ak^2}{k^2+\omega^2}\right) + ak\frac{\cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{k^2+\omega^2}},$$

donde

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega}{k}\right).$$

Problema 138. Encontrar la función de temperatura de un cuerpo con temperatura inicial T_0 y constante de proporcionalidad k en la ley de enfriamiento de Newton, si la temperatura del medio fluctúa siguiendo la función

$$T_m(t) = \mu + a\cos(\omega(t-\alpha)).$$

Problema 139. Se encontró un cadáver a las 7:00 a. m. de un día de invierno, y en ese momento se le realizó una medición de temperatura, obteniendo 20°C. Una hora más tarde la temperatura del cadáver había descendido hasta 15°C. Supongamos que la temperatura del medio oscilaba según la función

$$T_m(t) = 3 - 5\cos\left(\omega(t-2)\right),$$

con $\omega = \frac{\pi}{12}$, donde t se mide en horas y el valor $t = 0$ corresponde a la medianoche.

1. Probar que la constante de proporcionalidad k de la ley de enfriamiento de Newton satisface la ecuación

$$k = -\log\left(\frac{12(k^2+\omega^2) - 5k(k\cos(6\omega) + \omega\operatorname{sen}(6\omega))}{17(k^2+\omega^2) - 5k(k\cos(5\omega) + \omega\operatorname{sen}(5\omega))}\right).$$

2. Si t_0 denota la hora del fallecimiento, usar las condiciones $T(t_0) = 37$ y $T(7) = 20$ para obtener que t_0 satisface la ecuación

$$t_0 = 7 + \frac{1}{k}\log\left(\frac{17(k^2+\omega^2) - 5k(k\cos(5\omega) + \omega\operatorname{sen}(5\omega))}{34(k^2+\omega^2) - 5k(k\cos(\omega(t_0-2)) + \omega\operatorname{sen}(\omega(t_0-2)))}\right).$$

3. Usando *Mathematica* (o algún otro programa similar)[14] y usando el método de Newton obtener las aproximaciones $k \sim 0.3639$ y $t_0 \sim 4.8803$, correspondiente a las 4:53 a. m.

[14]Con *Mathematica* es suficiente usar el comando `FindRoot`, este comando aplica el método de Newton directamente.

Problema 140. Una variante de la ley de enfriamiento de Newton es la *ley de radiación de Stefan*, según la cual la tasa de variación de la temperatura de un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia entre las potencias cuartas de las temperaturas del cuerpo y del medio. Obtener la temperatura de un cuerpo sujeto a esta ley con temperatura inicial T_0, cuando la temperatura del medio se mantiene constante. Hacer una comparación de los resultados obtenidos usando la ley de Newton o la ley de Stefan, para distintos valores de la temperatura del medio. Analizar los resultados.

Problema 141. Otra modificación de la ley de enfriamiento de Newton propone que la tasa de variación de la temperatura de un cuerpo está gobernada por la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = -a(T - T_m)|T - T_m|^p$$

donde a y p son constantes positivas y T_m es la temperatura del medio, que consideraremos constante.

a) Encontrar la solución general de la ecuación cuando $p = 1/3$.

b) Dar la solución del problema de valor inicial compuesto por la ecuación dada y la condición $T(0) = T_0 > T_m$.

c) Determinar el comportamiento a largo plazo de la temperatura del cuerpo.

Capítulo 5

Otros métodos elementales de resolución

5.1. Ecuaciones en las que la derivada aparece implícitamente

Todas las ecuaciones que hemos tratado hasta ahora responden al patrón $x' = f(t, x)$; sin embargo, esto no siempre es así. En algunos casos la derivada aparece implicitamente en la ecuación; es decir, se presenta como $F(t, x, x') = 0$. Como ya comentamos al principio, bajo condiciones apropiadas sobre F se puede pasar a una ecuación explícita. De todos modos, esto no siempre tiene porque ocurrir.

En algunos casos puede que la ecuación se presente como una función polinomial de x' y que dicho polinomio admita una factorización en términos de la *variable* x'. Resolviendo la ecuación que aparece en cada factor tendríamos la solución general. Por ejemplo,

$$(x')^2 - (2t + x)x' + 2xt = 0.$$

Esta ecuación puede factorizarse como

$$(x' - 2t)(x' - x) = 0$$

y sus soluciones serán $x = t^2 + c$, que se obtiene de resolver $x' = 2t$, y $x = ke^t$, que viene de $x' = x$.

Otra posibilidad que puede presentarse es que la ecuación pueda resolverse con respecto a t o x:

a) $t = f(x, x')$, resuelta respecto a t,

b) $x = f(t, x')$, resuelta respecto a x.

En ambos casos podemos buscar soluciones paramétricas, $t = t(p, c)$ y $x = x(p, c)$, por un procedimiento similar.

Para a) tomamos $x' = p$ y de aquí, suponiendo que $t = t(p)$ y $x = x(p)$, obtenemos que

$$\frac{dx}{dp} = p\frac{dt}{dp}. \tag{5.1}$$

Ahora derivando contra p la ecuación $t = f(x, p)$ (es decir, la ecuación de partida con x' sustituido por p) llegamos a que

$$\frac{dt}{dp} = \frac{\partial}{\partial x}f(x, p)\frac{dx}{dp} + \frac{\partial}{\partial p}f(x, p).$$

Finalmente, de las dos últimas ecuaciones deducimos que

$$\frac{dx}{dp} = p\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x, p)\frac{dx}{dp} + \frac{\partial}{\partial p}f(x, p)\right).$$

Resolviendo la ecuación, en los casos que sea posible, llegaremos a una expresión $x = x(p, c)$ que sustituiremos en $t = f(x, p)$ para tener $t = t(p, c)$.

Para b) el procedimiento es similar. Queremos obtener $t = t(p, c)$ y $x = x(p, c)$. Nuevamente consideramos $x' = p$ y derivamos contra p la ecuación $x = f(t, p)$,

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\partial}{\partial t}f(x, p)\frac{dt}{dp} + \frac{\partial}{\partial p}f(x, p).$$

Ahora, usando (5.1), concluimos que $t = t(p)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x, p)\frac{dt}{dp} + \frac{\partial}{\partial p}f(x, p) = p\frac{dt}{dp}. \tag{5.2}$$

De esta ecuación obtendremos una expresión para $t = t(p, c)$ y de la relación $x = f(t, p)$ deduciremos la forma de $x = x(p, c)$.

***Ejemplo* 22.** Obtener la solución general de la ecuación

$$t = xx' + (x')^2.$$

Tomando $x' = p$, tendremos que

$$t = xp + p^2 \Longrightarrow \frac{dt}{dp} = p\frac{dx}{dp} + x + 2p.$$

Con la igualdad $\frac{dt}{dp} = \frac{1}{p}\frac{dx}{dp}$ llegamos a

$$\frac{dx}{dp} = p\left(p\frac{dx}{dp} + x + 2p\right),$$

que convenientemente reordenada da

$$\frac{dx}{dp} + \frac{p}{p^2 - 1}x = -\frac{2p^2}{p^2 - 1}.$$

La solución de esta ecuación lineal de primer orden es

$$x = \frac{c}{\sqrt{p^2-1}} - p - \frac{\log(p+\sqrt{p^2-1})}{\sqrt{p^2-1}}$$

y esto nos permite obtener la expresión paramétrica

$$t = \frac{cp}{\sqrt{p^2-1}} - \frac{p\log(p+\sqrt{p^2-1})}{\sqrt{p^2-1}},$$

con lo que concluimos. ◁

***Ejemplo* 23.** Obtener la solución general de la ecuación

$$x = (2+x')t + (x')^2.$$

Considerando $x' = p$ en la ecuación propuesta y derivando respecto a p, se tiene que

$$x = (2+p)t + p^2 \Longrightarrow \frac{dx}{dp} = (2+p)\frac{dt}{dp} + t + 2p.$$

Así, usando la relacion $\frac{dx}{dp} = p\frac{dt}{dp}$, llegamos a la ecuación

$$(2+p)\frac{dt}{dp} + t + 2p = p\frac{dt}{dp} \iff \frac{dt}{dp} + \frac{t}{2} = -p.$$

Esta última ecuación es lineal de primer orden y su solución general es

$$t = 2(2-p) + ce^{-p/2}.$$

Además, resulta evidente que

$$x = 8 - p^2 + c(2+p)e^{-p/2},$$

lo que completa las ecuaciones paramétricas de la solución general de la ecuación propuesta. ◁

5.1.1. Una caracterización para las parábolas

Utilizando la técnica que acabamos de introducir vamos a dar una nueva caracterización para las parábolas, en este caso en función de su comportamiento respecto a los rayos de luz.

> **Un problema de óptica.** Determinar la forma de un espejo curvo en el que todos los rayos de luz provenientes del Sol (que se suponen paralelos) se reflejan pasando por un punto fijo.

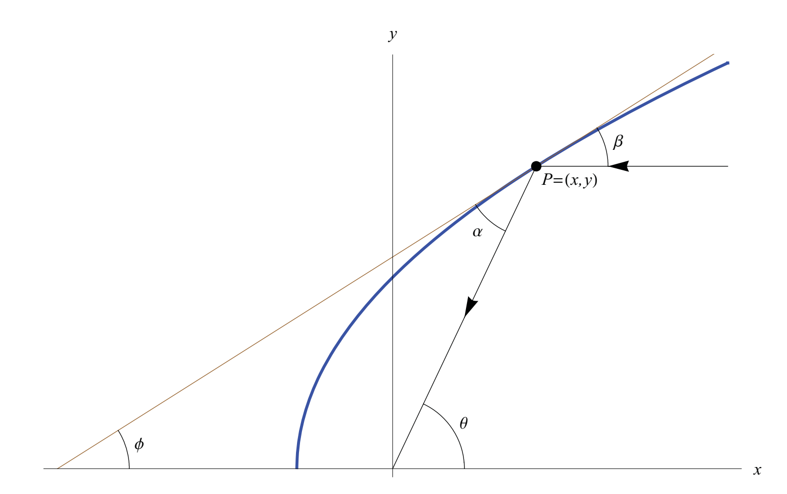


Figura 5.1: Esquema para la determinación de la forma de un espejo.

El espejo tendrá la forma de una superficie de revolución obtenida al girar alrededor de OX una cierta curva sobre la que los rayos solares, que supondremos paralelos al eje OX, se reflejarán pasando por el origen de coordenadas, que tomaremos como el punto fijo. Seguiremos la notación introducida en la figura 5.1. Teniendo en cuenta la ley de reflexión el ángulo de impacto de los rayos de luz α será igual al de reflexión β. Por estar comprendidos entre rectas paralelas, los ángulos β y ϕ también coinciden. Esto nos lleva a que $\theta = 2\phi$. Ahora, es claro, que $\tan\theta = \frac{y}{x}$ y

$$\tan\theta = \tan(2\phi) = \frac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi}.$$

Usando que $\tan\phi = y'$ e identificando las dos expresiones anteriores, llegamos a la ecuación

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1-(y')^2},$$

que puede reescribirse como

$$y = x\frac{2y'}{1-(y')^2}$$

y que responde al tipo de ecuaciones que hemos estudiado en el caso b). Para resolverla buscaremos soluciones paramétricas. Tomando $y' = p$ la ecuación se transforma en

$$y = x\frac{2p}{1-p^2}. \tag{5.3}$$

Además, se tendrá que

$$\frac{dy}{dp} = p\frac{dx}{dp}. \tag{5.4}$$

Derivando contra p la igualdad (5.21), deducimos la expresión

$$\frac{dy}{dp} = \frac{2p}{1-p^2}\frac{dx}{dp} + x\frac{2(1+p^2)}{(1-p^2)^2}. \tag{5.5}$$

Ahora, eliminando $\frac{dy}{dp}$ del sistema formado por (5.4) y (5.5) obtenemos la ecuación de variables separadas

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p(1-p^2)},$$

cuya solución es

$$x = c\frac{1-p^2}{p^2}.$$

Finalmente, de (5.3) se concluye que

$$y = \frac{2c}{p}.$$

Eliminando p de las ecuaciones paramétricas anteriores finalizamos que la familia de curvas que verifican la propiedad propuesta son las parábolas de la forma[1]

$$y^2 = 4cx + 4c^2 = 4c\,(x+c)\,.$$

El foco de esta familia de parábolas es, precisamente, el origen y la recta directriz de cada una de ellas es $x = -2c$. Para cada parábola de la familia se verificará que los rayos solares, que llegarán sobre rectas de la forma $y = k$, se reflejarán pasando por el origen de coordenadas que es el foco.

Como ya se ha comentado, Diocles en su obra *Sobre los espejos ustorios* ya había establecido que para espejos parabólicos se cumplía este hecho que se denomina propiedad focal de las parábolas. Lo que acabamos de probar en este ejemplo es que las parábolas son las únicas curvas cumpliendo la propiedad focal; es decir, se trata de otra caracterización de estas curvas.

Material complementario

Sobre la ley de reflexión de la luz

Aunque ya ha aparecido en varias ocasiones, creemos que merece la pena realizar un breve comentario sobre la ley de reflexión de la luz.

[1]Las ecuaciones de la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ representan parábolas de vértice en el punto (h,k), foco situado en $(h+p,k)$ y recta directriz $x = h-p$. Recordad que una parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de un punto, llamado foco, y de una recta, denominada directriz.

La ley de reflexión de la luz establece que el ángulo de incidencia de un rayo de luz es igual a su ángulo de reflexión, y es conocida desde la antigüedad. Tradicionalmente (véase el libro de T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Clarendon Press, Oxford, 1921; reimpresión, Dover, 1981) la obra titulada Catóptrica,[2] *atribuida durante mucho tiempo a Euclides (aproximadamente, 325–265 a. de C.), ha sido considerada la referencia más antigua para la ley de reflexión. La* Catóptrica, *al igual que los comentarios clásicos a los* Elementos, *fue redactada por Teón de Alejandría (335–405 d. de C.)*[3] *y se ha confirmado que es, en realidad, un* curso *dictado por Teón recopilando los conocimientos sobre el tema hasta el momento. En el trabajo de Teón no aparece ninguna demostración de la ley de reflexión. La referencia más antigua conocida para una prueba, basada en cierto comportamiento de los rayos de luz, es otra* Catóptrica, *en este caso de Herón de Alejandría (aproximadamente, 10–75 d. de C.) y datada en el siglo primero. Sin embargo existen evidencias de que se conocía la forma de probarla desde varios siglos antes. Por ejemplo, en la* Catóptrica *de Teón se habla de un demostración dada por Arquímedes (287–212 a. de C.). De hecho, la tradición iconográfica nos muestra a Arquímedes defendiendo Siracusa de las embestidas del general romano Marcelo usando la reflexión de los rayos solares sobre espejos para hacer arder las naves enemigas. Es conocido que puede hacerse arder objetos por este procedimiento, aunque de ahí a quemar un navío, más teniendo en cuenta los medios disponibles en aquella época, va un gran trecho. Sin duda, la imagen de Arquímedes y los espejos es simplemente la representación de una leyenda.*

Otro circunstancia que permite asegurar que la ley de reflexión era ya bien conocida en el siglo tercero antes de Cristo es que Diocles (240–180 a. de C.) la utiliza como argumento fundamental para probar la ya mencionada propiedad focal de las parábolas.

Los fenómenos de reflexión continuaron fascinando a los investigadores de épocas posteriores. Por ejemplo, Leonardo da Vinci trabajó sobre la reflexión de los rayos solares sobre espejos circulares. Una muestra clara de su trabajo en esta línea es el Codex Arundel, *una colección de notas originales de Leonardo compiladas tras su muerte y perteneciente a la British Library, que puede visitarse virtualmente,*[4] *y de donde hemos tomado la imagen en la figura 5.3. En la parte derecha del manuscrito de Leonardo se observa su estudio sobre la reflexión de los rayos solares sobre un espejo circular. La curva que aparece formada por los rayos reflejados se denomina* cáustica de la circunferencia *y resulta sencillo comprobar que se trata de la envolvente de los rayos solares reflejados por el espejo, cuestión esta última sobre la que ya trabajamos en el primer capítulo.*

[2] La catóptrica, según la RAE, es la rama de la óptica que trata de las propiedades de la luz reflejada.

[3] Teón de Alejandría fue el padre de Hypatia, la primer mujer matemática de la que se tiene conocimiento. La vida de Hypatia, asesinada por fundamentalistas cristianos por negarse a renunciar a sus creencias, ha servido de inspiración a A. Amenábar para realizar su película *Ágora*.

[4] `http://www.bl.uk/onlinegallery/ttp/ttpbooks.html`

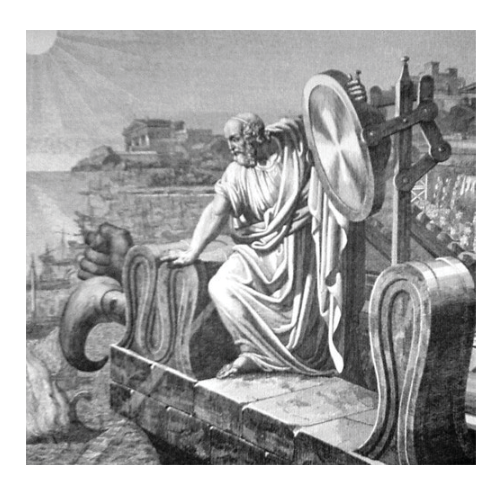


Figura 5.2: Una de las múltiples representaciones de Arquímedes durante la defensa de Siracusa.

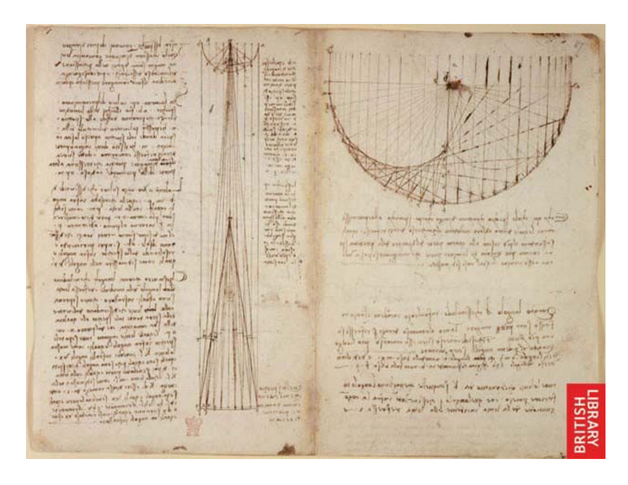


Figura 5.3: Una imagen del *Codex Arundel* cortesía de la British Library.

La relación de las matemáticas y la luz se han mantenido y profundizado a lo largo de los siglos y, de hecho, ha dado lugar al desarrollo de importantes ramas de las matemáticas. Sin embargo estas cuestiones quedan fuera del alcance de estas notas.

5.2. Ecuación diferencial de Lagrange



J. L. Lagrange (1736–1813). Aunque frecuentemente es considerado como francés, Lagrange nació en la actual ciudad italiana de Turín, donde se formó en matemáticas de manera autodidacta. A los treinta años se trasladó a Berlín y allí trabajó durante dos decadas. Finalmente, en el año 1787 se instaló en París donde permaneció hasta su muerte. El trabajo matemático de Lagrange abarca una amplia variedad de temas (análisis, álgebra, probabilidad ...) y en todos ellos realizó importantes aportaciones.

Se denomina ecuación diferencial de Lagrange a la que tiene la forma

$$x + t\phi(x') + \psi(x') = 0,$$

con ϕ y ψ funciones derivables. Se trata de ecuaciones de la forma $x = f(t, x')$ para las que buscaremos soluciones paramétricas de la forma $t = t(p, c)$ y $x = x(p, c)$. Haciendo $x' = p$ tendremos que $x = -t\phi(p) - \psi(p)$ y la ecuación (5.2), en este caso será,

$$\frac{dt}{dp} + t\frac{\phi'(p)}{p + \phi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p + \phi(p)} = 0$$

que es lineal de primer orden. Esto es así supuesto que $p + \phi(p) \neq 0$. Si existe algún valor de λ tal que $\lambda + \phi(\lambda) = 0$ la recta

$$x = \lambda t - \psi(\lambda)$$

tambien es solución de la ecuación de Lagrange.

***Ejemplo* 24.** Obtener la solución general de la ecuación

$$x = 2tx' + \operatorname{sen} x'.$$

La ecuación se puede reescribir como

$$x - 2tx' - \operatorname{sen} x' = 0$$

y se ve que estamos ante una ecuación de Lagrange con $\phi(x') = -2x'$ y $\psi(x') = -\operatorname{sen} x'$. Tomando $x' = p$ y derivando contra p la expresión

$$x = 2tp + \operatorname{sen} p,$$

llegamos a

$$p\frac{dt}{dp} + 2t + \cos p = 0.$$

Si suponemos que $p \neq 0$, lo que nos está dando que la recta $x = 0$ es solución de la ecuación ya que en este caso la ecuación $\lambda + \phi(\lambda) = 0$ se satisface únicamente si $\lambda = 0$, llegamos a la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dt}{dp} + 2\frac{t}{p} + \frac{\cos p}{p} = 0,$$

cuya solución es

$$t = -\frac{p \operatorname{sen} p + \cos p + c}{p^2}.$$

De aquí obtenemos que

$$x = -\frac{p \operatorname{sen} p + 2\cos p + 2c}{p}$$

y la solución general está completa. ◁

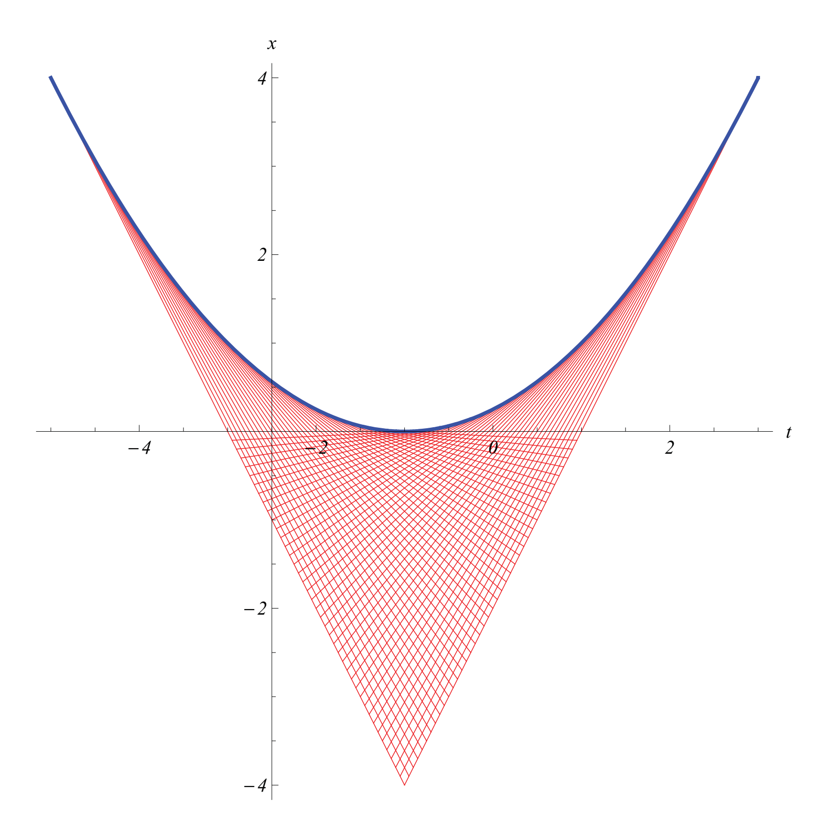


Figura 5.4: Algunas rectas de la familia $x = \lambda t - \lambda^2 + \lambda$ y su envolvente $x = ((t+1)/2)^2$, correspondientes al Ejemplo 25.

5.3. Ecuación diferencial de Clairaut

Se denomina ecuación diferencial de Clairaut a la ecuación

$$x - tx' + \psi(x') = 0$$

con ψ una función derivable. Esta ecuación es en realidad una ecuación de tipo Lagrange con $\phi(x') = -x'$, por tanto para cualquier λ se verificará que $\lambda + \phi(\lambda) = 0$. Con esto obtenemos que las soluciones son la familia de rectas dadas por

$$F(t, x, \lambda) = x - \lambda t + \psi(\lambda) = 0.$$

Sin embargo, en este caso debemos considerar la envolvente de esta familia de rectas, que será también solución de la ecuación diferencial. La envolvente, si existe, vendrá dada por la solución del sistema

$$\begin{cases} F(t, x, \lambda) = 0, \\ \dfrac{\partial F(t, x, \lambda)}{\partial \lambda} = 0, \end{cases}$$



Un retrato del matemático francés Alexis C. Clairaut (1713–1765). Clairaut fue un matemático de una precocidad extrema: a la edad de trece años presentó su primer trabajo en la *Academia de Ciencias de París* y fue elegido miembro dicha sociedad a los dieciocho años. El trabajo en el que obtuvo la solución de la ecuación diferencial que lleva su nombre lo publicó en 1734, con 21 años.

que nos proporciona las ecuaciones paramétricas para la envolvente

$$\begin{cases} x = \lambda\psi'(\lambda) - \psi(\lambda), \\ t = \psi'(\lambda). \end{cases}$$

***Ejemplo* 25.** Obtener la envolvente de la familia de soluciones de la ecuación

$$x = (t+1)x' - (x')^2.$$

La ecuación dada se puede reescribir como

$$x - tx' + (x')^2 - x' = 0.$$

Luego se trata de una ecuación de Clairaut con $\psi(x') = (x')^2 - x'$. Así, la familia de rectas solución será $x = \lambda t - \lambda^2 + \lambda$ y la envolvente será

$$\begin{cases} x = \lambda^2, \\ t = 2\lambda - 1, \end{cases} \iff x = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2.$$

Algunas rectas y la envolvente se muestran en la figura 5.4. ◁

5.3.1. Otra caracterización para las parábolas

En el capítulo anterior y en el ejemplo del espejo que refleja la luz pasando por un punto fijo hemos visto algunas formas de caracterizar las parábolas. Estas caracterizaciones son propiedades de la parábolas que resulta que sólamente se cumplen para las parábolas. A continuación mostramos otra propiedad de estas curvas que también nos va permitir caracterizarlas.

> **Una propiedad de las parábolas.** El área encerrada por cualquier recta tangente a la parábola $y = p^2x^2 + k^2$ (con $k \cdot p > 0$) y la parábola $y = p^2x^2$ es constante y su valor es $\frac{4}{3}\frac{k^3}{p}$.

Como ya nos ocurrió en el capítulo anterior, la prueba de esta propiedad puede hacerse usando cálculo integral pero resulta mucho más elegante basarla en el resultado de la cuadratura de la parábola de Arquímedes. Siguiendo la notación de la figura 5.5 el área de la región limitada por la parábola $y = k^2x^2$ y la cuerda PQ, que es tangente en T a $y = p^2x^2 + k^2$, será cuatro tercios del área del triángulo PRQ. Esto es así por ser la altura de la región parabólica el segmento paralelo al eje de simetría pasando por el punto medio de la cuerda PQ, que resulta ser T.

$$\text{Área}(\triangle PRQ) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 - \frac{k}{p} & p^2\left(x_0 - \frac{k}{p}\right)^2 & 1 \\ x_0 & p^2x_0^2 & 1 \\ x_0 + \frac{k}{p} & p^2\left(x_0 + \frac{k}{p}\right)^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{k^3}{p} = \frac{k^3}{p}.$$

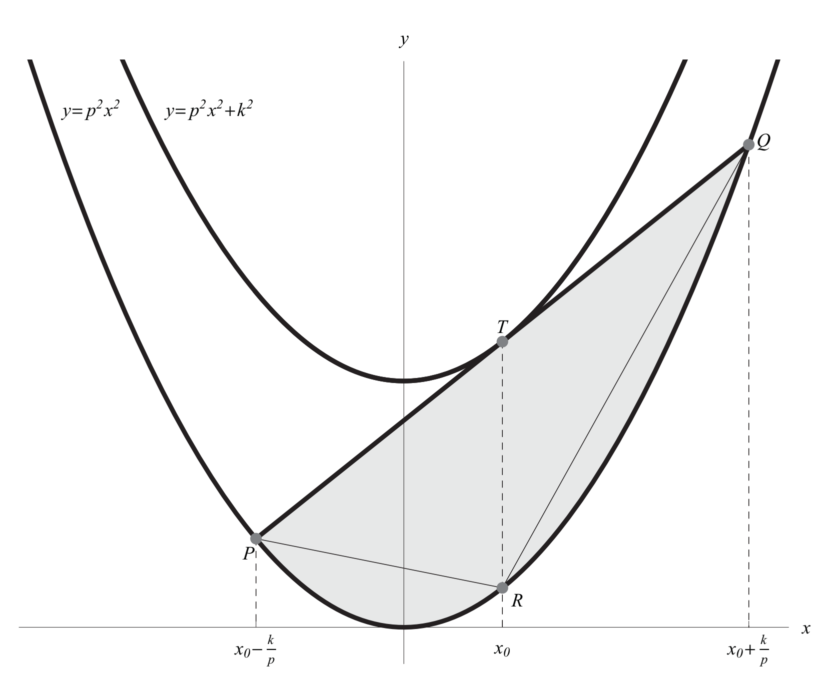


Figura 5.5: El área de la región parabólica es 4/3 del área del triángulo PRQ.

En la figura 5.6 se muestran dos segmentos parabólicos con la misma área, limitados por las cuerdas PQ y $P'Q'$ que son tangentes a la parábola $y = p^2x^2+k^2$ en los puntos T y T', respectivamente. Resulta evidente que el resultado se cumple para cualquier pareja de parábolas en la cual una de ellas es una traslación de la otra a lo largo del eje de simetría. Veamos que sólo se cumple para las parábolas.

> **Otra caracterización de las parábolas.** Sea f una función diferenciable no lineal definida sobre $\mathbb{R}$ de tal forma que $f(x) > p(x)$, siendo $p(x) = ax^2 + bx + c$, con $a > 0$. Si la región limitada por cualquier recta tangente a la curva $y = f(x)$ y la parábola $y = p(x)$ encierra una área constante e igual $\frac{4}{3}\frac{k^3}{\sqrt{a}}$ $(k > 0)$, entonces $f(x) = p(x) + k^2$.

La condición $a > 0$ no supone ninguna restricción porque en caso de que $a < 0$ bastaría cambiar la hipótesis $f(x) > p(x)$ por $f(x) < p(x)$.

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ está dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Con la condición $f(x) > p(x)$ podemos asegurar que la recta tangente intersecta a la parábola $y = p(x)$ en dos puntos $(m_1, p(m_1))$ y $(m_2, p(m_2))$. En efecto, las

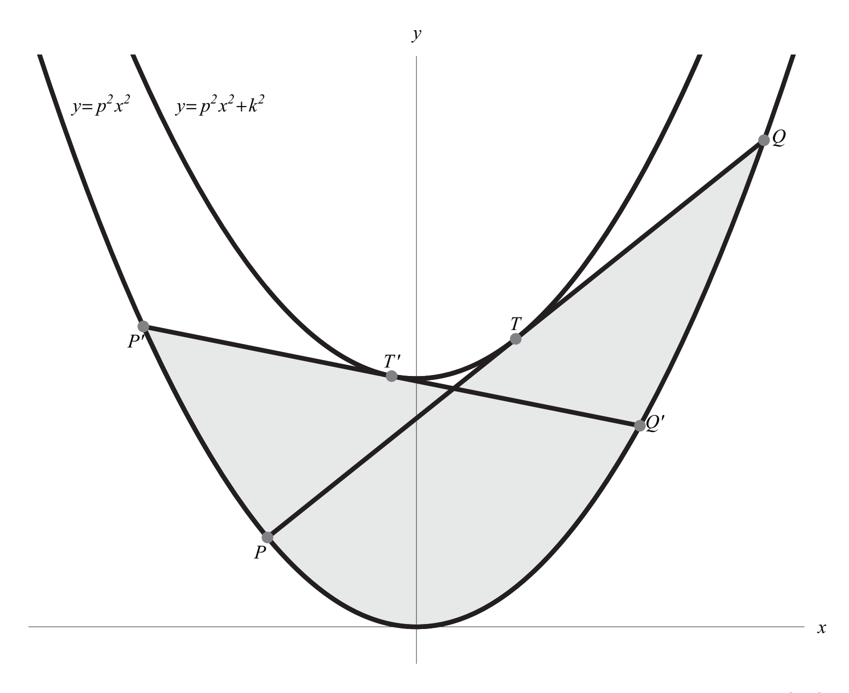


Figura 5.6: El área de las regiones limitadas por las cuerdas PQ y $P'Q'$ es la misma.

raíces de la ecuación

$$p(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

son números reales cuando

$$(b - f'(x_0))^2 - 4a(c - f(x_0) + x_0 f'(x_0)) > 0,$$

o, de manera equivalente,

$$(p'(x_0) - f'(x_0))^2 + 4a(f(x_0) - p(x_0)) > 0,$$

y esta última desigualdad es cierta por cumplirse las condiciones $f(x) > p(x)$ y $a > 0$. Además,

$$m_1 = \frac{f'(x_0) - b - \sqrt{(b - f'(x_0))^2 - 4a(c - f(x_0) + x_0 f'(x_0))}}{2a},$$
$$m_2 = \frac{f'(x_0) - b + \sqrt{(b - f'(x_0))^2 - 4a(c - f(x_0) + x_0 f'(x_0))}}{2a}.$$

Ahora, el área limitada por la recta tangente y $p(x)$ es

$$A = \int_{m_1}^{m_2} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - p(x))\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= a \int_{m_1}^{m_2} (x - m_1)(m_2 - x)\, dx \\
&= \frac{a}{6}(m_2 - m_1)^3 \\
&= \frac{1}{6a^2}\left(\sqrt{(b - f'(x_0))^2 - 4a(c - f(x_0) + x_0 f'(x_0))}\right)^3.
\end{aligned}
$$

De este modo, si suponemos que $A = \frac{4}{3}\frac{k^3}{\sqrt{a}}$, concluimos que

$$(b - f'(x_0))^2 - 4a(c - f(x_0) + x_0 f'(x_0)) = 4k^2 a. \tag{5.6}$$

Por último tenemos que resolver la ecuación diferencial (5.6). Se trata de una ecuación de Clairaut y sus soluciones son la familia de rectas

$$\phi(x, y, \lambda) := y - \lambda x + \frac{(b - \lambda)^2}{4a} - c - k^2 = 0$$

y su envolvente. Como es habitual, la envolvente es la solución del sistema de ecuaciones

$$\phi(x, y, \lambda) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \phi(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

y, en este caso, se corresponde con la curva

$$y = ax^2 + bx + c + k^2 = p(x) + k^2.$$

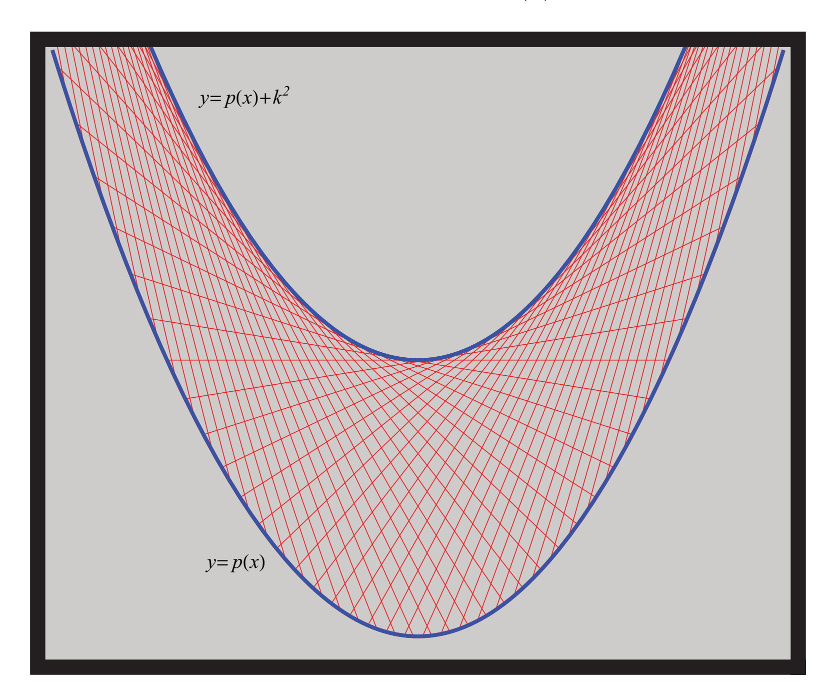
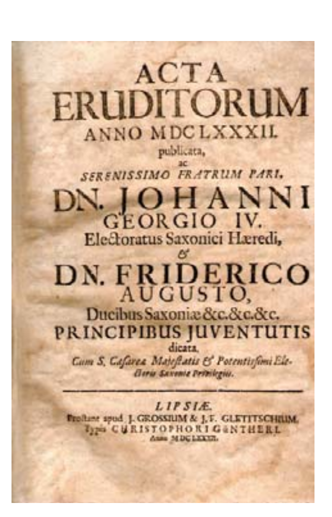


Figura 5.7: Las parábolas $y = p(x)$ e $y = p(x) + k^2$ y la familia de rectas $\phi(x, y, \lambda) = 0$.

La figura 5.7 muestra la parábola $y = p(x)$, la familia de rectas $\phi(x, y, \lambda) = 0$ asociada con ella y su envolvente $y = p(x) + k^2$.

5.4. El problema de la braquistócrona con un comentario histórico y una generalización



Portada de la revista *Acta Eruditorum* del año 1682. En esta revista fueron publicados por Leibniz, Newton, los Bernoulli, etc., muchos de los trabajos fundacionales del cálculo.

El problema de la braquistócrona.[5] Se fijan dos puntos A y B en un plano vertical, A más alto que B, pero no en la misma línea vertical, y un alambre y una cuenta que se puede ensartar en él. Se pide qué forma de curva hay que dar al alambre tendido entre A y B para que la cuenta ensartada emplee el menor tiempo posible en bajar desde A hasta B.

A la curva solución de este problema se la llama *braquistócrona*, o curva de descenso más rápido; esta denominación deriva de los términos griegos *braquistos*, que significa el más corto, y *cronos*, tiempo.

Este problema de la braquistócrona lo propuso en 1696 Johann Bernoulli en *Acta Eruditorum* en los siguientes términos:

> Se invita a los matemáticos a resolver *un nuevo problema*:
>
> Dados los puntos A y B en un plano vertical, asignar a una partícula móvil M el sendero AMB a lo largo del cual, descendiendo por su propio peso, pasa del punto A al punto B en el tiempo más breve posible.
>
> Para estimular, en los amantes de tales tareas, el deseo de realizar la solución de este problema, puede señalarse que la cuestión propuesta no consiste, como pudiera parecer, en una mera especulación sin utilidad alguna. Contra lo que uno pensaría a primera vista, tiene gran utilidad en otras ramas de la ciencia, tales como la mecánica. Mientras tanto, para prevenir cualquier juicio prematuro, se puede hacer notar que, aunque la línea recta AB es ciertamente la más corta entre los puntos A y B no es, con todo, el sendero atravesado en tiempo mínimo. Sin embargo, la curva AMB, cuyo nombre yo daré, si nadie lo ha descubierto antes del final de este año, es una curva bien conocida de los geómetras.

No obstante el problema de la braquistócrona o lo que pudiera ser un primer acercamiento al mismo, lo había tratado ya Galileo Galilei en sus *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* del año 1638. Aquí, Galileo se interesa por el camino rectilíneo que, partiendo de un punto dado A, acaba en un punto B de una recta vertical que no pasa por A, y minimiza el tiempo de recorrido de una partícula móvil que cae desde el punto A, por acción

[5] La redacción que presentamos del problema de la braquistócrona está tomada literalmente del libro de M. de Guzmán, *Aventuras matemáticas*, ed. Pirámide, 1987.

de la gravedad, hasta algún punto de dicha recta vertical. Correctamente deduce que el punto B debe ser aquel para el cual el segmento AB forma un ángulo $\pi/4$ con la vertical. Por otra parte, Galileo observó que el desplazamiento del móvil entre los puntos A y ese B era más rápido si se realizaba a lo largo de dos segmentos AC y CB, siendo C un punto de una circunferencia pasando por A y B y centrada en la vertical que contiene a B. Finalmente Galileo cometió un error al asegurar que el camino más rápido para el descenso era un arco de circunferencia.

Aparte de la solución aportada por Johann Bernoulli a su propuesta, se recibieron otras cuatro soluciones, firmadas por Newton, Jacob Bernoulli, Leibniz y L'Hôpital. En mayo de 1697, en *Acta Eruditorum*, se publicaron las soluciones de Leibniz (pág. 205), de Johann Bernoulli (págs. 206–211), la de Jacob Bernoulli (págs. 211–214), y una traducción al latín de la solución de Newton (pág. 223) que ya había aparecido publicada en enero de ese mismo año, de manera anónima, en los *Philosophical Transactions of the Royal Society*. La solución de L'Hôpital no fue publicada hasta el año 1988; es decir, 300 más tarde.[6] La que presentamos a continuación es esencialmente la solución de Johann Bernoulli.

Comencemos recordando la *ley de refracción de Snell*, cuya relación con nuestro objetivo es el *principio de Fermat*: la luz viaja de un punto a otro por la trayectoria que hace mínimo el tiempo de recorrido. Si un rayo de luz se desplaza de un punto A a otro B a través de dos medios de distinto índice de refracción, con velocidad v_1 en el primero y v_2 en el segundo, se verificará que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2},$$

donde α_1 y α_2 son los ángulos formados por el rayo de luz con la vertical en el primer y segundo medio, respectivamente. En general, en medios de índice de refracción variable, la trayectoria del rayo de luz será curva y no recta y el cociente entre la velocidad de la luz en cada instante y el seno del ángulo que forma la recta tangente a dicha curva con la vertical será constante; es decir,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = c, \tag{5.7}$$

(véase la figura 5.8), donde v y α dependerán del punto en que nos encontremos del medio. Para concluir esto basta considerar un medio estratificado, como el que se muestra en la figura 5.9, en el que en cada una de las capas horizontales la velocidad de la luz es constante y, por ejemplo, va aumentando al pasar de una a la siguiente. De este modo el rayo de luz se refracta al pasar de un estrato al siguiente y cada vez forma un ángulo más grande con la vertical. Ahora aplicando la ley de Snell a las fronteras entre las capas se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_3}{v_3} = \cdots = \frac{\operatorname{sen}\alpha_n}{v_n}.$$

[6]La solución de L'Hôpital apareció publicado como un apéndice de la obra *Bernoulli Der Briefwechsel von Johann Bernoulli. Band 2: Der Briefwechsel mit Pierre Varignon: Erster Teil: 1692-1702, Die Gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli*, editada en Basilea en 1988 por P. Costabel y J. Peiffer y que contiene la correspondencia de Johann Bernoulli con Pierre Varignon.

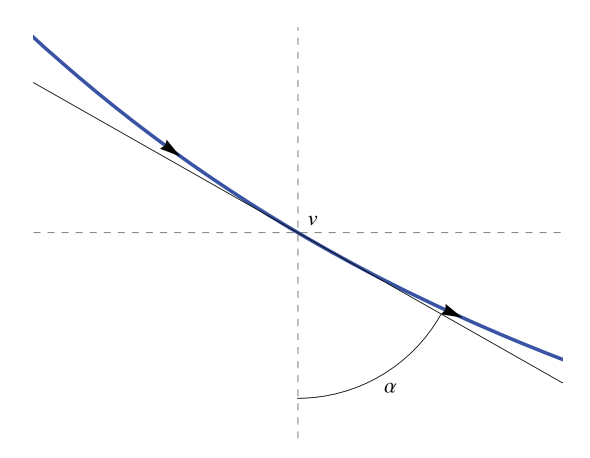


Figura 5.8: Desplazamiento de un rayo de luz en un medio de índice de refracción variable.

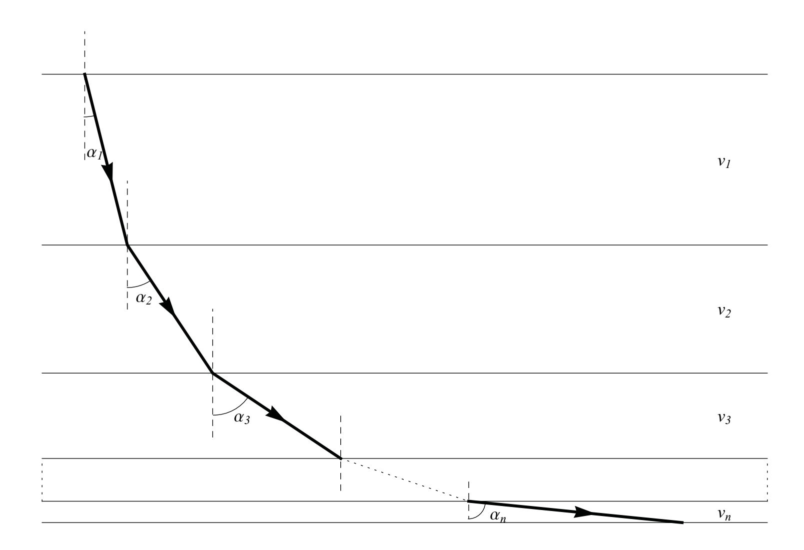


Figura 5.9: Desplazamiento de un rayo de luz en un medio estratificado.

Finalmente si se permite que las capas se hagan más delgadas y numerosas, entonces, en el límite, la velocidad de la luz disminuye continuamente conforme desciende el rayo y se concluye (5.7).

Johann Bernoulli basó su solución al problema de la braquistócrona en la ecuación (5.7), argumentando que si la cuenta pudiese elegir el trayecto de descenso más rápido, la ecuación de la curva que trazaría debería verificar esa relación y comenzar en A con tangente vertical.

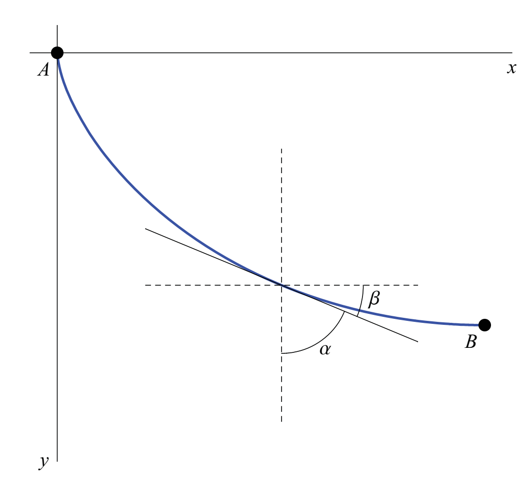


Figura 5.10: La figura muestra el desplazamiento de la cuenta del punto A al punto B.

Supongamos un sistema de coordenadas con el origen en el punto A y el sentido positivo del eje de las ordenadas hacia abajo (la situación se describe en la figura 5.10). En primer lugar podemos escribir $\operatorname{sen}\alpha$ en términos de $y' = \tan\beta$ ya que

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}. \tag{5.8}$$

La velocidad de la cuenta se puede expresar en función de su posición. Para ello debemos tener en cuenta el principio de conservación de la energía mecánica

$$\text{Energía cinética} + \text{Energía potencial} = \text{constante}.$$

Observando que el movimiento parte del reposo a altura $y = 0$ tendremos que la constante en el principio de conservación de la energía será nula y concluiremos que su ganancia en energía cinética coincidirá con su pérdida de energía potencial; es decir,

$$\text{Energía cinética} = -\text{Energía potencial} \iff \frac{mv^2}{2} = mgy,$$

de donde inmediatamente se obtiene que

$$v = \sqrt{2gy}. \tag{5.9}$$

De este modo, reuniendo (5.7), (5.8) y (5.9), llegamos a la ecuación

$$y(1+(y')^2) = C,$$

denominada ecuación diferencial de la braquistócrona. Debemos observar que la constante C que aparece en la ecuación anterior es positiva. Identificaremos

la curva solución utilizando los métodos descritos en la sección anterior para encontrar la ecuación en coordenadas paramétricas de la misma. Es claro que si tomamos $y' = p$,

$$y = \frac{C}{1+p^2}$$

y $x = x(p)$ verificará la ecuación

$$p\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dp} = -\frac{2Cp}{(1+p^2)^2}.$$

De este modo obtenemos que

$$x(p) = -C\left(\frac{p}{1+p^2} + \arctan p\right) + k.$$

El valor de la constante k de integración se puede determinar teniendo en cuenta que para en $(0,0)$ la curva debe tener tangente vertical y, por tanto, $p = \infty$. De este modo una parametrización posible para la braquistócrona es

$$x(p) = -C\left(\frac{p}{1+p^2} + \arctan p - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad y(p) = \frac{C}{1+p^2}.$$

Un modo más apropiado de determinar la curva braquistócrona es introducir un nuevo parámetro. En efecto, si tomamos $p = \cot(\theta/2)$, tenemos las ecuaciones

$$x(\theta) = \frac{C}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad y(\theta) = \frac{C}{2}(1 - \cos\theta),$$

que se corresponden con la parametrización de una cicloide. Es decir, la curva braquistócrona es la cicloide.

La solución que aportó por su parte Jacob Bernoulli al problema de la braquistócrona fue el origen de una de las más importantes disciplinas de las matemáticas: *el cálculo de variaciones*. El problema de la braquistócrona es uno de los ejemplos clásicos que se tratan al introducir el cálculo de variaciones, pero pueden resolverse otro tipo de problemas elementales. Por ejemplo, determinar de entre todas las curvas posibles que unen dos puntos cuál es la de menor longitud. La intuición nos dice que dicha curva será una línea recta, y el cálculo de variaciones viene en nuestra ayuda para confirmarlo También es posible determinar la curva que, uniendo dos puntos dados, genera una superficie de revolución de área lateral mínima. En este caso se trata de una catenaria.

El objetivo de introducir el cálculo de variaciones en este punto responde a nuestro interés por dar una extensión *natural* del problema de la braquistócrona introduciendo fricción en el movimiento de la cuenta a través del alambre.

La idea que debemos de tener sobre el cálculo de variaciones es que se trata de un método para las calcular máximos y mínimos "a lo grande", en el que sustituimos los puntos por funciones y lo que pretendemos maximizar o minimizar

son *funcionales*[7] de la forma

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x(t), x'(t))\, dt, \tag{5.10}$$

donde F es una cierta función fija, sobre funciones $x(t)$ que verifiquen unas condiciones apropiadas. Si consideramos que la función $F(t, x, x')$ es continua en su dominio D, y exigimos la continuidad de $x'(t)$, podremos asegurar que la integral (5.10) está correctamente definida. Sin embargo, para que las operaciones que vamos a desarrollar a continuación tengan sentido supondremos que la función $F(t, x, x')$ es de clase $C^2(D)$, y que las funciones sobre las que está definida (5.10) también son de clase C^2 sobre un cierto intervalo $[t_1, t_2]$ y tales que $x(t_1) = a$ y $x(t_2) = b$ con a y b fijos. Este conjunto de funciones lo denotaremos por $C^2_{a,b}([t_1, t_2])$.

Con la notación anterior estamos en disposición de enunciar y probar un lema en el que se da una condición necesaria para que una cierta función sea un extremo de la integral (5.10).

Lema 6. *Sea $F(t, x, x') \in C^2(D)$. Si la integral* (5.10) *alcanza un extremo relativo para $x(t) \in C^2_{a,b}([t_1, t_2])$, entonces*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x'} F(t, x(t), x'(t))\right) - \frac{\partial}{\partial x} F(t, x(t), x'(t)) = 0. \tag{5.11}$$

La relación (5.11) se denomina habitualmente ecuación de Euler-Lagrange asociada al funcional I.

Demostración. Supongamos que la ecuación (5.10) alcanza un extremo relativo para una cierta función $e(t) \in C^2_{a,b}([t_1, t_2])$. Consideremos ahora una cierta función fija $\eta \in C^2([t_1, t_2])$ satisfaciendo que $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Haciendo uso de $\eta(t)$ y $e(t)$ podemos definir la familia de funciones $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ en $C^2_{a,b}([t_1, t_2])$ definidas por

$$x_\alpha(t) = e(t) + \alpha\eta(t).$$

Considerando la acción del funcional (5.10) sobre la familia de funciones $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ se obtiene una función que depende únicamente de α

$$I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x_\alpha(t), x'_\alpha(t))\, dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t, e(t) + \alpha\eta(t), e'(t) + \alpha\eta'(t))\, dt$$

que alcanza un extremo relativo para $\alpha = 0$; por tanto, $I'(0) = 0$. Por derivación bajo el signo integral tenemos que

$$I'(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial\alpha} F(t, x_\alpha(t), x'_\alpha(t))\, dt.$$

[7] Un *funcional* es, esencialmente, una aplicación tomando valores reales (o complejos) definida sobre espacios de funciones.

Con la identidad

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}&F(t,x_\alpha(t),x'_\alpha(t))\\ &=\frac{\partial}{\partial x}F(t,x_\alpha(t),x'_\alpha(t))\frac{dx_\alpha(t)}{d\alpha}+\frac{\partial}{\partial x'}F(t,x_\alpha(t),x'_\alpha(t))\frac{dx'_\alpha(t)}{d\alpha}\\ &=\frac{\partial}{\partial x}F(t,x_\alpha(t),x'_\alpha(t))\eta(t)+\frac{\partial}{\partial x'}F(t,x_\alpha(t),x'_\alpha(t))\eta'(t),\end{aligned}$$

llegamos a la expresión

$$I'(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial}{\partial x}F(t,x_\alpha(t),x'_\alpha(t))\eta(t)+\frac{\partial}{\partial x'}F(t,x_\alpha(t),x'_\alpha(t))\eta'(t)\right)dt.$$

De donde, tomando $\alpha=0$, concluimos que

$$0=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial}{\partial x}F(t,e(t),e'(t))\eta(t)+\frac{\partial}{\partial x'}F(t,e(t),e'(t))\eta'(t)\right)dt.$$

Ahora, aplicando integración por partes al segundo sumando, se deduce que

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}&\frac{\partial}{\partial x'}F(t,e(t),e'(t))\eta'(t)\,dt\\ &=\frac{\partial}{\partial x'}F(t,e(t),e'(t))\eta(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x'}F(t,e(t),e'(t))\right)\eta(t)\,dt\\ &=-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x'}F(t,e(t),e'(t))\right)\eta(t)\,dt,\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado que $\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$. De este modo

$$0=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial}{\partial x}F(t,e(t),e'(t))-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x'}F(t,e(t),e'(t))\right)\eta(t)\,dt$$

de donde, usando la arbitrariedad de $\eta(t)$, obtenemos la igualdad

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x}F(t,e(t),e'(t))\right)-\frac{\partial}{\partial x'}F(t,e(t),e'(t))=0.$$

En efecto, si existiese un punto $t_0\in[t_1,t_2]$ tal que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x}F(t,e(t),e'(t))\right)-\frac{\partial}{\partial x'}F(t,e(t),e'(t))>0,$$

(daría igual suponer que fuese negativa), por continuidad, podríamos asegurar la existencia de $\varepsilon>0$ de tal forma que para todo $t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ se verificaría la misma desigualdad. Entonces, eligiendo una función $\eta(t)$ positiva en el intervalo $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ y nula fuera de él, llegaríamos a que

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(t, e(t), e'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x'} F(t, e(t), e'(t)) \right) \eta(t)\, dt$$
$$= \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(t, e(t), e'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x'} F(t, e(t), e'(t)) \right) \eta(t)\, dt > 0,$$

lo que es absurdo. □

El problema que vamos a resolver a continuación usando el cálculo de variaciones es una variante del problema de la braquistócrona: supongamos que tenemos un alambre uniendo en un plano vertical un punto A con otro inferior B. ¿Qué forma debe adoptar dicho alambre para que el tiempo empleado por una cuenta para desplazarse desde A hasta B sea mínimo, si existe una fuerza de fricción entre el alambre y la cuenta proporcional a la componente normal del peso?

Consideremos un sistema de referencia OXY donde la dirección positiva del eje $0Y$ va hacia abajo. Supongamos que $A = O = (0,0)$ y $B = (b_1, b_2)$, para ciertos valores fijos de b_1 y b_2. Sean $(x, y) = (x(t), y(t))$ las coordenadas de la posición de la cuenta en un instante t, en ese punto consideramos el sistema ortonormal de vectores $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$, que ya fueron descritos en el tercer capítulo al tratar las componentes intrínsecas de la aceleración. En la dirección del vector tangente actúan dos fuerzas:

a) la componente tangencial del peso que, si el peso está dado por $mg\mathbf{j}$, con $\mathbf{j} = (0,1)$, valdrá

$$F_{\text{peso}} = \langle mg\mathbf{j}, \mathbf{T} \rangle \mathbf{T} = \frac{mg}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \frac{dy}{dt}\mathbf{T},$$

b) la fricción entre la cuenta y el alambre, que se opone al movimiento de la cuenta y es proporcional, con constante de proporcionalidad μ, a la componente normal del peso

$$F_{\text{fricción}} = -\mu \langle mg\mathbf{j}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{T} = -\frac{\mu mg}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \frac{dx}{dt}\mathbf{T}.$$

De este modo usando la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta que la componente tangencial de la aceleración es $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, donde v es la velocidad, tenemos que

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{mg}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \left(\frac{dy}{dt} - \mu\frac{dx}{dt} \right).$$

Ahora, usando que $v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$, llegamos a la ecuación

$$v\frac{dv}{dt} = g\left(\frac{dy}{dt} - \mu\frac{dx}{dt} \right),$$

que integrada contra t y observando que la cuenta parte del reposo en el punto $A = (0, 0)$, nos da

$$\frac{v^2}{2} = g(y - \mu x)$$

o, equivalentemente,

$$v = \sqrt{2g(y - \mu x)}.$$

Si tenemos en cuenta que $v = \frac{ds}{dt}$, donde ds indica el diferencial de la longitud de arco de la curva que debe adoptar el alambre, el tiempo vendrá dado por la integral de $\frac{ds}{v}$. Usando que $ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$ y la expresión para la velocidad que acabamos de obtener tendremos que minimizar la integral

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2g(y - \mu x)}}\, dx.$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

al integrando, la curva que buscamos debe satisfacer la ecuación diferencial

$$(1 + (y')^2)(1 + \mu y') + 2y''(y - \mu x) = 0,$$

que puede reescribirse, multiplicando por factor adecuado, como

$$\begin{aligned} \frac{y' - \mu}{y - \mu x} &= -\frac{2y''(y' - \mu)}{(1 + (y')^2)(1 + \mu y')} \\ &= \frac{2\mu y''}{1 + \mu y'} - \frac{2y'y''}{1 + (y')^2}, \end{aligned}$$

cuya integral es

$$(y - \mu x)(1 + (y')^2) = C(1 + \mu y')^2,$$

para una cierta constante positiva C. En el caso $\mu = 0$ esta ecuación se transforma en la ecuación de la braquistócrona sin fricción, naturalmente. Para que la solución pase por $A = (0, 0)$, se debe verificar que $y'(0) = -1/\mu$. Procediendo como en el caso sin fricción, tomamos $y' = p$ y obtenemos que

$$y - \mu x = C\frac{(1 + \mu p)^2}{1 + p^2}. \tag{5.12}$$

Si suponemos $x = x(p)$ e $y = y(p)$, se cumplirá

$$y' = p \iff \frac{dy}{dp} = p\frac{dx}{dp},$$

lo que, derivando (5.12) respecto de p, nos lleva a la ecuación

$$\frac{dx}{dp} = \frac{C}{p - \mu}\frac{d}{dp}\frac{(1 + \mu p)^2}{1 + p^2} = -\frac{2C(1 + \mu p)}{(1 + p^2)^2},$$

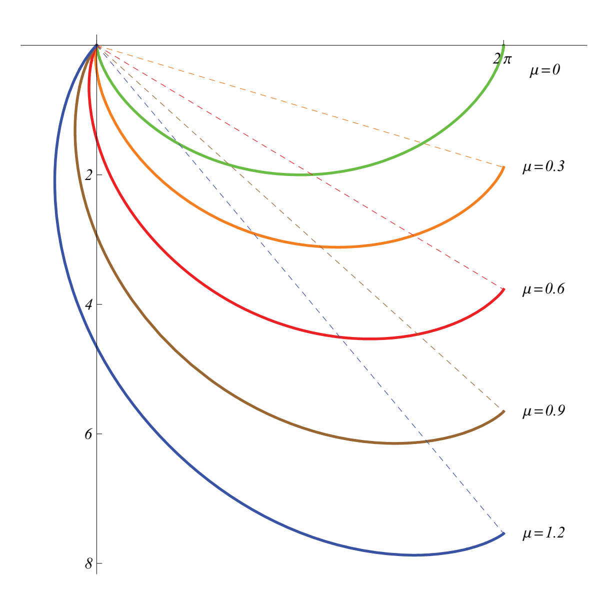


Figura 5.11: La imagen muestra varias braquistócronas con coeficiente de fricción μ, incluido el caso clásico $\mu = 0$ en verde. La línea de cúspides en cada caso es la recta $y = \mu x$ (se ha tomado $C = 2$).

cuya solución, con la condición $x(-1/\mu) = 0$,[8] es

$$x(p) = C\left(\frac{\mu - p}{1+p^2} + \operatorname{arc\,cot} p + \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{1}{\mu}\right) - \mu\right).$$

Finalmente, usando (5.12), deducimos que

$$y(p) = C\left(\frac{1+\mu p}{1+p^2} + \mu \operatorname{arc\,cot} p + \mu \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right).$$

Teniendo en cuenta la identidad

$$\operatorname{arc\,cot} p + \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{1}{\mu}\right) = \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{p-\mu}{1+p\mu}\right),$$

las ecuaciones paramétricas de la braquistócrona con fricción se pueden reescribir como

$$x(p) = C\left(-\frac{p(1+\mu p)}{1+p^2} + \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{p-\mu}{1+p\mu}\right)\right)$$

e

$$y(p) = C\left(\frac{1+\mu p}{1+p^2} + \mu \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{p-\mu}{1+p\mu}\right)\right).$$

[8] La función $\operatorname{arc\,cot} x$ es la inversa por composición de la función $\cot x$ cuando el dominio de ésta se restringe a $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$. Se verifica $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,cot} x = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,cot} x = 0$, $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arc\,cot} x = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arc\,cot} x = -\infty$ y $(\operatorname{arc\,cot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$. Además la función $\operatorname{arc\,cot} x$ es impar.

Esta forma de escribir la curva solución sugiere considerar el cambio de parámetro $\frac{p-\mu}{1+p\mu} = \cot(\theta/2)$ (que en el caso $\mu = 0$ se transforma en $p = \cot(\theta/2)$ y se corresponde con el que consideramos para la braquistócrona sin fricción) para llegar a las ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = \frac{C}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta - \mu(1-\cos\theta)) \qquad \text{e} \qquad y(\theta) = \frac{C}{2}(1-\cos\theta + \mu(\theta - \operatorname{sen}\theta)).$$

De este modo queda patente que la braquistócrona con fricción es, en realidad, una cicloide girada.

La imagen 5.11 muestra las braquistócronas con fricción para varios valores de μ. Se ha añadido junto a cada braquistócrona la recta $y = \mu x$ sobre la que la curva alcanza sus distintos puntos cuspidales, correspondientes a puntos de no derivabilidad donde se cumple que $\frac{dx}{d\theta} = 0$.

5.5. Métodos de reducción de orden

En esta sección analizaremos diversos métodos de reducción de orden para ecuaciones diferenciales. La idea básica es que partiendo de una ecuación de orden mayor que uno, mediante la utilización de cambios de variable y función, podamos reducirla a otra de orden uno, resoluble por los métodos que hemos estudiado. Ilustraremos estos métodos con ejemplos tomados de la Física.

5.5.1. La forma de una cadena colgante

En este primer ejemplo trataremos de determinar la forma que adopta una cadena flexible suspendida entre dos puntos fijos y que se comba debido a su peso. Supongamos que colocamos la cadena en un sistema de coordenadas XY con el eje OY pasando por el punto más bajo de la cadena, ver figura 5.12. Denotaremos por s la longitud del arco comprendido entre ese punto y un punto cualquiera de la cadena de coordenadas (x, y), y por $w(s)$ la densidad lineal de la cadena. La ecuación de la curva se obtiene suponiendo que la cadena está en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas: la tensión horizontal T_0 en el punto más bajo, la tensión variable T en el punto (x, y), y el peso de la cadena. La componente horizontal de la fuerza T deberá ser igual a la tensión horizontal T_0 y la vertical se identificará con el peso del arco de la cadena comprendido entre el punto más bajo y el punto (x, y), de esta forma llegamos a las ecuaciones

$$T\cos\theta = T_0 \quad \text{y} \quad T\operatorname{sen}\theta = g\int_0^s w(t)\,dt,$$

donde θ es el ángulo que forma la tangente a la curva en el punto (x, y). Así tendremos que $T\operatorname{sen}\theta = T_0\tan\theta = T_0\frac{dy}{dx}$ y, por tanto,

$$T_0\frac{dy}{dx} = g\int_0^s w(t)\,dt.$$

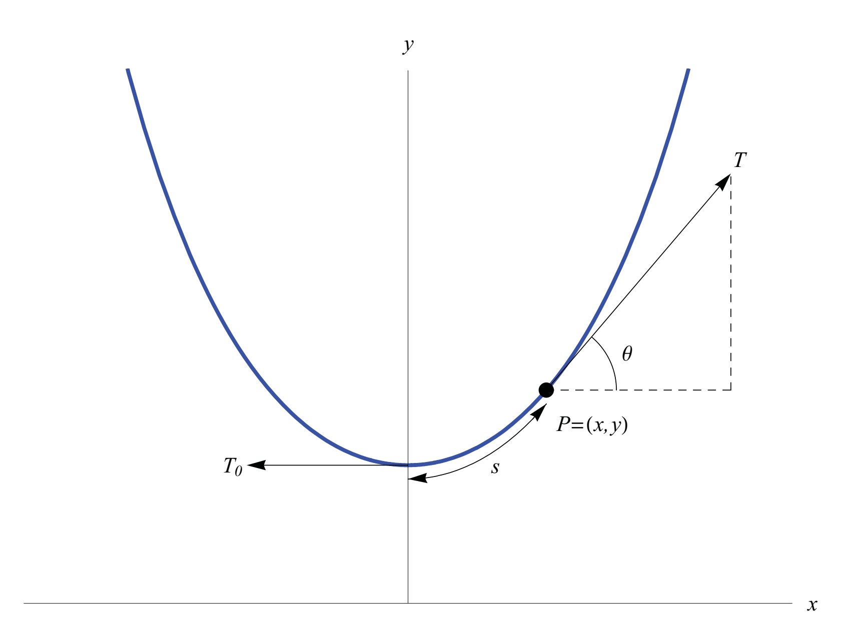


Figura 5.12: Esquema de la distribución de tensiones en una cadena colgante.

Derivando esta última ecuación respecto a x podemos eliminar la integral. En efecto,

$$T_0 \frac{d^2y}{dx^2} = g\frac{d}{dx}\int_0^s w(t)\,dt = g\frac{ds}{dx}\frac{d}{ds}\int_0^s w(t)\,dt = gw(s)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Si suponemos que $w(s) = w_0$ constante, tendremos la ecuación

$$y'' = a\sqrt{1+(y')^2},$$

donde $a = gw_0/T_0$.

Esta ecuación es del tipo

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

con $0 < k < n$. Estas ecuaciones diferenciales se transforman en otras de orden $n-k$ mediante el cambio de función $z = y^{(k)}$.

En nuestro caso, tomando $z = y'$ la ecuación se convierte en

$$z' = a\sqrt{1+z^2}$$

que es de variables separadas, y si consideramos que $z(0) = 0$, ya que $y'(0) = 0$, su solución viene dada por

$$z = y' = \operatorname{senh}(ax).$$

Si el eje horizontal se ha colocado de tal forma que la curva pasa por el punto $(0, 1/a)$, es decir $y(0) = 1/a$, obtenemos la solución

$$y = \frac{\cosh(ax)}{a} = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}.$$

Esta curva habitualmente se denomina catenaria por la palabra latina para cadena: *catena*.

Material complementario

Sobre la catenaria

G. Galilei fue el primero en intentar determinar la forma de la cadena colgante, llegando a la conclusión errónea de que se trataba de una parábola. La confusión es comprensible, ya que si comparamos la forma de una cadena suspendida de dos puntos A y B y teniendo su punto más bajo en O con una parábola pasando por esos tres mismos puntos, la diferencia es ligera, como puede apreciarse en la figura 5.13. La expresión para la catenaria en términos del coseno hiperbólico fue obtenida simultáneamente por G. W. Leibniz, C. Huygens y Johann Bernoulli en 1691 como respuesta a un desafío lanzado en esa ocasión por Jacob Bernoulli.

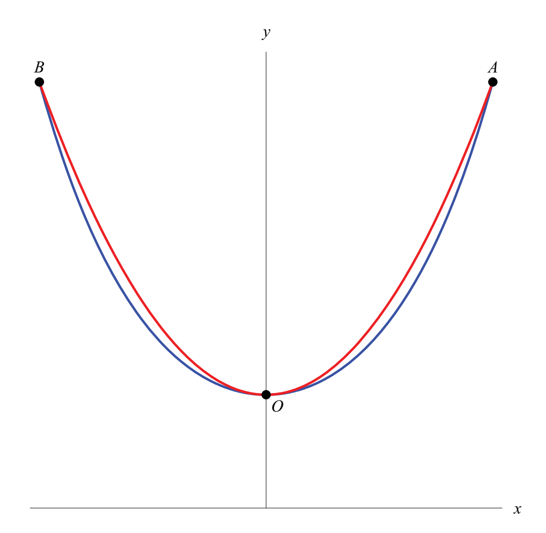


Figura 5.13: Comparación entre una catenaria suspendida de A y B y con su punto más bajo en O, en azul, y una parábola pasando por los mismo puntos, en rojo.

La catenaria es también la forma de un arco que se sostiene a sí mismo por gravedad, sin necesidad de apoyos externos. Al plantear el problema de equilibrio correspondiente a esta cuestión se llega a la ecuación que acabamos de resolver y se obtiene como solución el arco catenario. A pesar de su optimalidad, hasta tiempos recientes los arcos catenarios han sido poco usados en arquitectura por considerarse poco elegantes. Uno de los primeros arquitectos que hizo uso de la catenaria en su obra fue A. Gaudí (en la imagen al margen). La siguiente reflexión es suya: "la catenaria da elegancia y espiritualidad al arco, elegancia y espiritualidad para la construcción entera. La función autoestable de la catenaria evita contrafuertes, el edificio pesa menos, gana una gracia vaporosa y se aguanta sin raros accesorios ortopédicos." Gaudí usó arcos catenarios, por ejemplo en Barcelona, en el Colegio de las Teresianas, en la casa Batlló, en la casa Milá (imagen izquierda de la Figura 5.14) o en la Sagrada Familia. Posteriormente han aparecido diversos ejemplos de utilización de esta curva siendo, sin duda, uno de los más espectaculares el Jefferson National Expansion Memorial (Gateway Arch)*, en Saint Louis, Missouri, con una altura de 192.15 metros (imagen derecha de la Figura 5.14).*



Un jovencísimo Antonio Gaudí (1852–1926).





Figura 5.14: En la imagen de la izquierda la casa Milá de A. Gaudí en Barcelona, y en la de la derecha el *Jefferson National Expansion Memorial (Gateway Arch)* de Saint Louis, Estados Unidos.

5.5.2. Análisis matemático del salto de Bob Beamon

El mítico salto de longitud (8.90 m.) de Bob Beamon en los juegos olímpicos de Ciudad de México en 1968 se mantuvo como récord mundial hasta el año 1991. Durante mucho tiempo se especuló sobre la influencia de la altitud de México capital (2600 metros sobre el nivel del mar) en el salto, ya que había superado el anterior record mundial en más de 55 centímetros. Intentemos dar un razonamiento matemático que nos permita dilucidar si hubo o no influencia de la altitud en el salto.



Una imagen del espectacular salto de Bob Beamon en los juegos olímpicos de 1968 celebrados en Ciudad de México.

Supongamos que el desplazamiento del saltador lo tomamos como el desplazamiento de su centro de gravedad. Dado que el cambio en la altura del centro de gravedad del saltador es mucho menor que la longitud del salto podemos

despreciar la componente vertical de las fuerzas y centrarnos en la componente horizontal.

Si denotamos por x el desplazamiento horizontal del saltador, usando la segunda ley de Newton, tendremos que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -D$$

donde D denota la fuerza de resistencia del aire y m es la masa del saltador. Es conocido que la fuerza de resistencia en este caso tiene la forma

$$D = c_D A\rho \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

donde

- c_D es el coeficiente de rozamiento,
- A es la superficie del cuerpo expuesta al roce del aire, y
- ρ es la densidad del aire.

La constante c_D depende de la posición del saltador durante el salto: cuanto más aerodinámica sea la posición, menor será el valor de c_D. Valores típicos para estas constantes son $c_D = 0.375$, $A = 0.75\,\mathrm{m}^2$ y

$$\rho = \begin{cases} \rho_{\text{mar}} = 1.225 \text{ kg/m}^3, \text{ al nivel del mar,} \\ \rho_{\text{Méx}} = 0.984 \text{ kg/m}^3, \text{ en Ciudad de México.} \end{cases}$$

Así, es claro que el salto vendrá modelado por el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -c_D A\rho \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2, \\ x(0) = 0, \ \dfrac{dx}{dt}(0) = v_0. \end{cases}$$

Puesto que en la ecuación no aparece la función, podemos hacer el cambio $v = \frac{dx}{dt}$ y la ecuación de nuestro problema de valores iniciales se transformará en

$$m\frac{dv}{dt} = -c_D A\rho v^2$$

que es una ecuación de variables separadas. De esta forma

$$\frac{1}{v} = \frac{c_D A\rho}{m}t + C$$

y, usando la condición inicial,

$$\frac{1}{v} = \frac{c_D A\rho}{m}t + \frac{1}{v_0}.$$

Ahora, deshaciendo el cambio de función, tenemos la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \frac{mv_0}{m + c_D A \rho v_0 t}.$$

Integrando y usando la condición inicial llegamos a

$$x(t) = \frac{m}{c_D A \rho} \log\left(1 + \frac{c_D A \rho v_0 t}{m}\right).$$

Para finalizar, debemos tener en cuenta que el peso de B. Beamon era de 80 kg, que el tiempo empleado en el salto fue de un segundo y que su velocidad inicial fue de 10 m/s. Con esto, denotando por x_{mar} la longitud del salto a nivel del mar (tomamos $\rho = \rho_{\mathrm{mar}}$) y $x_{\mathrm{Méx}}$ la longitud del salto en Ciudad de México (con $\rho = \rho_{\mathrm{Méx}}$), concluimos que

$$x_{\mathrm{Méx}}(1) - x_{\mathrm{mar}}(1) = \frac{80}{0.375 \cdot 0.75} \times \left(\frac{1}{0.984} \log\left(1 + \frac{0.375 \cdot 0.75 \cdot 0.984 \cdot 10}{80}\right) - \frac{1}{1.225} \log\left(1 + \frac{0.375 \cdot 0.75 \cdot 1.225 \cdot 10}{80}\right)\right) \simeq 0.04\mathrm{m}.$$

Es decir, a nivel del mar, el salto de B. Beamon hubiese sido cuatro centímetros inferior. Efectivamente, parece que hubo una influencia de la altitud en el salto, pero dicha influencia se puede considerar despreciable frente a la mejora que obtuvo respecto al récord anterior.

5.5.3. Un problema espacial: la velocidad de escape

¿Qué velocidad mínima inicial se debe proporcionar a un cuerpo de masa m para que salga disparado al espacio exterior libre de la atracción terrestre?

Supongamos que el cuerpo se mueve a lo largo de un eje perpendicular a la superficie de la Tierra con la dirección positiva hacia arriba ($x = 0$ en la superficie). Despreciando la resistencia del aire, la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la atracción gravitatoria de la Tierra, hacia abajo, que de acuerdo con la ley de Newton de la gravitación universal, suponiendo toda la masa de la Tierra concentrada en el centro, se expresa como

$$F_g = -\frac{mMG}{(x+R)^2},$$

donde M es la masa de la Tierra, R es el radio de la Tierra y G la constante de gravitación universal. Usando la segunda ley de Newton llegamos a la ecuación

$$x'' = -\frac{MG}{(x+R)^2},$$

sujeta a las condiciones $x(0) = 0$ y $x'(0) = v_0 > 0$.

Esta ecuación es del tipo

$$F(x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0;$$

es decir, en la ecuación no aparece explícitamente la variable independiente. Para resolver estas ecuaciones se considera como nueva función $v = x'$, y x como nueva variable independiente ($v(x) = x'(t(x))$). Este cambio de variable y función transforma la ecuación en una del tipo

$$G(x, v, v' \dots, v^{(n-1)}) = 0.$$

La expresión de las primeras derivadas viene dada por

$$x'' = \frac{dv}{dx}v, \quad x''' = \left(\frac{d^2v}{dx^2}v + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)v.$$

De esta forma la ecuación de nuestro problema se transforma en

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{MG}{(x+R)^2}$$

con la condición $v(0) = v_0$. La nueva ecuación es de variables separadas y tras resolverla obtenemos que

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2GM}{R} + \frac{2GM}{x+R}.$$

Ahora, si $v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, tendremos que $v > 0$ y por tanto el cuerpo seguirá moviéndose por el espacio. Por el contrario, si $0 < v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, existirá un valor de x tal que $v = 0$ y desde esa altura el cuerpo comenzará a caer. El valor

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \simeq 11.18\,\text{km/s}$$

se denomina velocidad de escape de la Tierra y es independiente del cuerpo que deseemos sacar al espacio exterior.

5.5.4. ¿Qué trayectoria seguiría una piedra si pudiera caer hacia el interior de la Tierra?

Supongamos que se pudiera dejar caer una piedra hacia el interior de la Tierra y que la piedra pudiera seguir libremente cualquier trayectoria que le correspondiese, ¿cuál sería esa trayectoria? Veamos que esta cuestión puede responderse haciendo uso de ecuaciones diferenciales. El contenido de esta sección está basado en el artículo *Falling down a hole through the Earth*, aparecido en la revista *Math. Mag.*, vol. **77** (2004), págs. 171–189.

Consideremos un plano que pasa por el ecuador de la Tierra de forma que el polo Norte quede por encima del plano. Para problemas relativos a un cuerpo

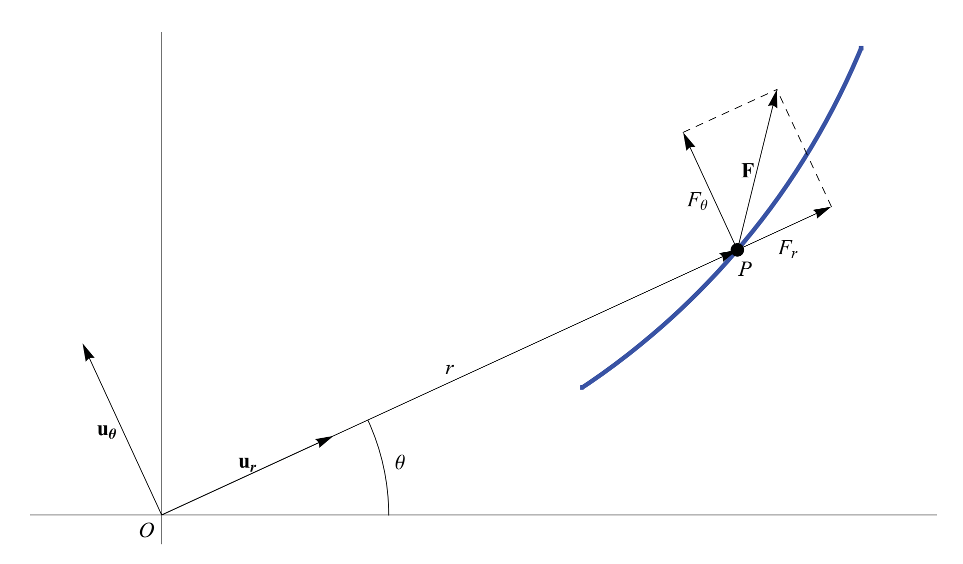


Figura 5.15: Descripción de la trayectoria de una piedra dejada caer hacia el interior de la Tierra.

en movimiento sobre el que actúa una fuerza que siempre lleva la dirección de la línea que va del cuerpo en movimiento a un determinado punto fijo (lo que se denomina una fuerza *central*), por lo común resulta más sencillo descomponer la velocidad $\mathbf{v}$, la aceleración $\mathbf{a}$ y la fuerza $\mathbf{F}$ en sus componentes a lo largo de dicha línea y su perpendicular (véase la figura 5.15). El centro de la Tierra actuará en este caso como punto fijo y será el origen de un sistema de coordenadas polares (r, θ). Así, se expresará el radio vector del origen al cuerpo en movimiento $\mathbf{r}$ en la forma

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r,$$

donde

$$\mathbf{u}_r = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}.$$

Resulta evidente que

$$\mathbf{u}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}.$$

es el vector perpendicular a $\mathbf{u}_r$ en la dirección de incremento de θ. Las relaciones obvias

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r$$

nos serán de gran utilidad. Ahora, es claro que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(r\mathbf{u}_r)}{dt} = r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r = r\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r = r\mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r.$$

Un razonamiento análogo nos lleva a que

$$\mathbf{a} = \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{u}_\theta + \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\mathbf{u}_r.$$

Supongamos que dejamos caer la piedra desde el ecuador hacia el interior de la Tierra y que la densidad de ésta es esféricamente simétrica. Si consideramos que la única fuerza que actúa sobre la piedra es la del campo gravitatorio de la Tierra, que se encuentra sobre la dirección $\mathbf{u}_r$ y que denotaremos por $f(r)$, las ecuaciones que modelizan el movimiento de la piedra en el plano del ecuador serán, supuesto que la masa de la piedra es uno,

$$0 = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2 d\theta}{dt}\right) \tag{5.13}$$

y

$$f(r) = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \tag{5.14}$$

Teniendo en cuenta que $1/r \neq 0$, de (5.13) obtendremos que

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \tag{5.15}$$

donde h es una constante. Esta ecuación se denomina *ley de conservación del momento angular*.

Si reescribimos (5.14) usando (5.15), llegamos a la ecuación para la trayectoria

$$f(r) = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3}, \tag{5.16}$$

sujeta a las condiciones iniciales $r(0) = R$, con R el radio de la Tierra, y $\frac{dr}{dt}(0) = 0$. Si Q denota el periodo de una revolución de la Tierra alrededor de su eje, es claro que $\frac{d\theta}{dt}(0) = \frac{2\pi}{Q}$ y esto, junto con (5.15), nos da que

$$h = \frac{2\pi R^2}{Q}.$$

Este hecho será tenido en cuenta más adelante.

Consideremos, como ya comentamos, que la Tierra es homogéneamente densa. Siguiendo a Newton en sus *Principia*, tomaremos la fuerza $f(r) = -k_1 r$ en este caso.[9] Sustituyendo esto en (5.16) tendremos la ecuación

$$\frac{h^2}{r^3} = \frac{d^2r}{dt^2} + k_1 r,$$

[9]Un razonamiento para llegar a esto. Pensemos la Tierra como un conjunto de esferas concéntricas. Newton considera que la atracción gravitatoria de una esfera para cualquier cuerpo en el interior de la misma es cero, y que la atracción gravitatoria de una esfera para cualquier cuerpo en el exterior de la misma se obtiene suponiendo que la masa de la esfera está concentrada en su centro. De esta forma, cuando un cuerpo atraviesa la Tierra las únicas esferas que le atraen son las que tienen radio menor o igual que la distancia del centro de la Tierra al cuerpo. Puesto que la masa que actúa sobre el cuerpo será proporcional a r^3, y la fuerza de atracción es inversamente proporcional a r^2, se llega a que $f(r) = -k_1 r$.

en la que no aparece la variable independiente y podemos hacer el cambio $v = \frac{dr}{dt}$, con $v = v(r)$. Así, usando que $\frac{d^2r}{dt^2} = v\frac{dv}{dr}$, llegamos a que

$$\frac{h^2}{r^3} = v\frac{dv}{dr} + k_1 r \Longrightarrow v\frac{dv}{dr} = \frac{h^2}{r^3} - k_1 r \Longrightarrow \frac{v^2}{2} = -\frac{h^2}{2r^2} - \frac{k_1 r^2}{2} + C.$$

Con la condición inicial $v(R) = 0$ y despejando v tendremos

$$\frac{dr}{dt} = v = \pm\sqrt{k_1\left(R^2 - r^2\right) - h^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right)}.$$

De este modo el cambio de función $q = r^2 - R^2$ transforma la ecuación en

$$\frac{R}{2}\frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{h^2 q - k_1 R^2 q(q + R^2)}.$$

Usando la primitiva

$$\int \frac{dz}{\sqrt{bz - az^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2az}{b} - 1\right) + C,$$

llegamos a que

$$\pm 2t\sqrt{k_1} + B = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2k_1 R^2}{h^2 - k_1 R^4} q - 1\right).$$

Deshaciendo el cambio para recuperar la r y con la condición $r(0) = R$, se obtiene que $B = -\frac{\pi}{2}$, de donde concluimos la relación

$$-\cos(2t\sqrt{k_1}) = \frac{2k_1 R^2}{h^2 - k_1 R^4}(r^2 - R^2) - 1,$$

que usando transformaciones trigonométricas elementales nos da

$$r(t) = \sqrt{R^2 \cos^2(\sqrt{k_1}t) + \frac{h^2}{k_1 R^2} \operatorname{sen}^2(\sqrt{k_1}t)}. \tag{5.17}$$

La trayectoria de la piedra será

$$(x(t), y(t)) = r(t)(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

con $\theta = \theta(t)$. Para poder determinar la trayectoria de una manera efectiva debemos obtener una expresión para la función $\theta(t)$, para ello haremos uso de (5.15). Consideremos la ecuación

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{R^2 \cos^2(\sqrt{k_1}t) + \frac{h^2}{k_1 R^2} \operatorname{sen}^2(\sqrt{k_1}t)}$$

sujeta a la restricción $\theta(0) = 0$. De la primitiva

$$\int \frac{dz}{a^2\cos^2(\beta z) + b^2\operatorname{sen}^2(\beta z)} = \frac{1}{ab\beta}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan(\beta z)\right) + C,$$

obtenemos la función

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{h}{R^2\sqrt{k_1}}\tan(\sqrt{k_1}t)\right)$$

para $0 < t < \frac{\pi}{2\sqrt{k_1}}$. Con esta función, usando (5.17), concluimos que la trayectoria puede escribirse como

$$(x(t), y(t)) = \left(R\cos(\sqrt{k_1}t), \frac{h}{\sqrt{k_1}R}\operatorname{sen}(\sqrt{k_1}t)\right).$$

Ahora es sencillo observar que estas ecuaciones corresponden a la parametrización de la elipse centrada en el origen[10]

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{\frac{h^2}{k_1R^2}} = 1.$$

El tiempo necesario para completar la trayectoria es lo que se denomina *periodo* y se denota por T. Es sencillo observar que en este caso[11]

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_1}}.$$

Supongamos ahora que lanzamos la piedra desde un punto de la Tierra que no está sobre el ecuador. Consideramos un cierto punto D situado en una latitud ϕ, con $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La curva descrita por la piedra lanzada desde esta posición se puede obtener del mismo modo que para la piedra lanzada desde el ecuador, considerando un plano que forme un ángulo ϕ con el del ecuador y que pase por D, excepto por un cambio en la constante del momento angular que consideraremos ahora $\hat{h}$. Veamos qué relación existe entre $\hat{h}$ y h. En el punto D la velocidad tangencial vendrá dada por $v = 2\pi R\cos\phi/Q$. Esa velocidad tangencial es tambien $v = R\frac{d\theta}{dt}(0)$, siendo θ el ángulo formado por D, el origen y la posición de la piedra en el instante t. De este modo

$$\frac{d\theta}{dt}(0) = 2\pi\cos\phi/Q$$

y entonces

$$\hat{h} = 2\pi R^2\cos\phi/Q = h\cos\phi.$$

[10] Como veremos a continuación, lo que acabamos de obtener es un resultado análogo a la *primera ley de Kepler* para el movimiento de los planetas. Además, este resultado se corresponde con el *Corollary I* de la *Proposition 10* de los *Principia* de Newton.

[11] Este resultado también pertenece a los *Principia* de Newton, de hecho se trata del *Corollary II* de la *Proposition 10* y es un resultado análogo a la *tercera ley de Kepler*.

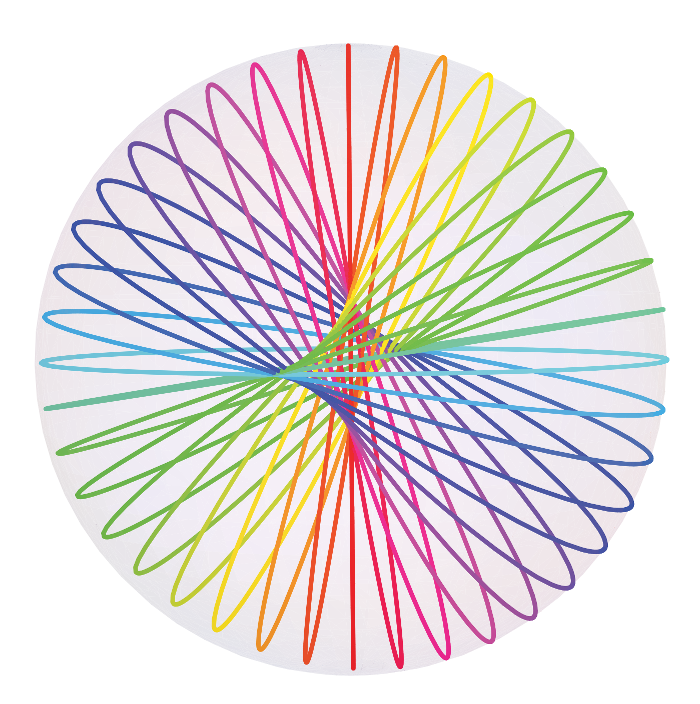


Figura 5.16: Algunas de las trayectorias descritas por la piedra lanzada hacia el interior de la tierra.

Así, en el plano comentado, las ecuaciones paramétricas de la elipse serán

$$\left(R\cos(\sqrt{k_1}t), \frac{h}{\sqrt{k_1}R}\cos\phi\,\mathrm{sen}(\sqrt{k_1}t)\right).$$

Para obtener las ecuaciones paramétricas de la trayectoria en las coordenadas (x, y, z) basta efectuar un giro de ángulo ϕ alrededor del eje y; es decir, debemos aplicar la transformación lineal

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \mathrm{sen}\,\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\phi & 0 & -\cos\phi \end{pmatrix}$$

al vector de posición $\left(R\cos(\sqrt{k_1}t), \frac{h}{\sqrt{k_1}R}\cos\phi\,\mathrm{sen}(\sqrt{k_1}t), 0\right)$. De este modo llegamos a la trayectoria

$$\begin{aligned}&(x(t,\phi), y(t,\phi), z(t,\phi)) \\ &\qquad = \left(R\cos\phi\cos(\sqrt{k_1}t), \frac{h}{\sqrt{k_1}R}\cos\phi\,\mathrm{sen}(\sqrt{k_1}t), R\,\mathrm{sen}\,\phi\cos(\sqrt{k_1}t)\right).\end{aligned}$$

Es interesante notar que en el caso $\phi = \frac{\pi}{2}$ la trayectoria queda reducida a una recta que va del polo norte al polo sur. En la figura 5.16 se muestran algunas de las trayectorias de la piedra.

Material complementario

Las leyes de Kepler

Las leyes de Kepler describen el movimiento planetario y se pueden deducir de un modo análogo a como hemos procedido en el apartado anterior para obtener la trayectoria de una piedra que pudiese caer hacia el interior de la Tierra. Nosotros procederemos de este modo; es decir, usando ecuaciones diferenciales. Cuando Kepler (del que podemos ver una imagen en la parte derecha de la figura 5.17) obtuvo sus célebres leyes, el cálculo diferencial estaba todavía escasamente desarrollado y su deducción fue prácticamente empírica, a partir de datos obtenidos de observaciones astronómicas.

Las observaciones astronómicas que utilizó Kepler eran fruto de las mediciones extraordinariamente precisas realizadas por el astrónomo danés Tycho Brahe (en la parte izquierda de la figura 5.17), considerado el más grande observador del cielo en el período anterior a la invención del telescopio. A partir de 1572, bajo el mecenazgo del rey Federico II de Dinamarca y Noruega, Brahe hizo que se construyera en la isla de Hven (en el estrecho de Sund) Uraniborg *(Ciudad de Urania, musa de la astronomía, y de la que podemos ver una recreación en la parte central de la figura 5.17), un palacio que se convertiría en el primer instituto de investigación astronómica. En la misma isla, algún tiempo después, mandó edificar un nuevo observatorio, denominado* Stjerneborg *(Ciudad de las Estrellas). Los instrumentos diseñados por Brahe le permitieron medir las posiciones de las estrellas y los planetas, aún sin telescopios, con una precisión muy superior a la alcanzada hasta la época. Atraído por la fama de Brahe, Kepler aceptó una invitación que le hizo para trabajar junto a él en Praga, donde Brahe se había instalado desde 1599. En Praga, el emperador (del Sacro Imperio Romano Germánico) Rodolfo II nombró a Brahe* matemático imperial*. Brahe murió a los dos años, en 1601, y el cargo y las observaciones astronómicas pasaron a manos de Kepler. Usando ese material fue como Kepler llegó a deducir sus famosas tres leyes (las dos primeras publicadas en 1609 en su obra* Astronomia Nova *y la tercera dada a conocer en 1619 en libro V de su obra* Harmonices Mundi*) que describen el movimiento de los planetas entorno al Sol. Las leyes de Kepler asombraron al mundo y lo revelaron como el mejor astrónomo de su época.*

> **Primera Ley.** *Todos los planetas se mueven alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, estando el Sol situado en uno de los focos.*



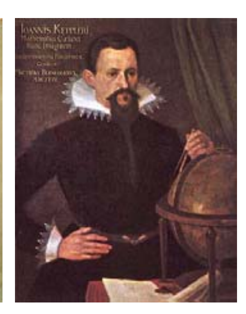


Figura 5.17: De izquierda a derecha, Tycho Brahe (1546-1601), una recreación de *Uraniborg* y Johannes Kepler (1571-1630).

Para probar este hecho supongamos que consideramos un plano que contiene un cierto planeta y al Sol. Tomaremos el origen de un sistema de coordenadas polares (r, θ) *situado sobre el Sol. Ahora, tomando en* (5.14) *la función* $f(r) = -\frac{GMm}{r^2}$*, donde* G *es la constante de gravitación universal,* M *es la masa del sol y* m *es la masa del planeta en cuestión*[12] *tendremos la ecuación*

$$-\frac{GM}{r^2} = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{5.18}$$

(notad que la masa m *de la fuerza de la gravitación universal desaparece ya que se cancela con la que obtendríamos por la segunda ley de Newton y que en el apartado anterior habíamos tomado como uno). Sustituyendo la ecuación de la ley de conservación del momento angular*

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$$

(5.18) *se transforma en*

$$-\frac{GM}{r^2} = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3}.$$

El cambio de variable y función $z = 1/r$ *y* $z = z(\theta)$ *nos da*

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{dz}{d\theta}$$

y

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{d\theta}\right) = -h\frac{d^2z}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} = -h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2}.$$

y la ecuación (5.18) *se reduce a*

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = k,$$

[12] Estamos usando que $f(r)$ es la fuerza de gravitación universal descrita por Newton en sus *Principia* en 1687.

con $k = GM/h^2$, donde h es la constante de la ley de conservación del momento angular. En esta ecuación no aparece la variable y podemos efectuar un cambio del tipo $v = \frac{dz}{d\theta}$, con $v = v(z)$, para llegar a

$$v\frac{dv}{dz} + z = k,$$

cuya solución es

$$v^2 = A^2 - (k-z)^2,$$

para una cierta constante A. Por tanto,

$$z = A(\operatorname{sen}(\pm\theta + B)) + k = q\operatorname{sen}\theta + p\cos\theta + k,$$

para ciertas constantes p y q. Para simplificar, supongamos que r es mínimo (es decir, el planeta se encuentra más próximo al Sol) cuando $\theta = 0$. De esta suposición deducimos inmediatamente que $z'(0) = 0$ y $z''(0) < 0$, lo que implica que $q = 0$ y $p > 0$ y, por tanto,

$$r = \frac{e}{p(1 + e\cos\theta)}, \text{ con } e = p/k > 0.$$

Resulta sencillo comprobar que las coordenadas paramétricas

$$x = \frac{e\cos\theta}{p(1+e\cos\theta)} \quad \text{e} \quad y = \frac{e\operatorname{sen}\theta}{p(1+e\cos\theta)}$$

satisfacen la relación

$$x^2 + y^2 = \frac{e^2}{p^2}(1-px)^2.$$

Esta ecuación representa una elipse en el caso $e < 1$, una parábola para $e = 1$ y una hipérbola cuando $e > 1$. Puesto que sabemos que la órbita de los planetas es cerrada, se verificará que $e < 1$ y tendremos la ecuación

$$(1-e^2)\left(x + \frac{e^2}{p(1-e^2)}\right)^2 + y^2 = \frac{e^2}{p^2(1-e^2)}.$$

Esta elipse está centrada en el punto $\left(-\frac{e^2}{p(1-e^2)}, 0\right)$, tiene por semieje horizontal $\frac{e}{p(1-e^2)}$, por semieje vertical $\frac{e}{p\sqrt{1-e^2}}$ y sus focos están en $\left(-\frac{2e^2}{p(1-e^2)}, 0\right)$ y $(0,0)$; es decir, uno de ellos es el Sol.

> ***Segunda Ley.*** *El radio vector que une el planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.*

Si denotemos por $A = A(t)$ el área barrida por el radiovector $\mathbf{r}$ desde una cierta posición fija en un tiempo t, entonces $dA = r^2 d\theta/2$. Usando esto y (5.15) llegamos a que

$$dA = \frac{1}{2}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)dt = \frac{h}{2}dt.$$

Integrando contra t en el intervalo $[t_1, t_2]$ concluimos que

$$A(t_2) - A(t_1) = \frac{h}{2}(t_2 - t_1).$$

Para deducir esta segunda ley la única suposición necesaria es que la fuerza que actúa sobre el planeta va en la dirección del radiovector $\mathbf{r}$. *Un resultado similar a este será valido en general para cualquier fuerza en la dirección del radiovector, este hecho es la* Proposition I *de los* Principia *de Newton.*

> ***Tercera Ley.*** *Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital (tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de la distancia media con el Sol.*

La distancia media de un planeta con el Sol es la semisuma de la distancia máxima y la distancia mínima de este al Sol. Este valor corresponde con el valor del semieje mayor de la elipse. En nuestro caso ese valor es $\frac{e}{p(1-e^2)}$ *y lo abreviaremos por* a. *Si denotamos por* T *el periodo de cualquier planeta, por la segunda ley tendremos que* $T\frac{h}{2}$ *será igual al área limitada por la elipse de la trayectoria, que es el producto de sus semiejes. Por tanto tendremos que*

$$T\frac{h}{2} = \pi \frac{e^2}{p^2(1-e^2)^{3/2}},$$

lo que nos da

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{h^2}\frac{e^4}{p^4(1-e^2)^3} = \frac{4\pi^2}{GM}a^3,$$

(recordad que $e = p/k$ *y* $k = GM/h^2$*).*

5.6. Problemas

Problema 142. Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones

a) $tx(x')^2 + (t^2 + tx + x^2)x' + t^2 + tx = 0$;

b) $t(t+1)(x')^2 + (t^2 + t - 2tx - x)x' + x^2 - tx = 0$;

c) $t(t-2)(x')^2 + (2x - 2tx - t + 2)x' + x(x+1) = 0$;

d) $t(x')^2 - xx' - x = 0$;

e) $x = 2x' + \sqrt{1 + (x')^2}$;

f) $x = x't + \sqrt{a^2 + b^2(x')^2}$;

g) $x = tx' + \dfrac{ax'}{\sqrt{1+(x')^2}}$.

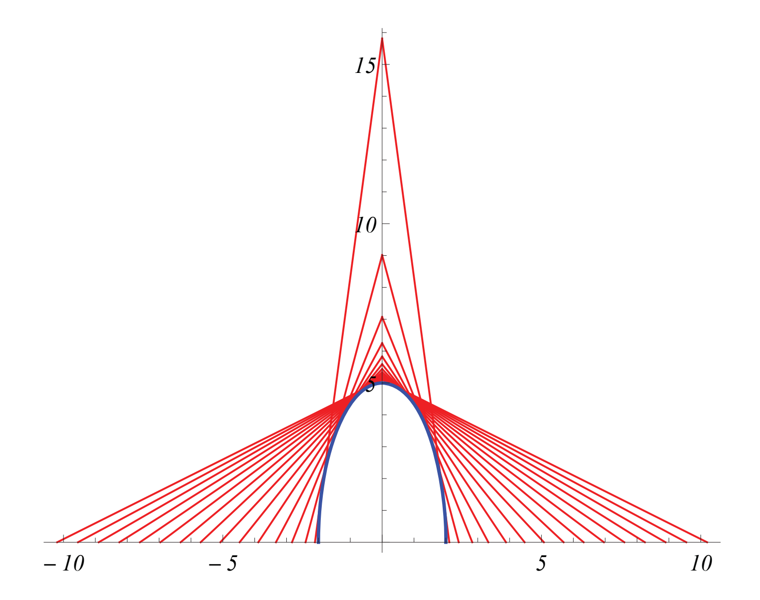


Figura 5.18: Algunas soluciones al apartado f) del Problema 142.

En la figura 5.18 se han generado algunas soluciones para el apartado f) del Problema 142 para el caso $a = 5$ y $b = 2$. Para obtener esta figura hemos utilizado un sencillo código de *Mathematica*:

```
F[t_, a_] := a*t + Sqrt[25 + 4*a^2]
envoltura[n_] :=
 Block[{g, h},
   g[a_]:= Plot[F[t, a], {t, -Sqrt[25 + 4*a^2]/a, 0},
        PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}];
   h[a_]:= Plot[F[t, -a], {t, 0, Sqrt[25 + 4*a^2]/a},
        PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}];
   Show[Table[g[(n/(2*i))], {i, 1, n}],
        Table[h[(n/(2*i))], {i, 1, n}],
        ParametricPlot[{2*Cos[t], 5*Sin[t]}, {t, 0, Pi},
                       PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1],
                                     Thickness[0.01]}],
        AspectRatio -> Automatic,
        AxesStyle -> Directive[Italic, Medium],
        PlotRange -> {0, Sqrt[25 + n^2]}]]
```

La figura 5.18 se corresponde con `envoltura[15]`.

Problema 143. Hallar una curva tal que la diferencia de los cuadrados de las distancias desde los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ a sus rectas tangentes, sea constante e igual $4k^2$.

Problema 144. Hallar una curva tal que el producto de las distancias desde dos puntos fijos a cualquiera de sus tangentes es constante e igual a k^2.

Problema 145. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x''' = \operatorname{sen} t + \cos t$,

b) $x''' = \frac{\log t}{t^2}$, con las condiciones $x(1) = 0$, $x'(1) = 1$ y $x''(1) = 2$,

c) $x''' = \sqrt{1 + (x'')^2}$,

d) $tx^{(5)} - x^{(4)} = 0$,

e) $x'' + (x')^2 = 2e^{-x}$,

f) $tx'' + (x')^2 = 0$,

g) $tx'' = x' + (x')^3$,

h) $x'' - k^2 x = 0$,

i) $x'' = 2x^3$, con las condiciones $x(0) = 1$ y $x'(0) = 1$.

Problema 146. Resolver los problemas de valores iniciales

a) $\begin{cases} (t^2 + 2x')x'' + 2tx' = 0, \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} xx'' = x^2 x' + (x')^2, \\ x(0) = -1/2, \quad x'(0) = 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x''' = 3xx', \\ x(0) = x'(0) = 1, \quad x''(0) = 3/2. \end{cases}$

Problema 147. Compruébese que, si $4a_2 \leq (a_1 - 1)^2$, existe al menos un valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para el que el cambio de variable dependiente $x = t^\alpha z$ permite resolver la ecuación

$$t^2 x'' + ta_1 x' + a_2 x = 0.$$

Aplíquese este hecho a la resolución de la ecuación

$$t^2 x'' - 3tx' + 3x = 0.$$

Problema 148. Consideramos una ecuación del tipo

$$F\left(t, \frac{x'}{x}, \frac{x''}{x}\right) = 0.$$

Probar que el cambio de función $u = \frac{x'}{x}$ reduce el orden de la ecuación en una unidad. Usar este hecho para resolver la ecuación $t^2 xx'' - t^2 (x')^2 + txx' + x^2 = 0$.

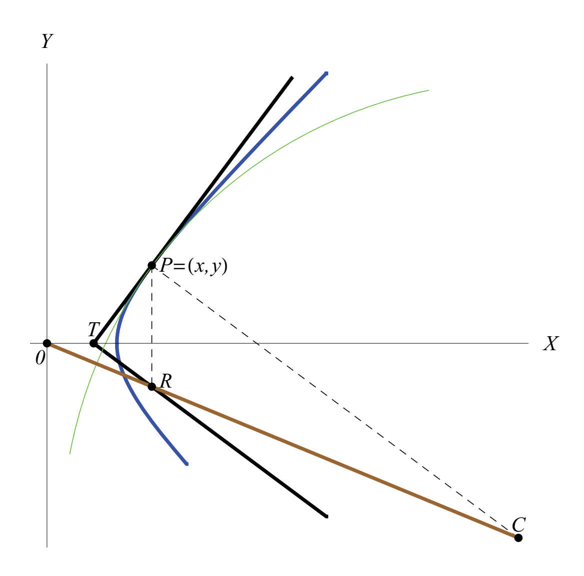


Figura 5.19: Esquema para el Problema 149.

Problema 149. Por un punto $P = (x, y)$ (ver el esquema de la figura 5.19) de una curva se traza su tangente, que corta al eje OX en T. Se traza por T una perpendicular a la recta tangente, que corta a la recta $X = x$ en el punto R. Queremos determinar la ecuación de la curva supuesto que el origen de coordenadas O, el punto R y el centro de curvatura correspondiente al punto P están alineados.

Recordatorio: Si un punto tiene coordenadas (x, y), con $y = y(x)$, las coordenadas del centro de curvatura son (x_c, y_c), con

$$x_c = x - y'\frac{1 + (y')^2}{y''} \qquad \text{e } y_c = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}.$$

a) Probar que la curva en cuestión satisface la ecuación diferencial

$$xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0.$$

b) Usando el cambio de función $u = \frac{y'}{y}$ reducir el orden de la ecuación del apartado anterior y obtener su solución general.

Problema 150. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, al menos dos veces derivables, tales que la longitud de la curva $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ sea igual a la variación de f' en dicho intervalo.[13]

Problema 151. Determinar todas funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ de clase $C^1(\mathbb{R})$ para las que el área bajo la gráfica de la función en un intervalo $[a, b]$ es proporcional a su longitud en el mismo intervalo.

[13] La variación de una función f en un intervalo $[a, b]$ es igual a la diferencia $f(b) - f(a)$.

Problema 152. Encontrar la solución general de $(1-t^2)x''-tx'+a^2x=0$. Para ello efectuar un cambio de variable $t=\phi(u)$ de forma que en la ecuación resultante no aparezca el término en x' y posteriormente efectuar una reducción en el orden de la ecuación.

Problema 153. Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}-3x\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+x^3=0, \\ x(0)=1, x'(0)=2/3. \end{cases}$$

Obtener su solución usando el cambio $z=\frac{dt}{dx}$, con $z=z(x)$ para transformar la ecuación dada en

$$\frac{dz}{dx}+3xz=x^3z^3.$$

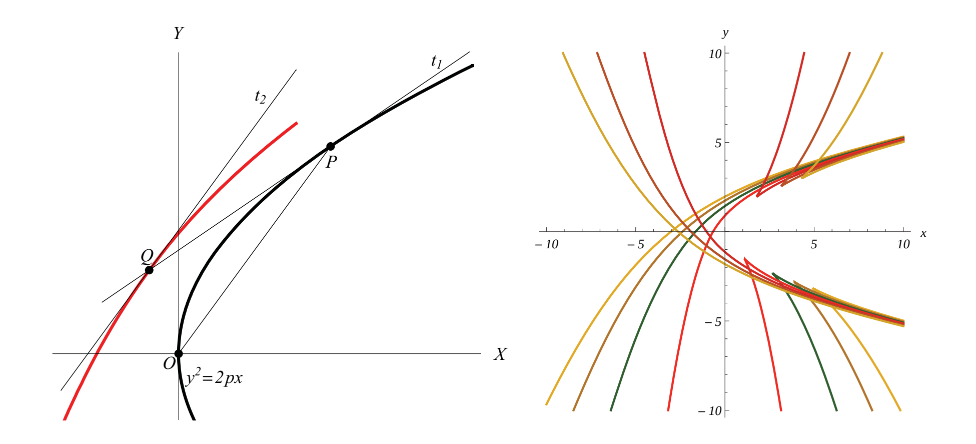


Figura 5.20: A la izquierda esquema de la situación del Problema 154 y a la derecha algunas de las curvas solución.

Problema 154. Queremos determinar la forma de una cierta curva cumpliendo la siguiente propiedad: si desde un punto Q de la curva desconocida se traza la recta tangente t_1 a la parábola $y^2=2px$ (p fijo) que la toca en el punto P, la tangente t_2 a la curva desconocida en el punto Q es paralela a OP (se adjunta esquema de la situación en la parte izquierda de la figura 5.20).

a) Probar que la ecuación diferencial que satisface la curva buscada es

$$y=\frac{x}{2}y'+\frac{p}{y'}.$$

b) Resolver la ecuación del apartado anterior. Algunas de las curvas solución se muestran en el lado derecho de la figura 5.20.

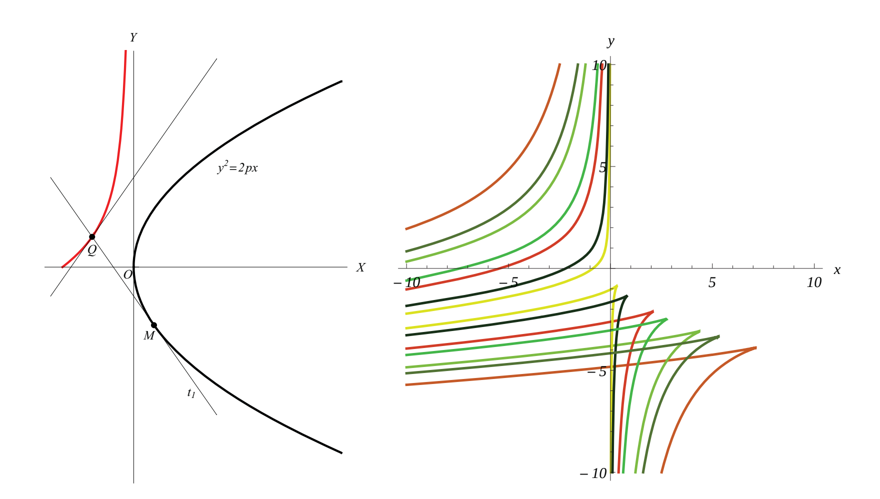


Figura 5.21: A la izquierda esquema de la situación del Problema 155 y a la derecha algunas de las curvas solución.

Problema 155. Queremos determinar la forma de una cierta curva cumpliendo la siguiente propiedad: en un punto Q de la curva desconocida se traza una recta t_1 de pendiente opuesta a la de la recta tangente en Q y t_1 es tangente a la parábola $y^2 = 2px$ en un punto M (se adjunta esquema de la situación en la parte izquierda de la figura 5.21).

a) Probar que la ecuación diferencial que satisface la curva buscada es

$$y = -xy' - \frac{p}{2y'}.$$

b) Resolver la ecuación del apartado anterior. Algunas de las curvas solución se muestran en el lado derecho de la figura 5.21.

Problema 156. La fuerza gravitatoria que actúa sobre una masa m a una distancia s del centro de la Tierra es proporcional a m/s^2. Hallar la velocidad que alcanza en la superficie terrestre una masa que se deja caer desde una distancia igual a $5R$, donde R es el radio de la Tierra.

Problema 157. En el interior de la Tierra la fuerza de la gravedad es proporcional a la distancia al centro. Perforamos un orificio que atraviese a la Tierra, de polo a polo, y dejamos caer una piedra. Determinar su velocidad al llegar al centro.

Problema 158. Una cadena de cuatro metros de longitud comienza con un metro colgando del borde de una mesa. Despreciando el rozamiento, determinar el tiempo que tardará en caer de la mesa la cadena.

Problema 159. Un objeto de masa m es lanzado hacia arriba, verticalmente, desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial v_0. Suponiendo que el

cuerpo encuentra una resistencia del aire proporcional a su velocidad, determinar la ecuación de la trayectoria y en qué momento alcanzará su máxima altura.

Problema 160. Un paracaidista de 75 kilogramos de peso se lanza desde un avión situado a 400 metros de altura. Tras 15 segundos de caída libre abre su paracaídas. Asumamos que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad al cuadrado (con constante de proporcionalidad $k_1 = 0.0053$) durante el periodo de caída libre y proporcional a la velocidad (con constante de proporcionalidad $k_2 = 0.3096$) a partir de la apertura del paracaídas.

a) Determinar el tiempo que le costará alcanzar tierra al paracaidista.

b) Determinar la velocidad con la que impactará.

Problema 161. Tal y como hemos visto en este capítulo, la trayectoria $(x, y) = r(\theta)(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ de un cuerpo o una partícula que suponemos de masa unitaria, sujeto a una cierta fuerza radial $f(r)$, satisface las ecuaciones

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = f(r).$$

a) Comprobar que el cambio de variable y función

$$u = \frac{1}{r} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}, \qquad \text{con } u = u(\theta),$$

transforma la ecuación

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = f(r)$$

en

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{h^2u^2}.$$

b) Si nuestro cuerpo parte del punto $(1, 0)$ en el instante inicial con una velocidad $v_0 = 1$ (lo tomamos así para no complicar las cuentas) y formando un ángulo α con la horizontal, probar que el movimiento puede obtenerse resolviendo el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha\, u^2}, \\ u(0) = 1, \frac{du}{d\theta}(0) = -\cot\alpha. \end{cases}$$

c) Si suponemos que la fuerza que actúa sobre nuestro cuerpo es $f(r) = \frac{-1}{r^2}$, obtener la ecuación de su trayectoria. Determina la envolvente de la familia de trayectorias. En la figura 5.22 aparecen representadas algunas de las trayectorias del cuerpo.

d) Responder a las mismas cuestiones del apartado anterior pero tomando la fuerza $f(r) = \frac{1}{r^2}$.

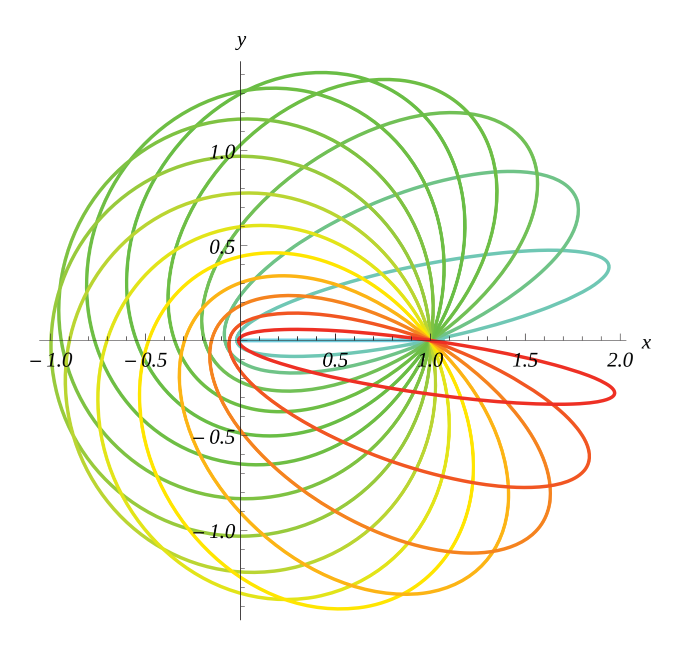


Figura 5.22: La imagen que aparece a continuación muestra la trayectoria obtenida en el apartado c) del Problema 161 para distintos valores de $\alpha \in [-\pi, \pi]$. Como se puede ver se trata de una familia de elipses.

Problema 162. Es bien conocido que cualquier imagen requiere de una gran cantidad de memoria para su almacenamiento y por ello se buscan procedimientos para que dicho almacenaje resulte lo más óptimo posible. Algunos de los procedimientos que se están desarrollando en los años simplemente almacenan cierta información relevante sobre la imagen que permite reconstruirla completamente. Una forma de reconstruir una curva (con ciertas simetrías) consiste en considerarla como la envolvente de una familia de circunferencias bitangentes a la curva que se pretende reconstruir con un radio $r = r(t)$ y centradas sobre una curva que satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = \frac{rr'(x - u(t))}{(x - u(t))^2 + (y - v(t))^2} \qquad \text{e} \qquad y' = \frac{rr'(y - v(t))}{(x - u(t))^2 + (y - v(t))^2},$$

donde $(u(t), v(t))$ es una curva denominada *midpoint locus* y se corresponde con el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos que unen los puntos de tangencia de las circunferencias bitangentes.

Vamos a proceder a resolver el sistema anterior en una caso particular sencillo. Supongamos que tomamos $r^2(t) = t + \frac{1}{4}$ y el *midpoint locus* como $(u(t), v(t)) = (0, t)$. (Este caso se corresponde a la reconstrucción de una parábola y es un ejemplo que está tomado del artículo *Reconstruction from medial representations*, de P. J. Giblin y J. P. Warder, aparecido en la revista *The American Mathematical Monthly*, en octubre de 2011, págs. 712–725.)

a) Usando el cambio de función $y - t = zx$, con $z = z(t)$, transformar el sistema propuesto en

$$x' = \frac{1}{2x(1+z^2)} \qquad \text{y} \qquad 1 + z'x = 0.$$

b) Convertir el sistema del apartado anterior en la ecuación

$$2(1+z^2)z'' + (z')^3 = 0$$

y obtener su solución general.

c) Obtener la solución del sistema de partida como función de z.

5.6.1. Otros métodos de reducción

Veamos que en casos determinados y si las ecuaciones que nos plantean tienen ciertas características es posible efectuar reducciones en el orden.

Problema 163. Consideramos una ecuación diferencial del tipo

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0$$

para la que existen α y m fijos tales que

$$F\left(\lambda t, \lambda^m x, \lambda^{m-1}\frac{dx}{dt}, \ldots, \lambda^{m-n}\frac{d^n x}{dt^n}\right) = \lambda^\alpha F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}\right).$$

El cambio de variable y función $t = e^s$ y $x = e^{ms}w$, con $w = w(s)$, al que le corresponde el diagrama

$$\begin{array}{lcl}
 & s & \\
 & \nwarrow & \\
 & & x \longrightarrow t \longrightarrow s,\\
 & \swarrow & \\
s \longleftarrow & w &
\end{array}$$

transforma la ecuación propuesta en una del tipo

$$G\left(w, \frac{dw}{ds}, \ldots, \frac{d^n w}{ds^n}\right) = 0,$$

para una cierta función G. A esta nueva ecuación se le puede aplicar el cambio $z(w) = \frac{dw}{ds}(s(w))$, ya que no aparece la nueva variable s, y obtendremos una reducción del orden en una unidad.

a) Probar que para el cambio de variable y función propuesto se cumple que

$$\frac{d^k x}{dt^k} = e^{(m-k)s} h_k\left(w, \frac{dw}{ds}, \ldots, \frac{d^k w}{ds^k}\right), \quad k = 0, \ldots, n$$

para funciones $h_k(y_1,\ldots,y_{k+1})$ dadas, para $k=1,\ldots,n$, por la recurrencia

$$h_k(y_1,\ldots,y_{k+1}) = (m-k+1)h_{k-1}(y_1,\ldots,y_k) + \sum_{j=1}^{k} y_{j+1}\frac{\partial h_{k-1}(y_1,\ldots,y_k)}{\partial y_j},$$

con $h_0(y_1)=y_1$.

b) Probar que efectivamente con el cambio de variable y función propuesto, la ecuación

$$F\left(t,x,\frac{dx}{dt},\ldots,\frac{d^nx}{dt^n}\right)=0$$

se transforma en

$$G\left(w,\frac{dw}{ds},\ldots,\frac{d^nw}{ds^n}\right)=0$$

para una cierta función G.

c) Aplicar el procedimiento anterior para determinar la solución general de la ecuación

$$4t^2x^3\frac{d^2x}{dt^2}=t^2-x^4.$$

Problema 164. Consideramos una ecuación diferencial del tipo

$$F(t,x,x',\ldots,x^{(n)})=0$$

tal que, para un m fijo, se verifica que

$$F(t,\lambda x,\lambda x',\ldots,\lambda x^{(n)})=\lambda^m F(t,x,x',\ldots,x^{(n)}).$$

En esta situación el cambio de función

$$x(t)=e^{\int w(t)\,dt}$$

nos transformará la ecuación propuesta en una de orden $n-1$.

a) Probar que para el cambio de función propuesto se cumple que

$$x^{(k)}=xg_k(w,w',\ldots,w^{(k-1)})$$

para $k=0,\ldots,n$. Las funciones g_k están dadas por la relación de recurrencia

$$g_k(y_1,\ldots,y_k)=y_1g_{k-1}(y_1,\ldots,y_{k-1})+\sum_{j=1}^{k-1}y_{j+1}\frac{\partial g_{k-1}(y_1,\ldots,y_{k-1})}{\partial y_j},$$

para $k=2,\ldots,n$ y $g_1(y_1)=y_1$.

b) Probar que efectivamente, por el cambio de función propuesto, la ecuación

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

se transforma en

$$G(t, w, w', \ldots, w^{(n-1)}) = 0$$

para una cierta función G.

c) Aplicar el procedimiento anterior para determinar la solución general de la ecuación

$$3t^2((x')^2 - xx'') = x^2.$$

Problema 165. Encontrar la solución general de las ecuaciones

a) $t^2x'' = 2tx' + (x')^2$,

b) $xx'' - (x')^2 = \frac{xx'}{1+t}$,

c) $t^2xx'' = (x - tx')^2$,

d) $t^3x'' = (x - tx')^2$.



Un retrato del matemático francés Pierre de Bouguer (1698–1758).

5.6.2. Algunas cuestiones relativas a curvas de persecución

Como ya anticipábamos en el segundo capítulo, fue el matemático francés Pierre Bouguer quien el 16 de enero de 1732 presentó en la Academia Francesa un trabajo que estudiaba la primera curva de persecución. Ese trabajo apareció publicado en *Mémories de l'Académie Royale des Sciences* en 1735. Ahora estamos en condiciones de analizar este problema.

Problema 166. Supongamos que un barco mercante, que se desplaza en línea recta a una velocidad V_m, es avistado por un barco pirata. En ese instante comienza una persecución en la que el barco pirata siempre se mueve dirigiéndose al mercante (es decir, el vector velocidad del barco pirata apunta hacia el mercante en cada instante). Determinar la trayectoria del barco pirata, supuesto que $V_m < V_p$. ¿En qué punto se produce la captura del barco mercante? ¿Cuál es la trayectoria en el caso límite $V_m = V_p$?

Problema 167. En el caso $V_m < V_p$, ¿cuál es la distancia recorrida por el barco pirata antes de dar alcance al barco mercante?

Cuando $V_m = V_p$, obviamente, el barco pirata no alcanza al mercante. Sin embargo, se produce un hecho interesante y bastante lógico: la distancia entre los barcos se aproxima a un cierto valor fijo. ¿Podrías determinar ese valor?

Problema 168. Un gorrión que vuela en línea recta, se encuentra cincuenta metros directamente por debajo de un águila y cien metros directamente por encima de un halcón. Tanto el águila como el halcón vuelan directamente hacia

el gorrión y lo alcanzan a la vez. Si el halcón vuela el doble de rápido que el gorrión, ¿cuánto más rápido vuela el águila que el gorrión?[14]

Problema 169. Si el barco mercante del Problema 166 decide iniciar una huida a lo largo de una trayectoria rectilínea que forma un ángulo α con la línea que le une inicialmente al barco pirata, ¿cuál será la nueva curva de persecución? (El caso del Problema 166 corresponde, obviamente, al caso $\alpha = \pi/2$ y el caso $\alpha = 0$ supondría que el barco pirata se debería limitar a perseguir al mercante en línea recta desde su posición actual; lo que nos interesa son los casos $\alpha \in (0, \pi/2)$.)

5.6.3. Una propuesta sobre espejos

Como hemos visto en este capítulo, las parábolas son las únicas curvas que satisfacen la propiedad focal que establece que los rayos de luz procedentes del Sol en la dirección de su eje de simetría se reflejan en ellas pasando por un punto fijo. Los rayos de luz procedentes del Sol podemos pensar que son emitidos por una fuente de luz situada en el infinito. De este modo podemos plantearnos la siguiente generalización de la propiedad focal: determinar la forma que debe tener un espejo para que los rayos de luz emitidos desde un cierto punto se reflejen siempre pasando por otro punto fijo. Las parábolas resuelven el caso en el que la distancia entre los puntos es infinita. Veamos como analizar la situación cuando la distancia entre los puntos sea finita. Igual a como hicimos en el caso infinito, debemos usar la ley de reflexión de la luz. Resolveremos la cuestión en varios pasos y siguiendo la notación introducida en la figura 5.23.

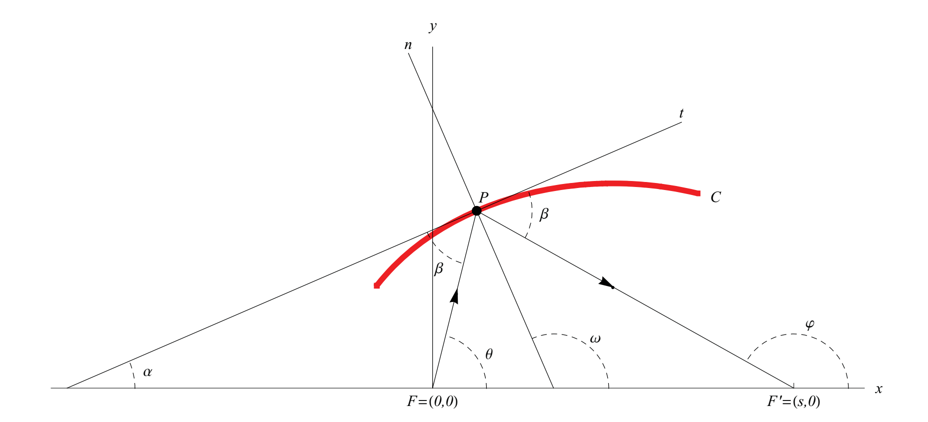


Figura 5.23: Esquema de la reflexión de luz a través de un punto fijo.

[14]Este problema apareció propuesto por Samuel I Jones como Probema 3573 en el número de noviembre de 1931 de la revista *The American Mathematical Monthly* y fue planteado en la competición Putnam (un concurso para estudiantes que organizan las universidades americanas) del año 1952.

Problema 170. En primer lugar obtendremos la ecuación que describe la forma del espejo. Supongamos que un rayo de luz parte del punto $F = (0, 0)$ y se refleja en el punto P de la curva C buscada para pasar después por el punto $F' = (s, 0)$. Si suponemos que $P = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$, probar que

$$\frac{r}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{s}{\operatorname{sen}(\varphi - \theta)},$$

donde φ es el ángulo que forma el rayo reflejado con la horizontal. Deduce de este hecho que

$$s = r\left(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\varphi}\right). \tag{5.19}$$

Ahora, si α es el ángulo que forma la recta tangente t a C en el punto P, y ω es el ángulo que forma la recta normal n con la horizontal, probar que

$$\omega = \alpha \pm \frac{\pi}{2} = \frac{\theta + \varphi}{2}.$$

De la identidad anterior concluir que

$$\tan\varphi = \frac{\tan 2\alpha - \tan\theta}{1 + \tan 2\alpha \tan\theta}. \tag{5.20}$$

Finalmente, suponiendo que $r = r(\theta)$, teniendo en cuenta la identidad

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta},$$

y usando las relaciones (5.19) y (5.20), obtener la ecuación

$$s = \frac{2r^2 r'}{((r')^2 - r^2)\operatorname{sen}\theta + 2rr'\cos\theta}. \tag{5.21}$$

Problema 171. Procedamos ahora a determinar la forma de los espejos. Probar que derivando respecto de θ la relación (5.21), llegamos a

$$(rr'' - 2(r')^2)\operatorname{sen}\theta = rr'\cos\theta.$$

Usando el cambio de función $r = 1/\rho$, transformar esta ecuación en

$$\rho'' \operatorname{sen}\theta = \rho' \cos\theta.$$

Concluir, considerando las soluciones de esta última ecuación, que las únicas curvas con la propiedad solicitada son las elipses y las hipérbolas.

Capítulo 6

Teoremas de existencia y unicidad de solución para problemas de valores iniciales

6.1. Introducción

Resulta sencillo comprobar que existen problemas de valores iniciales para los que la solución no es única. Como muestra, un botón, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} (t^2 + 2x')x'' + 2tx' = 0, \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \end{cases}$$

admite como soluciones las funciones $x(t) = 1$ y $x(t) = 1 - \frac{t^3}{3}$. Al menos en este caso admite soluciones, pero podríamos encontrarnos con situaciones en las que no exista solución alguna. Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + 1 = 0, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son de la forma $x = \pm it + C$ y, por tanto, son funciones que toman valores en $\mathbb{C}$ y no en $\mathbb{R}$. De esta forma, podemos asegurar que no existe solución para el problema de valores iniciales propuesto con valores reales.

En los problemas de valores iniciales que hemos analizado sabíamos de alguna manera manipular la ecuación que aparecía involucrada. Sin embargo, es muy habitual que no sepamos como resolver la ecuación. Todas estas cuestiones que estamos comentando sobre problemas de valores iniciales se reducen

esencialmente a dos preguntas: dado el problema

$$(P) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

con $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, y $(t_0, x_0) \in \Omega$,

- ¿Existe solución para (P); es decir, existe $\phi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $t_0 \in I$, derivable satisfaciendo que $(t, \phi(t)) \in \Omega$, $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$[1] y $\phi(t_0) = x_0$?
- En caso de existir solución, ¿es única?

Gran parte de este capítulo lo dedicaremos al estudio de estas cuestiones. En concreto buscaremos condiciones sobre la función f que nos permitan asegurar existencia o existencia y unicidad de solución para el problema (P).

6.2. El teorema del punto fijo de Banach

En esta sección vamos a introducir la herramienta que nos permitirá probar nuestros primeros resultados generales de existencia y unicidad. En concreto vamos a presentar un teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas definidas sobre espacios métricos.[2] Este teorema fue probado por el matemático polaco Stephan Banach.

Comencemos dando la definición básica.

Definición 4. Sea (E, d) un espacio métrico y $T\colon E \longrightarrow E$ una aplicación. Diremos que T es una aplicación contractiva si existe $0 \leq k < 1$ tal que, para todo $x, y \in E$, se satisface que

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y).$$

Es interesante observar que toda aplicación contractiva es continua, es más es uniformemente continua, como aplicación de E en si mismo.

Veamos algunos ejemplos de aplicaciones de este tipo.

---

[1] Tened en cuenta que para $n > 1$, se verificará que

$$f(t,x) = f(t, x_1, \ldots, x_n) = (f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots f_n(t, x_1, \ldots, x_n))$$

y $\phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$ (por supuesto $\phi'(t) = (\phi_1'(t), \ldots, \phi_n'(t))$) y estaremos en realidad tratando con la igualdad

$$\phi_1'(t) = f_1(t, \phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)), \ldots, \phi_n'(t) = f_n(t, \phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)).$$

[2] Recordemos, que nunca esta de más, la definición de espacio métrico. Sea E un espacio y d una métrica sobre E; es decir, una aplicación $d\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaciendo

a) $d(x,y) = d(y,x)$, para todo $x, y \in E$

b) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, para todo $x, y, z \in E$, (desigualdad triangular)

c) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Se denomina espacio métrico a la pareja (E, d).

***Ejemplo* 26.** Si consideramos $(E, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, entendiendo que $d(x, y) = |x-y|$, cualquier función[3] f derivable sobre $\mathbb{R}$ y tal que $|f'(x)| \leq k < 1$ será contractiva. Para probar esto es suficiente hacer uso del teorema del valor medio. En efecto, si $\xi \in (x, y)$,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi) \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

y

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

La función $f(x) = \log \sqrt{1 + x^2}$ es un ejemplo de función contractiva.[4] ◁

***Ejemplo* 27.** Tomemos $(E, d) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ con $n > 1$ y donde

$$\|x\|_1 = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|,$$

entendiendo $d(x, y) = \|x - y\|_1$. Para cada $\alpha > 0$, consideramos la función $f_\alpha \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$f_\alpha(x) = f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \alpha(|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, \ldots, |x_{n-1} - x_n|, |x_n - x_1|).$$

La aplicación f_α es contractiva para $\alpha < 1/2$. En efecto,[5]

$$\begin{aligned} d(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) &= \|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)\|_1 \\ &= \alpha \big(\big||x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|\big| + \big||x_2 - x_3| - |y_2 - y_3|\big| + \\ &\quad \cdots + \big||x_{n-1} - x_n| - |y_{n-1} - y_n|\big| + \big||x_n - x_1| - |y_n - y_1|\big|\big) \\ &\leq \alpha(|(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)| + |(x_2 - y_2) - (x_3 - y_3)| + \\ &\quad \cdots + |(x_{n-1} - y_{n-1}) - (x_n - y_n)| + |(x_n - y_n) - (x_1 - y_1)|) \\ &\leq 2\alpha(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_{n-1} - y_{n-1}| + |x_n - y_n|) \\ &= 2\alpha\|x - y\|_1 = 2\alpha\, d(x, y), \end{aligned}$$

y $2\alpha < 1$, si $\alpha < 1/2$. ◁

[3] Cualquier función es, en particular, una aplicación.

[4] Notar que el valor absoluto de la derivada está acotado por 1/2. De hecho

$$|f'(x)| = \frac{|x|}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2},$$

puesto que por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica se verifica que $|x| \leq \frac{1+x^2}{2}$.

[5] Muy útil, en este caso y más adelante, nos va a resultar la desigualdad, consecuencia de la triangular, $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

***Ejemplo* 28.** Sea $(E,d) = (C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ donde $C^0([0,1],\mathbb{R})$ denota el conjunto de las funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ y

$$d(f,g) = \|f-g\|_\infty := \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in [0,1]\}.$$

Podéis comprobar (se trata de un sencillo ejercicio) que $\|\cdot\|_\infty$ es, efectivamente, una métrica sobre el espacio de funciones sobre el que estamos trabajando. Definimos ahora, para cada $j > 1$, la aplicación $H_j \colon C^0([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow C^0([0,1],\mathbb{R})$ definida para cada $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ como

$$H_j f(x) = \frac{1}{j}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Veamos que es una aplicación contractiva

$$\begin{aligned}
d(H_j f, H_j g) = \|H_j f - H_j g\|_\infty &= \left\| \frac{1}{j}\int_0^x (f(t)-g(t))\,dt \right\|_\infty \\
&= \sup\left\{ \left| \frac{1}{j}\int_0^x (f(t)-g(t))\,dt \right| : x \in [0,1] \right\} \\
&\le \sup\left\{ \frac{1}{j}\int_0^x |f(t)-g(t)|\,dt : x \in [0,1] \right\} \\
&\le \sup\left\{ \frac{1}{j}\int_0^x \|f-g\|_\infty\,dt : x \in [0,1] \right\} \\
&= \frac{1}{j}\|f-g\|_\infty = \frac{1}{j} d(f,g).
\end{aligned}$$

Luego H_j es una aplicación contractiva con constante $1/j$. Para tener comprobados todos los detalles nos faltaría chequear que la imagen del operador H_j está contenida en $C^0([0,1],\mathbb{R})$, este punto queda como ejercicio.[6] $\triangleleft$

Con esta definición ya estamos en condiciones de enunciar y probar nuestro teorema del punto fijo.[7]

[6] Es posible probar más, como consecuencia del teorema fundamental del cálculo integral se tiene que la imagen a través de H_j del espacio $C^0([0,1],\mathbb{R})$ está contenida en $C^1([0,1],\mathbb{R})$, que es subespacio de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

[7] Los teoremas del punto fijo son herramientas de gran utilidad en todas las ramas de las matemáticas y simplemente dan condiciones sobre las cuales una aplicación tiene algún elemento invariante. El teorema del punto fijo más conocido es, sin duda alguna, el denominado de Brouwer:

Teorema 7. *Sea A un subconjunto cerrado, acotado y convexo de $\mathbb{R}^n$. Si $f\colon A \longrightarrow A$ es una función continua, entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = x$.*

Aunque de apariencia inocente, la demostración de este teorema requiere de una maquinaria matemática bastante avanzada y sus aplicaciones son realmente sorprendentes. El imprescindible *Google* utiliza un algoritmo de ordenación de las páginas localizadas en una búsqueda (y este es el principal activo de este buscador) cuya pieza fundamental es el teorema de Perron-Frobenius y la prueba de este es una aplicación del teorema del punto fijo de Brouwer.

Teorema 8 (Teorema del punto fijo de Banach)**.** *Sean* (E,d) *un espacio métrico completo*[8] *y* $T\colon E \longrightarrow E$ *una aplicación contractiva, entonces existe un único punto fijo de* T*; es decir, existe un único* $x \in E$ *tal que* $Tx = x$*.*

Demostración. Veamos cómo construir una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset E$ convergente a un elemento x verificando la propiedad. Tomamos $x_0 \in E$ y definimos

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0,$$

para $n \geq 1$.[9] Si probamos que $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de Cauchy, la sucesión será convergente a un cierto elemento $x \in E$. Este elemento x es el buscado ya que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Tx_{n-1} = T\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = Tx,$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado que T es continua. Para probar la unicidad supongamos que existe otro punto fijo y, con $y \neq x$, para la aplicación T. Con esta elección

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq kd(x,y) \Longrightarrow (1-k)d(x,y) \leq 0 \Longrightarrow d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$$

lo que es absurdo.

Para concluir veamos que la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es de Cauchy. Para ello bastará ver que dado $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que $d(x_{m+1}, x_n) < \varepsilon$, para $m \geq n > n_0$. Un sencillo argumento de inducción nos muestra que

$$d(x_{j+1}, x_j) \leq k^j d(x_1, x_0), \qquad \text{para } j \geq 0. \tag{6.1}$$

En efecto, en el caso $j = 0$ tenemos la igualdad, veamos que (6.1) se cumple para $j+1$ si se cumple para j:

$$d(x_{j+2}, x_{j+1}) = d(Tx_{j+1}, Tx_j) \leq kd(x_{j+1}, x_j) \leq k^{j+1} d(x_1, x_0).$$

Ahora, usando la desigualdad triangular y (6.1), llegamos a que

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_n) &\leq \sum_{j=n}^{m} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=n}^{m} k^j d(x_1, x_0) \\ &\leq d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^{\infty} k^j = \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Como $k^n/(1-k) \to 0$, cuando $n \to \infty$, podemos elegir un n_0 de tal forma que $d(x_{m+1}, x_n) < \varepsilon$. □

[8]Otro recordatorio: un espacio métrico se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente. En un espacio métrico (E,d) una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ se dice de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, para todo $n, m > n_0$.

[9]Fijarse que hemos tomado x_0 un elemento cualquiera en E.

Nota 6. La demostración del teorema nos está dando una estimación del error que se comete al tomar x_n como una aproximación de x. En efecto, si en la desigualdad

$$d(x_{m+1}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

tomamos el límite cuando $m \to \infty$, dejando n fijo, llegamos a que

$$d(x, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

En realidad no es necesario que T sea contractiva, es suficiente que una potencia suya lo sea. Este es el contenido del siguiente resultado.

Corolario 9. *Sean (E, d) un espacio métrico completo y $T\colon E \longrightarrow E$ una aplicación tal que existe un $m > 0$ para el que T^m es contractiva, entonces existe un único punto fijo de T; es decir, existe un único $x \in E$ tal que $Tx = x$.*

Demostración. Basta tomar un elemento $a \in E$ y definimos la sucesión $x_0 = T^m a$ y $x_n = Tx_{n-1}$, para $n \geq 1$. Esta sucesión es convergente al único punto fijo de T, la prueba funciona igual que la del teorema. □

Nota 7. Observar que la única hipótesis que se hace para asegurar la existencia del punto fijo es la contractividad de una potencia de la aplicación T. Esta hipótesis no se puede rebajar. Por ejemplo, para la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$, definida sobre el espacio $(E, d) = ([1, \infty), |\cdot|)$, usando la notación

$$f^{\circ n}(x) = \underbrace{f \circ f \dots f \circ f}_{n\text{-veces}}(x),$$

se verifica que

$$|f^{\circ n}(x) - f^{\circ n}(y)| \leq |x - y|,$$

para cualquier $n \geq 1$. Luego no existen potencias de f contractivas. Además, f no posee puntos fijos, ya que la igualdad $x = f(x)$ no es posible.

6.3. Un paréntesis histórico: Stephan Banach y el *Café Escocés*

Llegados a este punto parece oportuno hacer una pausa: hemos probado un teorema de cierta relevancia y nos la merecemos. Sin embargo, no nos alejaremos demasiado de este resultado; más bien al contrario, vamos a acercarnos a la singular personalidad de su autor: Stephan Banach. La vida (y por supuesto su obra) de este matemático polaco y su contexto histórico, fuertemente marcado por la Segunda Guerra Mundial, merecen una explicación detallada. Para guiarnos en esta breve aventura démosle la palabra a alguien que lo hará mucho yo; en concreto, a Antonio Durán, catedrático de análisis matemático la Universidad de Sevilla. El texto que presentamos a continuación reproduce parte de

su artículo *Pasiones, piojos, dioses . . . y matemáticas*, aparecido en La Gaceta de la RSME (vol. **12.2** (2009), págs. 279–300) y es, en esencia, un extracto de su libro del mismo título, publicado por la editorial Destino.

Escribe A. Durán:

Banach y la tertulia del Café Escocés.

En la segunda década del siglo XX, Polonia vivió un verdadero florecimiento matemático, con dos focos principales: uno en Varsovia y otro en Lwów. Ese auge lo protagonizó un grupo de matemáticos excepcionales; nacieron a caballo entre los siglos XIX y XX, de manera que para 1910 la primera hornada habia alcanzado ya madurez matemática. La explosión creativa de ese grupo fue paralela, acaso no por casualidad, al entusiasmo patriótico que recorrió Polonia tras la recuperación de la independencia en 1918, justo después de la primera guerra mundial y tras casi siglo y medio de reparto territorial entre Prusia, Rusia y Austria. Ese florecimiento matemático no deja de ser sorprendente, porque no había sido precisamente una prioridad para las potencias ocupantes desarrollar el sistema educativo de las zonas ocupadas. De hecho, en la parte bajo dominio prusiano, la enseñanza universitaria era inexistente, y desastrosa en los otros niveles. En la zona rusa, la situación no era mucho mejor, aunque funcionaba en Varsovia una universidad que impartía enseñanzas en ruso; después de la revolución rusa de 1905, algo mejoró el escenario, permitiéndose el polaco en los niveles medios de la enseñanza. La cierta autonomía que gozaba la zona bajo dominio austriaco permitía el funcionamiento de dos universidades, una en Cracovia y otra en Lwów, aparte de una escuela politécnica en esta ultima ciudad. No es pues extraño que una buena parte de esa primera hornada de matematicos se hubieran formado en universidades de fuera de Polonia, francesas y alemanas sobre todo. Stefan Banach (1892–1945) y Alfred Tarski (1901–1983) fueron miembros destacados de la segunda hornada, formada ya en Polonia. Me voy a centrar aquí en Banach, lo que es tanto como decir en Lwów.

Banach nació en Cracovia. Su padre se llamó Stefan Greczek, aunque Banach prefirió usar el apellido materno, o al menos el que consta para ella en el certificado de nacimiento: «hijo de Katarzyna Banach». Su madre lo abandonó a los pocos días de nacer; nunca estuvo casada con el padre de Banach y poco se sabe de ella –nada, en realidad–: por más esfuerzos que hizo su hijo por saber, fue puro misterio. El padre se casó después dos veces y tuvo un descendiente de cada matrimonio; pero a Banach lo crió su abuela paterna en Ostrowsko, un pueblecito 80km al sur de Cracovia perdido en los Cárpatos.

Banach residió buena parte de su vida en Lwów, donde llegó como profesor en 1922; ya antes había vivido allí unos años –al comienzo de la decada 1910–1920–, cuando fue estudiante de ingeniería en la Politécnica. Tras incorporarse como profesor a la Universidad, Banach promovió una escuela matemática que fue fundamental en el desarrollo y expansión del analisis funcional.

Banach y sus colegas solían reunirse los sábados por la tarde en un aula de la Universidad –tal vez el día elegido para las reuniones suene hoy raro, pero en aquella época los sábados había clase en la universidad–. Lo de reunirse los matemáticos a discutir de sus cosas es algo habitual; lo que no lo es tanto es el tipo de reunión que hacían en Lwów, sobre todo porque la parte mas fructífera



Figura 6.1: El Café Escocés, donde la hermandad de Banach se reunía para discutir de matemáticas.

de ella tenía lugar, no en la Universidad, sino en algunos cafés de los alrededores, donde la discusión matemática solía prolongarse varias horas más.

Lwów debía de tener entonces unos 200000 habitantes y, según algunos cronistas locales, era una ciudad bonita como Praga. Contaba con un buen número de cafés, sobre todo en los alrededores de la Universidad. Dado el juego científico que dieron, alguien debería tomar buena nota de lo conveniente que es contar con una adecuada red de esos establecimientos en la cercanía de cualquier universidad... y exigir al profesorado que los frecuente.

Zygmunt Janiszewski, quizá el principal ideólogo del auge matemático que vivió Polonia a principios del siglo XX, escribió: «Es verdad que las matemáticas no requieren grandes laboratorios, ni otros servicios complejos ni caros. Si que requieren, sin embargo, una apropiada atmósfera y condiciones para mantener un contacto estrecho con los colaboradores». Banach y su gente encontraron esa «apropiada atmósfera» en el ambiente ruidoso, cálido y aromático de los cafés de Lwów. En el uso sistemático que de ellos hicieron como refugio científico se ve la impronta de Banach, porque pocas cosas hubo que le gustaran tanto a Banach como hacer matemáticas en un café. Dos de ellos le eran especialmente gratos, el Roma y el Szkocka; «szkocka» no es otra cosa que «escocés» en polaco. En cierto momento, Banach tuvo un desencuentro con los dueños del Café Roma, donde solía pasar buena parte de su tiempo –especialmente en los últimos días del mes antes de cobrar su sueldo–; parece ser que hubo quejas sobre cierto retraso en el pago de las consumiciones, así que buena parte del grupo se asentó entonces en el vecino Café Escocés. Era un local decorado al estilo vienés, con pequeños veladores de mármol blanco, un material excelente que nuestros matemáticos no pudieron resistirse a adornar cada tarde con una buena dosis de fórmulas y ecuaciones; escritas, eso sí, a lápiz.

La atmósfera de los cafés no suscitó precisamente discusiones relajadas, más bien estas tendían a ser largas, duras y correosas: «Recuerdo una sesión con Ma-

zur y Banach en el Café Escocés –escribió Stanisław Ulam, miembro distinguido de las tertulias, en sus memorias– que duró diecisiete horas sin interrupción, excepción hecha de las comidas». Y no exentas de cierto caos: «No era raro que tras un periodo de meditación estallaran a la vez varios conatos de conversación –contó Ulam–; alguien entonces garrapateaba unas cuantas notas sobre el mármol de la mesa mientras otro, en cambio, se reía con hilaridad. Luego podía seguir otro largo periodo de silencio en el que bebíamos café y nos observábamos con indolencia unos a otros. Nuestro extraño comportamiento mantenía en permanente estado de perplejidad a los clientes de las mesas cercanas».

Naturalmente no sólo hablaban de matemáticas en las tertulias. Jugaban también al ajedrez y, por lo general, se hacía bastante gasto: mucho café, grandes dosis de coñac, cantidades ingentes de cigarrillos, y, aunque la del Café Escocés no era precisamente *delicatessen*, algo de comida. Pero, a veces, bastaba una sola taza de café o de te para dar sabor a todo el tiempo que allí demoraban. «Ni que decir tiene que las discusiones matemáticas se enriquecían con charlas sobre otros asuntos –escribió Ulam–, científicos desde luego, pero también había cotilleos de la Universidad, de política, sobre el estado de las cosas en Polonia; por usar una de las expresiones favoritas de John von Neumann, allí se hablaba "del resto del universo". La sombra de lo que después acabó ocurriendo, la ascensión de Hitler en Alemania, las premoniciones de una guerra mundial, asomaban de tanto en tanto como un mal presagio». Von Neumann visitó en varias ocasiones Lwów y, naturalmente, participó en las discusiones de los cafés. Según contó Ulam, en una de esas ocasiones: «Banach y otros matemáticos emborracharon a von Neumann con vodka hasta el extremo de que tuvo que dejar la mesa para visitar los servicios; pero volvió y continuó con la discusión matemática sin haber perdido capacidad para razonar». Banach, como von Neumann, tuvo fama de buen bebedor; su hermanastra escribió: «Mi hermano bebía cantidades ingentes de café y alcohol, aunque tenía una increíble capacidad de aguante. Una vez participó en un congreso en Georgia. Allí tienen por tradición brindar durante la comida de celebración por la salud de los participantes: la norma es un brindis por participante, y hay que vaciar de un trago el correspondiente vaso del fuerte vodka georgiano. Banach sobrevivió a todos los participantes locales de la reunión, y se sostuvo sobre sus pies mientras los otros matemáticos desaparecían uno a uno bajo la mesa». Yo no estuve, evidentemente, en esa comida, pero he participado en Moscú en alguna comida parecida, y doy fe de que las cosas acaban sucediendo tal y como la hermanastra de Banach las cuenta en su historia.

Es muy importante para lo que después sigue que vayamos poniendo nombre a los contertulios matemáticos de los cafés de Lwów. Allí se daban cita catedráticos con solera, como Antoni Łomicki, director durante un tiempo del Instituto de Matemáticas de la Universidad, y del que Banach, recién llegado a Lwów, fue ayudante, Włodzimierz Stòżek, que fue Decano de la Facultad de Matemáticas, Hugo Steinhaus, el «descubridor de Banach», Stanisław Ruziewicz, o el propio Banach; pero también jóvenes que por aquella época empezaban sus andanzas matemáticas, como Herman Auerbach, muy ducho y aficionado al ajedrez, Feliks Barański, Mark Kac, o Stanisław Ulam; y también otros *in*

between, que dirían los ingleses: Stefan Kaczmarz, Stanisław Mazur, Władyslaw Orlicz, Juliusz Schauder, o Stanisław Saks.

Como es bien conocido, casi todos ellos han prestado su apellido a métodos, conceptos, teoremas y resultados. En el caso de Banach, y en menor medida en el de otros, su nombre se ha convertido en adjetivo frecuente en la inabarcable toponimia de las matemáticas.

Es sin duda muy jugosa la manera tan peculiar en que las discretas reuniones de Lwów acabaron trascendiendo el ámbito local hasta llegar a fecundar una parte no despreciable de las matemáticas hechas en el último cuarto del siglo XX. El portentoso objeto que permitió tal prodigio fue un modesto cuaderno; una simple libreta que se ha acabado convirtiendo en uno de los más célebres y celebrados documentos matemáticos del siglo XX: es el Cuaderno Escocés. Hay varias versiones para explicar el nacimiento del Cuaderno Escocés. Una dice que dada la intensidad y valor de las discusiones mateméticas que tenían lugar en el café, y el tiempo que a ellas dedicaban, Banach propuso anotar en un cuaderno las cuestiones y problemas que surgían. Hasta entonces garrapateaban notas en el mármol de las mesas; notas que inevitablemente se llevaba el trapo húmedo que los camareros usaban para limpiar, quedando tan diluidas en el olvido como lágrimas en la lluvia. Pero hay otra versión, más prosaica pero quizá más probable, que dice que el dueño del café, harto de ver el mármol de sus mesas permanentemente sucio de garabatos, se quejó a los tertulianos. En vista del poco caso que le hicieron, fue con la queja a la mujer de Banach que, más responsable, acabó comprándoles, por dos złotys y medio, un cuaderno al marido y sus amigos para que apuntaran allí sus cosas.

Ya fuera por un motivo u otro, una tarde Banach se presentó en el café con un cuaderno sólido y bien encuadernado donde, pocas horas después, anotó de su puño y letra un primer problema que él mismo propuso. Era el 17 de julio de 1935 y el Cuaderno Escocés recogía el primero de los 197 problemas que lo componen. En esos problemas se aprecía la influencia que Hausdorff llegó a ejercer sobre la Escuela de Lwów. Se da la circunstancia de que Hausdorff no visitó Lwow –no tenía por costumbre salir de Alemania, ni a congresos, ni a visitas científicas– pero, a partir de 1933, publicó sus teoremas en las dos revistas de matemáticas que los polacos habían creado: *Fundamenta Mathematicae*, creada en Varsovia en 1920, y *Studia Mathematica*, creada en Lwów por Banach y Steinhaus en 1929.

Poco después de que el cuaderno recibiera su bautismo de fuego, Stanisław Ulam viajó a los Estados Unidos requerido por John von Neumann. Como consecuencia de esa visita, Ulam se estableció allí, aunque durante los años 1936 a 1939 volvió cada verano a Lwów, y siguió, durante esos meses, frecuentando la tertulia de Banach. Buena parte de la historia del Cuaderno Escocés la sabemos por Ulam. A él le envió Steinhaus una trascripción del Cuaderno desde Polonia en 1956; Ulam, que trabajaba por entonces en el Laboratorio Nuclear de Los Alamos, lo tradujo al inglés e hizo imprimir algunos centenares de copias pagadas de su propio bolsillo: «Los Alamos –explicó Ulam– es un laboratorio del Gobierno, y uno no puede usar los impuestos de los contribuyentes para propósitos frívolos». De esa edición, llevó ejemplares al Congreso Internacional

de Matemáticos que se celebró en Edimburgo en 1958 –los escoceses quedaron un tanto defraudados al saber que el nombre del cuaderno no hacia referencia a Escocia sino a un café de Lwów–. A partir de ahí, el Cuaderno Escocés empezó a ejercer su influencia sobre la comunidad matemática. Desde Los Alamos se enviaron ejemplares de esa impresión, y de otra posterior hecha en 1977, a quien la solicitó. Así siguió distribuyéndose privadamente por universidades de aquí y de allá, hasta que una más cuidada edición, que incluía artículos de algunos protagonistas de la historia, estuvo comercialmente disponible tras el congreso dedicado en Texas en mayo de 1979 a los problemas matemáticos del Cuaderno Escocés. Problemas que han alimentado los desvelos matemáticos de una parte del gremio en el último cuarto del siglo XX; y todavía algunos pocos lo siguen haciendo, pues su solución sigue siendo desconocida.

Continúa A. Durán unas páginas más adelante:

Hay algo muy tierno y conmovedor en la pequeña historia del Cuaderno Escocés. Desde sus instrucciones de uso: «El Cuaderno lo custodiaba en el Café Escocés un camarero que conocía bien el ritual –escribió Ulam en sus memorias–. Cuando Banach o Mazur llegaban, era suficiente con decirle "por favor, el cuaderno", para que se lo llevara junto con los cafés»; hasta los premios ofrecidos por algunos proponentes a quien fuera capaz de resolver los problemas que planteaban. Los hay decididamente modestos: «Una botella de vino», o «dos», «una cerveza pequeña», o «dos» o «cinco», aunque otros son más sofisticados: el problema 162, propuesto por Steinhaus, ofrece a quien lo resuelva «una cena en el George»; el George era un hotel de Lwów donde alguna que otra vez los estudiantes de la Universidad celebraban bailes –solían invitar a Banach, a quien apreciaban mucho y que era, además, un excelente bailarín–. El problema numero 153 del Cuaderno fue propuesto por Stanisław Mazur el 6 de noviembre de 1936 y ofrecía como premio «una oca viva»; treinta y seis años después, esto es, en 1972, Per Enflö resolvió el problema y, naturalmente, recibió de Mazur una oca viva coquetamente empaquetada en una cesta.

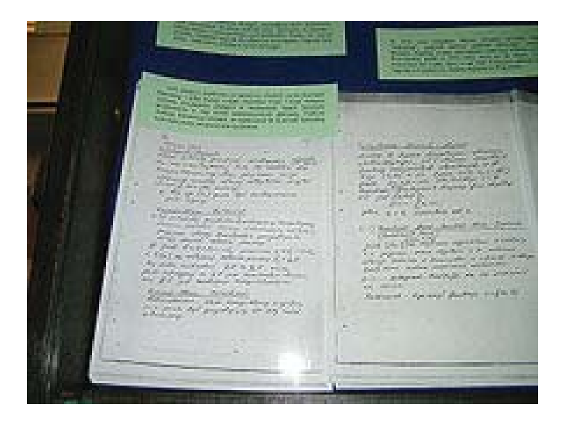


Figura 6.2: Una imagen del Cuaderno Escocés en la actualidad.



Figura 6.3: Enflö recibiendo su premio de manos de Mazur (Varsovia, 1973). Comenta Joe Diestel que la madre de Przemysław Wojtaszczyk, a la sazón un joven matemático polaco, degolló después la oca y preparó con ella una soberbia comida.

Algún problema hay que incluye toda una variedad de premios y rigurosas instrucciones para su concesión: «Por el cálculo de la frecuencia: 100 gramos de caviar. Por la prueba de que la frecuencia existe: una cerveza pequeña. Por un contraejemplo: una tacita de café». Hay otros que ilustran la participación puntual de matemáticos extranjeros en las tertulias del Cafe Escocés: «una *foundue* en Ginebra», o «una comida en el Dorothy de Cambridge». Tal vez algunos de los premios admitan interpretaciones sutiles e incluso equívocas: ahí está esa «botella de whiskey de medida positiva» ofrecida por John von Neumann el 4 de julio de 1937 –que acaso desvele una de las aficiones del gran matemático húngaro–, o ese «un kilo de *bacon*» ofrecido por uno de los miembros judíos de la tertulia, Saks, el 8 de febrero de 1940 –que quiza delate cierta penuria de alimentos en los inicios de la guerra–; otros, en cambio, tienen una inequívoca interpretación, aunque no tanto por lo que ofrecían –«una botella de vino», «una botella de champán»– sino por quienes lo ofrecían: matemáticos rusos, que nunca faltaron en la tertulia desde finales de 1939 hasta mayo de 1941, meses estos en que Lwów estuvo ocupada por los soviéticos tras la partición de Polonia acordada por Hitler y Stalin al inicio de la Segunda Guerra Mundial.

En el verano de 1939 Stanisław Ulam participó por ultima vez en la tertulia del Café Escocés; el mismo reconoce que pensaba, un poco ingenuamente, que no habría guerra, aunque otros contertulios eran más realistas. Uno de ellos era

Stanisław Mazur. Convencido de la inminencia de una gran guerra y consciente de la importancia matemática que a lo largo de los años había adquirido el cuaderno, Mazur había diseñado un plan para protegerlo; un plan cuya candidez, al compararla con los tiempos salvajes que se avecinaban, produce hasta dolor: «Mazur me dijo que nuestros resultados no debían perderse –escribió Ulam años más tarde–; me explicó que nada más empezara la guerra, escondería el cuaderno en una pequeña caja que enterraría en algún sitio donde después se la pudiera encontrar. Concretamente cerca del poste de una de las porterías que había en un campo de fútbol cercano». No sabemos si Mazur puso en práctica su plan, pero el caso es que el Cuaderno Escocés sobrevivió a la guerra. Tras la muerte de Banach en 1945, su hijo lo encontró –todavía hoy sigue en su poder– y lo envió a Steinhaus que lo copió a mano y, años después, se lo remitió a Los Alamos a Ulam, con las consecuencia que ya comenté.

Tras el pacto Ribbentrop-Molotov de agosto de 1939 y el consiguiente reparto de Polonia, las cosas empezaron a cambiar en Lwów. Tras ser ocupada por los rusos, el prestigio de Banach entre los matemáticos soviéticos preservó la tertulia matemática del Café Escocés; la Universidad cambió de nombre y se trajo profesorado ucraniano de Kiev y Járkov, pero Banach fue nombrado Decano de la Facultad de Físicas y Matemáticas, así como Director del Departamento de Análisis Matemático y, más adelante, Concejal del Ayuntamiento. Banach viajó varias veces a Moscú para encontrarse allí con matemáticos rusos de la talla de Alexandrov o Sobolev que, a su vez, visitaron Lwów, participaron en la tertulia del café y dejaron su impronta en forma de varios problemas recogidos en el Cuaderno Escocés.

El último problema contenido en el Cuaderno, fechado el 31 de mayo de 1941, fue propuesto por Steinhaus; es difícil saber a que se refiere, pero cabe aventurar lo siguiente. No era extraño por aquella época que un fumador llevara dos cajas de cerillas consigo: el problema posiblemente proponga estudiar la distribución estadística del número de cerillas que quedan en una caja justo cuando se coge el último fósforo de la otra. Aunque acaso lo más interesante de este problema sea, precisamente, la forma críptica y apresurada en que está redactado, porque es el signo inequívoco de que la tragedia se había empezado ya a cebar en los protagonistas de esta pequeña historia.

Del grupo que frecuentó las tertulias matemáticas de los cafés de Lwów, algunos han tenido larga y fructífera vida. Como Hugo Steinhaus (1887–1972), Stanisław Ulam (1909–1984), Mark Kac (1914–1984), Stanisław Mazur (1905–1981), o Władyslaw Orlicz (1903–1990). Otros, no tanta.

La revocación del pacto Ribbentrop-Molotov, y la consiguiente invasión alemana de la URSS, cogió a Banach en Kiev; a pesar de las previsibles represalias que le esperaban en Lwów por su relación amistosa con los soviéticos, Banach pudo coger el último tren y regresó a su ciudad: allí estaba su mujer, su hijo, así como su padre y un hermanastro, que se habían refugiado en Lwów antes de que Cracovia, donde vivían, cayera en manos de los ejércitos nazis. Banach fue arrestado por la Gestapo pero puesto en libertad algunas semanas después. Banach sobrevivió por unos meses a la guerra. Murió de cáncer de pulmón el 31 de agosto de 1945; de no haber muerto, Banach se habría tenido que mudar –a





Figura 6.4: Casi media vida separa estas dos fotos de Banach, aunque su mirada tiene en ambas la misma intensidad que tantos de sus amigos elogiaron.

Cracovia, donde le habian prometido una cátedra en la Universidad–, porque Lwów, convertida en L'viv, fue anexionada otra vez a Ucrania, a la Unión Soviética, lo que provocó un éxodo forzado de la población polaca: parece, aunque esto acaso sea leyenda, que el entierro de Banach en Lwów lo convirtieron los polacos que todavía residían allí en un acto patriótico. Sergéi Sobolev se encontró con Banach unos meses antes de su muerte: «A pesar de los estragos que sufrió bajo la ocupación nazi, a pesar de la grave enfermedad que socavaba sus fuerzas –escribió–, en los ojos de Banach brillaba la vida todavía». Los ojos de Banach. Casi todos los que han escrito sobre Banach han llamado la atención sobre sus ojos; sobre su indefinible color azul; sobre la intensidad con que sabían mirar.

Si le preguntáramos a un hipotético viandante si alguna vez tuvo piojos, seguro que responderia que sí. ¿Quién no los ha tenido alguna vez? Aunque quizá no sean muchos los que sepan que los piojos son parásitos exclusivos del hombre. En 1909, Charles Nicolle, del Instituto Pasteur de Paris, descubrió que los piojos trasmiten el agente patógeno del tifus. La alta mortalidad de una de sus variantes, el tabardillo o tifus exantemático, ha sido uno de los azotes de la humanidad. Favorecido por la piojera que la falta de aseo provoca en los soldados, el tabardillo se ha cebado en numerosas ocasiones con los ejércitos, a los que ha diezmado a conciencia, en muchos casos más y mejor que la artillería enemiga. Famosas son las hecatombes sufridas por su causa; se cuenta que la gran peste que diezmó la Atenas de Pericles, y acabó con su propia vida, fue de tabardillo, lo mismo que la epidemia que coincidió con la conquista de Granada, o en la retirada de los ejércitos napoleónicos de Rusia, o en las dos guerras mundiales del siglo XX.

Rudolf Weigl (1883–1957) nació en Austria. Su padre murió, poco tiempo después de su nacimiento, en un accidente mientras probaba un nuevo modelo de bicicleta. La viuda, con tres hijos pequeños, conoció en Viena a un profesor

polaco de instituto con quien se casó no mucho después de haber enviudado. A los pocos años, la familia acabó instalándose en Lwów. Andando el tiempo Rudolf Weigl se convirtió en profesor de biología en la Universidad y tuvo a su cargo un Laboratorio. Allí logró desarrollar, un poco antes de la Segunda Guerra Mundial, una vacuna eficaz contra el tifus. El descubrimiento fue de la mayor importancia epidemiológica, y fueron vacunadas varios millones de personas durante la ocupación alemana de Polonia; después también se llegó a usar en China, Etiopía y otros países. Weigl aguantó en Lwów la primera ocupación soviética y la posterior alemana, pero tuvo que exiliarse tras la definitiva ocupación soviética de 1944 y la consiguiente limpieza étnica; estuvo primero en Kroscienko, después en Cracovia y finalmente en Poznan. Murió en Zakopane en 1957.

La importancia de la investigación sobre el tifus, que llevaba a cabo Weigl en Lwów, le permitió algunos privilegios durante la guerra. Primero bajo la ocupación soviética al comienzo de la contienda. Nikita Khrushev, a la sazón primer secretario del Partido Comunista de Ucrania y después del Partido Comunista de la Unión Soviética (1953–1964), ofreció a Weigl el título de Académico y la dirección de un instituto bacteriológico en Moscú para el desarrollo de su vacuna. Weigl tuvo que ser una persona muy persuasiva porque, aún rechazando la oferta, no sólo evitó las previsibles represalias sino que consiguió apoyo soviético para ampliar su instituto en Lwów y, todavía más, logró que sus empleados quedaran fuera de las deportaciones a Siberia. Algo parecido ocurrió bajo la ocupación alemana. Según contó Wacław Szybalski, hijo de un estrecho colaborador de Weigl que emigró a los Estados Unidos y acabo siendo oncólogo de la Universidad de Wisconsin: «Los nazis dieron permiso a Weigl para tener una radio [...] Esto fue una bendición, puesto que ser descubierto con una radio se penalizaba con la muerte. Weigl tuvo mucho coraje y cooperó con la resistencia polaca durante la ocupación nazi. Varios cargamentos de su vacuna acabaron llegando ilegalmente al gueto de Varsovia (algunos transportados por mi padre y yo) y a otros guetos judíos en grandes ciudades, donde el tifus habia alcanzado proporciones de epidemia». Władysław Szpilman, cuya historia de supervivencia en el gueto de Varsovia convirtió Roman Polansky en obra de arte en la película *El pianista*, contó que el doctor Weigl era en el gueto tan fámoso como Hitler, aunque por razones bien distintas.

Como paso previo a la preparación de la vacuna, el profesor Weigl necesitaba criar una ingente cantidad de piojos. Como se dijo antes, los piojos sólo sobreviven si se alimentan con sangre humana. Desde el otoño de 1941 y hasta el final de la ocupación alemana en julio de 1944, Banach fue uno de los privilegiados que se prestó a alimentar piojos con su propia sangre en el instituto bacteriológico de Weigl. Esto le acabó provocando una degradación física considerable. La mujer de un colega lo describe en esos años como «un hombre exhausto, hambriento y sombrío, aunque antes de la guerra habia sido de complexión muy robusta».

Y cuando he escrito «privilegiados», he escrito bien, pues en esos tiempos de locura, conseguir un puesto de amamantador de piojos fue un privilegio: «Durante la ocupación nazi –escribió Szybalski–, estar empleado en el instituto de Weigl concedía cierto grado de protección contra los arrestos arbitrarios

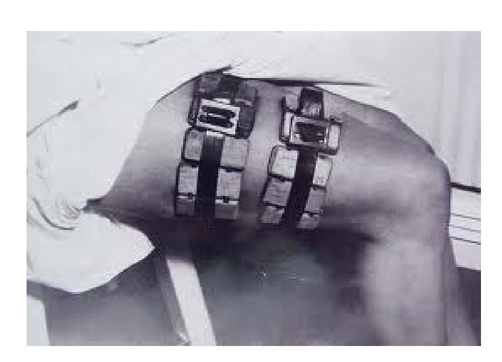


Figura 6.5: El sistema ideado por Weigl para alimentar piojos.

y las deportaciones a los campos de concentración nazis. La Gestapo prefería evitar el trato con personas que podían accidentalmente contagiarles el tifus: era bien sabido que los que trabajábamos en el instituto podíamos tener piojos infectados. Más aún, los empleados llevábamos una identificación bien visible emitida por la Oficina del Comandante en Jefe del Ejército Alemán. Este "Ausweiss" fue otra de las invenciones de Weigl que nos procuraba seguridad [...] De esta forma, Weigl ayudó a muchos de los profesores de la Universidad, sin trabajo entonces, empleándolos como alimentadores de piojos. Tal empleo conllevaba raciones especiales de comida, y disminuía la posibilidad de un arresto, deportación y/o muerte durante la ocupación nazi».

Entre esos privilegiados se encontraba buena parte de la intelectualidad de Lwów, lo que incluía a los profesores de la Universidad –Banach, Orlicz y otros matemáticos entre ellos–. Los nazis se propusieron reducir Polonia a una nación de esclavos, de manera que prohibieron la enseñanza universitaria en el país, sólo dejaron en servicio algunas instalaciones tecnológicas para uso propio. Las universidades polacas, sin embargo, lograron cierto grado de funcionamiento clandestino. Los alimentadores de piojos del instituto del profesor Weigl facilitaron el funcionamiento encubierto de la Universidad de Lwów: «Puesto que la alimentación de los piojos ocupaba a los alimentadores sólo durante una hora al día –contó Szybalski–, [...] los alimentadores tenían tiempo de sobra para organizar cursos universitarios clandestinos y realizar otras actividades educativas y patrióticas».

Para la crianza y alimentación de los piojos, Weigl habia inventado un ingenioso sistema. Consistía en pequenas cajas de madera –con unas dimensiones de $4 \times 7 \times 1$cm– selladas con parafina para evitar la fuga de los insectos; una de sus caras, protegida por una puertecita, era de una malla finísima que sólo permitía a los piojos asomar la cabeza para alimentarse. En estas cajas se depositaban entre 400 y 800 larvas, junto con unos hilos de lana para que depositaran los huevos cuando crecieran. Entre 7 y 11 de estas cajas se colocaban, sujetas con una banda elástica y con la puertecita abierta, sobre las piernas de los alimentadores; segun Szybalski: «Los hombres se solían colocar las cajitas en sus pantorrillas, aunque las mujeres preferían colocárselas en los muslos, para ocultar después

las marcas rojizas bajo la falda. Después de una sesion alimenticia de 30 a 45 minutos, no sólo los intestinos del piojo sino su cuerpo entero parecía un balón, puesto que cada insecto ingiere una cantidad de sangre igual a su peso».

Escribí al comienzo de este artículo que en el corazón de un matemático late un conflicto permanente entre la prudencia y la pasión; una pasión que es muy similar a la fiebre creadora que se da en los artistas, sean pintores, compositores o poetas. Hay mucha gente que cree que las matemáticas son algo tan frío que no pueden generar ningún tipo de pasión; son, de hecho, abrumadora mayoría los que piensan que las matemáticas son la prudencia contra la pasión. No es cierto: ¿qué, si no la más arrebatadora de las pasiones, puede hacer olvidar a unas personas que tienen adheridos a su pantorrilla unos pocos de miles de piojos chupándoles la sangre?: «Yo tenía que supervisar una unidad de crianza cuyos alimentadores eran casi todos matemáticos de la célebre Escuela de Lwów, incluyendo al mundialmente fámoso profesor Stefan Banach –escribio Szybalski– [...] Era intelectualmente muy estimulante, aunque también algo surrealista, escucharlos discutir acerca de las fronteras de las matemáticas, de topología y de teoría de números, mientras estaban alimentando piojos. Más todavía, tenía que ser muy escrupuloso con ellos en el control del tiempo, pues en el fervor de sus discusiones seguían con las cajitas adheridas a las piernas durante más de 45 minutos, sobrealimentando a los piojos. Eso tenía terribles consecuencias, porque nuestros piojos de laboratorio habían perdido su instinto natural de dejar de comer, y continuaban chupándoles la sangre hasta que la ingente cantidad que almacenaban en sus intestinos los hacía reventar».

La mayor parte de los participantes en las tertulias matemáticas de Lwów no tuvo, sin embargo, larga vida, y ni tan siquiera pudieron disfrutar, como Banach, del privilegio de alimentar piojos en el instituto bacteriológico del profesor Weigl. La mayor parte fueron víctimas de esa irracional eficacia que tenemos los seres humanos para destrozarnos los unos a los otros.

6.4. El teorema de existencia y unicidad de Picard

Para obtener resultados generales de existencia y unicidad de solución para un problema de valores iniciales aplicando el teorema del punto fijo de Banach debemos proceder a reescribirlo en términos de aplicaciones contractivas. Veamos en primer lugar cómo transformar la búsqueda de solución de un problema de valores iniciales en la obtención de un punto fijo para una aplicación definida en términos de integrales.

Sea el problema de valores iniciales

$$(P)\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

con $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua y donde $(t_0, x_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Encontrar una solución de (P) consiste en determinar una función $\phi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $t_0 \in I$

verificando que

a) $\phi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$,[10]

b) $(t, \phi(t)) \in \Omega$, para $t \in I$,

c) $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$, para $t \in I$, y

d) $\phi(t_0) = x_0$.

Lema 10. *Una función $\phi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $t_0 \in I$, es solución de (P) si y sólo si*

A) $\phi \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$,

B) $(t, \phi(t)) \in \Omega$, para $t \in I$, y

C) $T_f\phi(t) = \phi(t)$, para $t \in I$, donde

$$T_f\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds, \quad t \in I.$$

Demostración. Que a), b), c) y d) implican A), B) y C) es claro sin más que integrar en el intervalo $[t_0, t]$[11] en c) y usar d). En efecto,

$$\int_{t_0}^{t} \phi'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds \Longrightarrow \phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds$$
$$\Longrightarrow \phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds.$$

La implicación en el otro sentido también es clara. La función $f(t, \phi(t))$ pertenece a $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ y, por tanto, de C) deducimos que ϕ es derivable en I y su derivada es (basta derivar en C)) $f(t, \phi(t))$. Esto nos permite asegurar que se satisfacen a) y c). La condición d) se sigue inmediatamente de C) tomando $t = t_0$. □

Con este planteamiento del problema debemos buscar condiciones sobre la función f que nos permitan asegurar que el operador T_f es contractivo con la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$. Notar que en los casos en los que podamos obtener la contractividad, el punto fijo que obtengamos (que será la única solución de (P) ya que el punto fijo de T_f será único) vendrá dado como el límite, en la norma $\|\cdot\|_\infty$, de una sucesión de funciones. La convergencia de una sucesión de funciones en esta norma se denomina *convergencia uniforme*. Es decir, lo que vamos a encontrar es una sucesión de funciones convergiendo uniformemente a la única solución de (P).

Supongamos que el dominio de f es $\Omega = I_h \times B_r(x_0)$, donde $I_h = [t_0 - h, t_0 + h]$ y $B_r(x_0)$ denota la bola cerrada n-dimensional con una cualquiera de las normas

[10] En realidad, bastaría pedir que ϕ tuviese derivada (se entiende que componente a componente) para todo $t \in I$. Sin embargo, como esta derivada va a estar igualada a f que es continua podemos asegurar la continuidad de la derivada y que, por tanto, $\phi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

[11] Implícitamente estamos tomando $t > t_0$. Si considerasemos $t < t_0$ el análisis sería igual.

de $\mathbb{R}^n$. En esta situación, teniendo en cuenta que se debe verificar B), la función ϕ estará definida de $I_\delta = [t_0-\delta, t_0+\delta]$, con $\delta \leq h$, en $B_r(x_0)$. Así, el operador T_f estará definido sobre el espacio $C^0(I_\delta, B_r(x_0))$ y lo primero que deberemos hacer para aplicar el teorema del punto fijo es comprobar que $(C^0(I_\delta, B_r(x_0)), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio métrico completo.

En general podemos probar que $(C^0([a,b], U), \|\cdot\|_\infty)$, con U un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, es un espacio métrico completo. Para esto bastará verificar que toda sucesión de Cauchy es convergente. Sea $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de Cauchy en el espacio $(C^0([a,b], U), \|\cdot\|_\infty)$. En este caso, dado $\varepsilon > 0$, existirá un $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $\|\phi_n - \phi_m\|_\infty < \varepsilon$, para todo $n, m > n_0$; o, equivalentemente,

$$|\phi_n(x) - \phi_m(x)| < \varepsilon, \quad n, m > n_0 \text{ y } x \in [a,b]. \tag{6.2}$$

En consecuencia, para cada $x \in [a,b]$ fijado, la sucesión $\{\phi_n(x)\}_{n\geq 0}$ es de Cauchy en U y, por ser U cerrado, es convergente en U. Así pues, tiene sentido definir la función $\phi\colon [a,b] \longrightarrow U$ como

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x),$$

para cada $x \in [a,b]$. Además, tomando el límite cuando $m \to \infty$ en (6.2), obtenemos que

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon, \quad n > n_0 \text{ y } x \in [a,b], \tag{6.3}$$

de donde deducimos inmediatamente que si $\phi \in C^0([a,b], U)$ entonces $\phi_n \to \phi$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$; es decir, uniformemente.

Para ver que $\phi \in C^0([a,b], U)$ haremos uso de que las funciones ϕ_n son uniformemente continuas.[12] Dado $\varepsilon > 0$ consideramos un $n > n_0$, donde n_0 satisface (6.3). Puesto que ϕ_n es uniformemente continua existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que para cada par $x, y \in [a,b]$ satisfaciendo $|x-y| < \delta$, se verifica que

$$|\phi_n(x) - \phi_n(y)| < \varepsilon. \tag{6.4}$$

De este modo, usando que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq |\phi(x) - \phi_n(x)| + |\phi_n(x) - \phi_n(y)| + |\phi_n(y) - \phi(y)|,$$

de (6.3) y (6.4) concluimos que dado $\varepsilon > 0$ existe un δ tal que para todo $x, y \in [a,b]$, con $|x-y| < \delta$, se cumple que

$$|\phi(x) - \phi(y)| < 3\varepsilon$$

y, por consiguiente, ϕ es uniformemente continua en $[a,b]$.

Ahora que ya sabemos que el espacio sobre el que vamos a definir el operador T_f va a estar en las condiciones apropiadas para aplicarle el teorema del punto fijo, debemos introducir la condición que nos va a permitir obtener la contractividad.

[12] Las funciones $\phi_n \in C^0([a,b], U)$, por tanto, son funciones continuas definidas sobre un compacto y esto implica que son uniformemente continuas.

Definición 5. Sea

$$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$$
$$(t,x)\longmapsto f(t,x)$$

con $(t,x)\in\Omega\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.[13] Diremos que f es una función lipschitziana en la segunda variable, si para cada t fijo tal que $(t,x_1),(t,x_2)\in\Omega$ se verifica que

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leq L|x_1-x_2|. \tag{6.5}$$

En la definición $|\cdot|$ denota cualquiera de las posibles normas sobre $\mathbb{R}^n$. La constante L que aparece en (6.5) se denomina constante de Lipschitz respecto de la variable x para f en Ω. La siguiente proposición muestra dos propiedades de interés de las funciones lipschitzianas.

Proposición 11. *Sea $f\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$, con $\Omega\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.*

a) Si f es una función lipschitziana en la segunda variable, entonces f es uniformemente continua respecto de x en Ω. Es decir, dado $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que si los puntos $(t,x_1),(t,x_2)\in\Omega$ verifican que $|x_1-x_2|<\delta$, entonces $|f(t,x_1)-f(t,x_2)|<\varepsilon$.

b) Supongamos además que Ω es convexo y que las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, con $i,j=1,\dots,n$, existen y son continuas en Ω, entonces

$$f \text{ es lipschitziana en la segunda variable en } \Omega$$
$$\iff \sup\left\{\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| : (t,x)\in\Omega\right\}<\infty \quad i,j=1,\dots,n.$$

Demostración. La demostración de a) es trivial. Probemos la parte b). Veamos, en primer lugar, que si f es lipschitziana en la segunda variable en Ω entonces la derivadas parciales de f son acotadas. Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que existen $i,j\in\{1,\dots,n\}$ tales que

$$\sup\left\{\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| : (t,x)\in\Omega\right\}=\infty.$$

En tal caso, para todo entero $m\geq 1$ existe un punto $(\bar{t}_m,\overline{x}_m)\in\Omega$ tal que

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{t}_m,\overline{x}_m)\right|\geq 2m,$$

con lo que, teniendo en cuenta la definición de derivada parcial y denotando por e_j el vector que tiene todos sus componentes nulas excepto la j-ésima que es 1, obtenemos que para cada $m\geq 1$ existe un $h_m>0$ tal que

$$\left|\frac{f_i(\bar{t}_m,\overline{x}_m+h_m e_j)-f_i(\bar{t}_m,\overline{x}_m)}{h_m}\right|\geq m,$$

[13] Tácitamente estamos asumiendo que $t\in\mathbb{R}$ y $x\in\mathbb{R}^n$.

o, equivalentemente,

$$|f_i(\bar{t}_m, \overline{x}_m + h_m e_j) - f_i(\bar{t}_m, \overline{x}_m)| > m h_m = m|(\overline{x}_m + h_m e_j) - \overline{x}_m|$$

con lo que f no es lipschitziana respecto a la segunda variable en Ω.

Para probar la otra implicación debemos hacer uso del teorema del valor medio. Dados $(t, x_1), (t, x_2) \in \Omega$ existe $(t, \overline{x})$, un punto del segmento uniendo los puntos (t, x_1) y (t, x_2) (que está contenido en Ω por ser convexo), tal que para cada $i = 1, \ldots, n$, se verifica que

$$f_i(t, x_1) - f_i(t, x_2) = \langle \nabla_x f_i(t, \overline{x}), x_1 - x_2 \rangle$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar habitual y

$$\nabla_x f_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right).$$

Tomando

$$M = \max_{1 \le i,j \le n} \sup \left\{ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| : (t, x) \in \Omega \right\}$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy,[14] llegamos a que

$$|f_i(t, x_1) - f_i(t, x_2)| \le M\sqrt{n} \|x_1 - x_2\|_2$$

y de esta forma

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_2 \le Mn \|x_1 - x_2\|_2;$$

es decir, f es lipschitziana respecto a la segunda variable en Ω[15] con constante Mn. □

Nota 8. Si una función f es lipschitziana con respecto a la segunda variable en un dominio Ω no implica que la función sea continua en todo Ω. La función

$$f(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \ge 0, \\ x, & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

es lipschitziana con respecto a la segunda variable en $\mathbb{R}^2$ pero no es continua en los puntos de la forma $(0, x)$

Ejemplo 29. a) La función $f(t, x) = \frac{|x|}{1+t^2}$ es lipschitziana respecto a la segunda variable en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

[14] Recordad: $\langle u, v \rangle \le \|u\|_2 \|v\|_2$.

[15] Hemos probado la condición de Lipschitz con la norma $\|\cdot\|_2$, pero, como en otras ocasiones, podríamos haber optado por otra norma.

b) La función

$$\begin{aligned} f(t,x) &= f(t,x_1,\dots,x_n) \\ &= \left(\frac{x_1}{1+t^2+x_1^2+\cdots+x_n^2},\dots,\frac{x_n}{1+t^2+x_1^2+\cdots+x_n^2}\right) \end{aligned}$$

es lipschitziana respecto a x en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

c) La función

$$f(t,x) = xt_+, \quad \text{donde } t_+ = \max\{t,0\},$$

es lipschitziana respecto a la segunda variable en cualquier dominio $\Omega = (-\infty,a)\times\mathbb{R}$, con $a < +\infty$.

d) La función $f(t,x) = \sqrt{|x|}$ no es lipschitziana en ningún dominio que contenga puntos de la forma $(t,0)$.

$\triangleleft$

Ahora ya estamos en disposición de enunciar y probar el siguiente

Teorema 12 (Teorema de existencia y unicidad de solución local o Teorema de Picard)**.** *Sea $\Omega = I_h \times B_r(x_0)$ y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y lipschitziana en la segunda variable en Ω con constante L. Entonces existe una única solución, ϕ, del problema de valores iniciales*

$$(P)\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida sobre I_δ, $\phi\colon I_\delta \longrightarrow B_r(x_0)$, donde

$$\delta = \min\{h, r/M\}, \ \text{con } M = \max\{|f(t,x)|\colon (t,x)\in\Omega\}.$$

Demostración. Definimos el espacio métrico $(C^0(I_\delta, B_r(x_0)), \|\cdot\|_\infty)$, con δ dado como en el enunciado del teorema y entendiendo $\|g\|_\infty = \sup\{|g|\colon t \in I_\delta\}$. Como ya hemos visto este espacio es completo. Haciendo uso del planteamiento integral del Lema 10 la solución única de (P) vendrá dada, si es que existe, como el único punto fijo del operador $T_f\colon C^0(I_\delta, B_r(x_0)) \longrightarrow C^0(I_\delta, B_r(x_0))$ definido por

$$T_f\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds, \quad \text{con } t\in I_\delta \text{ y } \phi\in C^0(I_\delta, B_r(x_0)).$$

Para poder aplicar el teorema del punto fijo de Banach debemos probar dos hechos:

a) Que, efectivamente, el operador está bien definido; es decir,

$$T_f\phi \in C^0(I_\delta, B_r(x_0)), \quad \text{para cada } \phi\in C^0(I_\delta, B_r(x_0)).$$

b) Que existe una potencia de T_f que es contractiva.

Una vez que probemos a) y b) tendremos la existencia de una única solución $\phi \in C^0(I_\delta, B_r(x_0))$ de (P).

Prueba de a): Si $|\cdot|$ denota la norma asociada a la bola $B_r(x_0)$, la demostración se seguirá probando que $|T_f\phi(t) - x_0| \leq r$ para cada $\phi \in C^0(I_\delta, B_r(x_0))$. Pero esto es claro ya que

$$|T_f\phi(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds\right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s,\phi(s))|\,ds = M(t-t_0) \leq M\delta \leq r.$$

Prueba de b): En primer lugar veamos, mediante un proceso de inducción, que para $\phi, \psi \in C^0(I_\delta, B_r(x_0))$,

$$|T_f^m\phi(t) - T_f^m\psi(t)| \leq \frac{L^m(t-t_0)^m}{m!}\|\phi-\psi\|_\infty. \tag{6.6}$$

Para $m = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|T_f\phi(t) - T_f\psi(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} (f(s,\phi(s)) - f(s,\psi(s)))\,ds\right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,\phi(s)) - f(s,\psi(s))|\,ds \leq L\int_{t_0}^{t} |\phi(s)-\psi(s)|\,ds \\
&\leq L\|\phi-\psi\|_\infty \int_{t_0}^{t} ds = L(t-t_0)\|\phi-\psi\|_\infty.
\end{aligned}$$

Supongamos que (6.6) se cumple para un cierto m y probemoslo para $m+1$. En efecto,

$$\begin{aligned}
|T_f^{m+1}\phi(t) - T_f^{m+1}\psi(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} (f(s,T_f^m\phi(s)) - f(s,T_f^m\psi(s)))\,ds\right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \left|f(s,T_f^m\phi(s)) - f(s,T_f^m\psi(s))\right|\,ds \\
&\leq L\int_{t_0}^{t} \left|T_f^m\phi(s) - T_f^m\psi(s)\right|\,ds \\
&\leq \frac{L^{m+1}\|\phi-\psi\|_\infty}{m!}\int_{t_0}^{t} (s-t_0)^m\,ds \\
&= \frac{L^{m+1}(t-t_0)^{m+1}\|\phi-\psi\|_\infty}{(m+1)!}.
\end{aligned}$$

Ahora de (6.6) deducimos que

$$\|T_f^m\phi - T_f^m\psi\|_\infty \leq \frac{L^m}{m!}\|\phi-\psi\|_\infty\|(t-t_0)^m\|_\infty = \frac{L^m\delta^m}{m!}\|\phi-\psi\|_\infty.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{L^m\delta^m}{m!} \to 0$, cuando $m \to \infty$, concluimos que existe algún $m > 1$ tal que T_f^m es contractiva. □



Una imagen de Ernst L. Lindelöf (1870–1946). Aunque es considerado un matemático finlandés, E. L. Lindelöf nació en Helsinki cuando esta ciudad pertenecía al Imperio Ruso. Sus principales aportaciones a las matemáticas, entre las que se encuentra el resultado que acabamos de enunciar, fueron dentro del análisis. Además de su labor como investigador, cabe destacar su trabajo como docente, en este campo publicó diversos textos de gran relevancia.

De un modo similar podemos probar la siguiente versión global del teorema anterior

Teorema 13 (Teorema de existencia y unicidad de solución global o Teorema de Picard-Lindelöf)**.** *Sea* $\Omega = [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$ *y* $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una función continua y lipschitziana en la segunda variable en* Ω *con constante* L*. Entonces, si* $t_0 \in [\alpha, \beta]$*, existe una única solución,* ϕ*, del problema de valores iniciales*

$$(P) \begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida sobre $[\alpha, \beta]$*,* $\phi \colon [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$*.*

Demostración. En este caso debemos considerar el espacio métrico, adaptado a la nueva situación, $(C^0([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n), \| \cdot \|_\infty)$ y toda la demostración funcionara igual que en el caso anterior excepto en dos detalles: no será necesario comprobar la parte a), ya que es seguro que T_f es una aplicación de $C^0([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n)$ en si mismo, y que en b) la contractividad de una potencia del operador T_f es consecuencia de la estimación

$$\|T_f^m \phi - T_f^m \psi\|_\infty \leq \frac{L^m (\beta - \alpha)^m}{m!} \|\phi - \psi\|_\infty. \quad \square$$

De los resultados anteriores, usando la parte b) de la Proposición 11, tendremos el siguiente

Corolario 14. *Consideramos el problema de valores iniciales*

$$(P) \begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

donde $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es continua.*

a) Si $\Omega = I_h \times B_r(x_0)$ *y* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$*,* $i, j = 1, \ldots, n$*, son continuas en* Ω*, el problema* (P) *admite una única solución* ϕ *definida sobre* I_δ*,* $\phi \colon I_\delta \longrightarrow B_r(x_0)$*, donde*

$$\delta = \text{mín}\{h, r/M\}, \ \text{con } M = \text{máx}\{|f(t, x)| \colon (t, x) \in \Omega\}.$$

b) Si $\Omega = [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$ *y* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$*,* $i, j = 1, \ldots, n$*, son continuas y acotadas en* Ω*, el problema* (P) *admite una única solución* ϕ *definida sobre* $[\alpha, \beta]$*,* $\phi \colon [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$*.*

La prueba del corolario anterior es consecuencia de los teoremas de existencia y unicidad de solución local (apartado a)) y global (apartado b)) y de la parte b) de la Proposición 11.

La demostración de los teoremas de existencia y unicidad es constructiva. La solución del problema de valores iniciales puede obtenerse como el límite

de una sucesión de funciones construida por iteración como en la demostración del teorema del punto fijo de Banach. Podemos tomar una cierta función ϕ_0,[16] perteneciente al espacio métrico que corresponda, y la sucesión de funciones se define, para $m \geq 1$, como

$$\phi_m(t) = T_f \phi_{m-1}(t),$$

es decir,

$$\phi_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_{m-1}(s))\, ds.$$

Estas funciones se denominan *Iteradas de Picard* y convergen uniformemente (es decir, en la norma $\|\cdot\|_\infty$) hacia una cierta función ϕ que es la única solución del problema de valores iniciales correspondiente.

***Ejemplo* 30.** Tomemos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Es claro que podemos asociarle la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Esta función es continua y lipschitziana en la segunda variable (obviamente $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |x_1 - x_2|$). Luego, por el teorema de existencia y unicidad global, existe una única solución ϕ definida en $\mathbb{R}$. Se demuestra fácilmente que la única solución es $\phi(t) = e^t$. Veamos cómo es la sucesión de iteradas de Picard: tomando $\phi_0(t) = 1$ se verifica que

$$\phi_m(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^m}{m!}, \quad m \geq 1.$$

Esto es consecuencia de un sencillo argumento de inducción. Veamos que se cumple para $m + 1$:

$$\begin{aligned} \phi_{m+1}(t) &= 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2} + \cdots + \frac{s^m}{m!}\right) ds \\ &= 1 + \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3!} + \cdots + \frac{s^{m+1}}{(m+1)!} \Big|_0^t \right) \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}. \end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que $\phi_m(t) \to \phi(t) = e^t$ puesto que las iteradas de Picard coinciden con la sumas parciales de la serie de Taylor de la exponencial.[17] $\triangleleft$

[16] Suele ser habitual considerar $\phi_0(t) = x_0$, pero no es necesario.
[17] Esto ha ocurrido en este caso pero no tiene por que ocurrir necesariamente.

***Ejemplo* 31.** Sea el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \\ x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (1, 0). \end{cases}$$

En este caso consideramos la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x_1, x_2) &\longmapsto (-x_2, x_1). \end{aligned}$$

Otra vez estamos ante una función continua y lipschitziana en la segunda variable. Efectivamente,

$$|f(t, x_1, x_2) - f(t, \overline{x}_1, \overline{x}_2)| = |(-x_2 + \overline{x}_2, x_1 - \overline{x}_1)| = |(x_1, x_2) - (\overline{x}_1, \overline{x}_2)|.$$

Por el teorema de existencia y unicidad global, existe una única solución del problema de valores iniciales definida en todo $\mathbb{R}$. Tomando $\phi_0(t) = (1, 0)$, las iteradas de Picard son, para esta situación, con $m \geq 1$,

$$\phi_{2m}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{t^{2m}}{(2m)!} \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{t^{2m-1}}{(2m-1)!} \end{pmatrix}$$

y

$$\phi_{2m+1}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{t^{2m}}{(2m)!} \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^m \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \end{pmatrix}.$$

Luego es claro que las iteradas de Picard convergen hacia la solución $\phi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. ◁

***Ejemplo* 32.** Probar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = e^{-x^2} + t^2, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

admite una única solución definida en todo $\mathbb{R}$.

Definimos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto e^{-x^2} + t^2. \end{aligned}$$

Usando el apartado b) del Corolario 14, teniendo en cuenta que $\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^2}$ es una función acotada en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, podemos asegurar la existencia y unicidad de solución definida en todo $\mathbb{R}$. ◁

***Ejemplo* 33.** Determinar el intervalo de definición de la solución que predice el teorema de existencia y unicidad local para

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Para ciertos valores reales positivos h y r, definimos

$$\begin{aligned} f : [-h, h] \times [-r, r] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto 1 + x^2. \end{aligned}$$

Es claro que en $[-h, h] \times [-r, r]$ la función f es continua y lipschitziana en la segunda variable, con constante de Lipschitz $2r$, puesto que

$$\begin{aligned} |f(t, x_1) - f(t, x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \\ &\leq (|x_1| + |x_2|)|x_1 - x_2| \leq 2r|x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

El teorema de existencia y unicidad local nos asegura la existencia de una solución definida en $[-\delta, \delta]$ con $\delta = \text{mín}\{h, r/M\}$, con

$$M = \text{máx}\{|f(t, x)| \colon (t, x) \in [-h, h] \times [-r, r]\} = 1 + r^2.$$

Así, $\delta = \text{mín}\{h, r/(1 + r^2)\}$ y el máximo valor de δ posible se alcanzará cuando $r/(1 + r^2)$ sea máximo. Ese máximo es $1/2$ y se alcanza para $r = 1$. Luego el mayor intervalo que garantiza el teorema de Picard es $[-1/2, 1/2]$. Desde luego este problema podemos asegurar que no posee solución definida en todo $\mathbb{R}$ puesto que la solución es $x(t) = \tan t$ y sólo puede definirse en $(-\pi/2, \pi/2)$. $\lhd$

6.5. El teorema de existencia de Peano

La exigencia de que la función f apareciendo en un problema de valores iniciales sea lipschitziana es extremadamente fuerte, es una condición más débil que la derivabilidad, pero muy restrictiva. Considerando funciones que sólo sean continuas no cabe esperar obtener unicidad de solución pero sí al menos existencia. Esto queda de manifiesto en el siguiente ejemplo. El problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = 3x^{2/3}, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

tiene la solución obvia $x(t) = 0$. Además, usando que la ecuación es de variables separadas tendremos la familia de curvas $x = (t+c)^3$ y llegaremos a que $x(t) = t^3$ es otra solución del problema propuesto. Lo sorprendente de este asunto es que

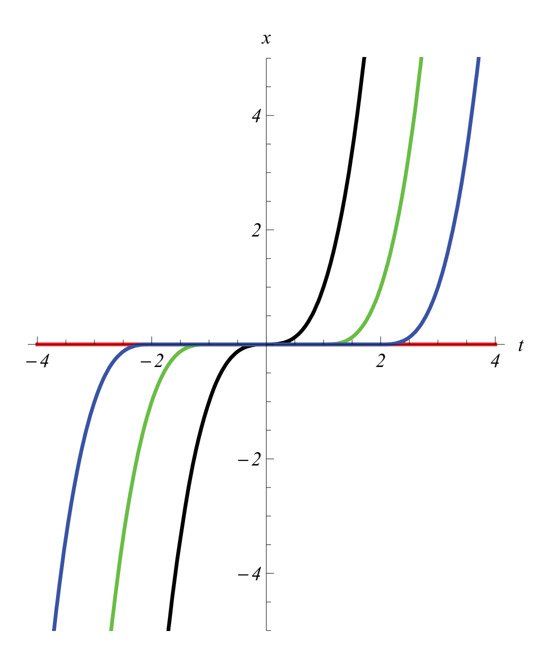


Figura 6.6: Representación gráfica de algunas funciones $x_{a,b}(t)$.

no sólo vamos a poder obtener estas dos soluciones, vamos a poder construir toda una familia de ellas. En concreto, para $b < 0 < a$, las funciones

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & t \geq a, \\ 0, & b < t < a, \\ (t-b)^3, & t \leq b, \end{cases}$$

son soluciones.

El teorema de Peano nos va a asegurar la existencia de solución para problemas de valores iniciales asociados con funciones continuas pero antes de enunciarlo debemos introducir el teorema de Ascoli-Arzelà que necesita dos definiciones previas. Omitiremos la demostración de este resultado técnico pero puede consultarse una detallada prueba en el libro *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control* de M. de Guzmán, publicado por la editorial Alhambra en 1975.

Material complementario

Sobre Miguel de Guzmán

Puesto que Miguel de Guzmán acaba de aparecer en estas notas, no nos parece apropiado dejar pasar esta oportunidad para hablar de un matemático

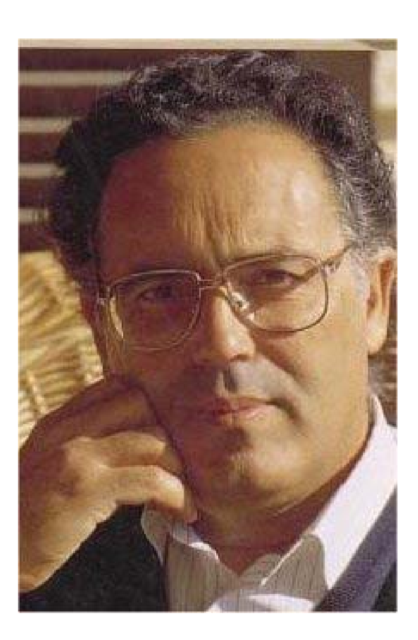


Figura 6.7: Una instantánea de Miguel de Guzmán (1936–2004).

español que ha sido fundamental para el desarrollo de nuestra ciencia en España tal y como la conocemos actualmente.

M. de Guzmán comenzó estudios de ingeniería industrial en Bilbao aunque finalmente los abandonó para ingresar en la Compañía de Jesús. Siendo todavía jesuita se licenció en matemáticas y realizó su tesis doctoral en Chicago, junto al matemático argentino, afincado en los Estados Unidos, Alberto Calderón. Su trabajos de investigación de esa época están centrados en el análisis armónico. Tras impartir docencia en diversas universidades estadounidenses volvió a España. Al abandonar los hábitos en 1971 comenzó su labor docente en la Universidad Autónoma de Madrid para después trasladarse, como catedrático, a la Universidad Complutense de Madrid. Desde esa universidad comenzó a introducir en el análisis armónico a un grupo de jóvenes matemáticos que, gracias a sus contactos, completaron su formación en Estados Unidos y fueron el germen de la importante escuela de analistas que actualmente existe en España.

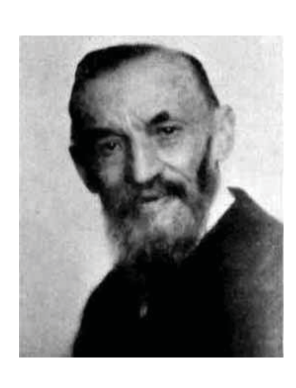
Durante los últimos años de su vida su actividad fundamental estuvo centrada en la docencia y la divulgación de las matemáticas. En este periodo fundó el proyecto ESTALMAT (Estimulo del talento matemático) en Madrid, con el fin de potenciar el desarrollo de las habilidades matemáticas en los jóvenes que demuestran interés por ello. Actualmente este proyecto se desarrolla en diversas comunidades españolas.

Tras este breve apunte biográfico, demos las definiciones anunciadas.

Definición 6. Para un conjunto infinito de índices Λ, consideramos la familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ definida sobre $E \subset \mathbb{R}^n$ y tomando valores en $\mathbb{R}^m$.

a) Se dice que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada si existe $M > 0$ tal que $|f_\alpha(x)| \leq M$, para todo $\alpha \in \Lambda$ y para todo $x \in E$.

b) Se dice que $\mathcal{F}$ es equicontinua si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| < \varepsilon$, para todo $\alpha \in \Lambda$.

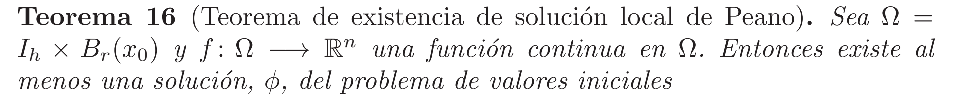


Giuseppe Peano (1858–1932), matemático italiano. Peano probó su resultado de existencia de solución en 1886 y en 1890 comprobó que la solución, efectivamente, podía no ser única. Para ello consideró el problema de valor inicial $x' = 3x^{2/3}$, $x(0) = 0$ (precisamente el ejemplo que hemos analizado al inicio de esta sección). Sin embargo, la aportación fundamental de Peano fue la axiomatización de los números naturales, considerada como uno de los grandes logros de la teoría de conjuntos.

Notar que en la definición de equicontinua $\delta = \delta(\varepsilon)$ y no depende de α, luego el mismo δ debe valer para cualquier miembro de la familia $\mathcal{F}$.

Teorema 15 (Teorema de Ascoli-Arzelà)**.** *Sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia infinita de funciones definida sobre $E \subset \mathbb{R}^n$ y tomando valores en $\mathbb{R}^m$, con E acotado. Si $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada y equicontinua, entonces existe una sucesión $\{f_k\}_{k\geq 0}$ de funciones distintas de la familia dada que converge uniformemente en E.*

Con lo anterior ya estamos en disposición de probar el siguiente



Teorema 16 (Teorema de existencia de solución local de Peano)**.** *Sea $\Omega = I_h \times B_r(x_0)$ y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en Ω. Entonces existe al menos una solución, ϕ, del problema de valores iniciales*

$$(P)\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida sobre I_δ, $\phi\colon I_\delta \longrightarrow B_r(x_0)$, donde

$$\delta = \text{mín}\{h, r/M\}, \;\; \textit{con } M = \text{máx}\{|f(t,x)|\colon (t,x) \in \Omega\}.$$

Demostración. Puesto que f es una función continua definida sobre un compacto, $\Omega = I_h \times B_r(x_0)$, por el teorema de aproximación de Weierstrass[18] existe una sucesión de polinomios $\{p_n(t,x)\}_{n\geq 0}$ convergiendo uniformemente hacia f en Ω. Consideramos los problemas de valores iniciales

$$(P_n)\begin{cases} x' = p_n(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Veamos que para cada n existe una única solución $\phi_n\colon I_\delta \longrightarrow B_r(x_0)$, con el mismo δ para todos los valores de n. Además, $\phi_n(t) = T_{p_n}\phi_n(t)$.

[18] Siguiendo con mi insistencia habitual, os recuerdo lo que dice el teorema de aproximación de Weierstrass.

Teorema 17 (Teorema de aproximación de Weierstrass)**.** *Sea $f\colon K \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, una función continua. Entonces existe una sucesión de polinomios, $\{p_n\}_{n\geq 0}$, definidos sobre K que convergen uniformemente hacia f.*

Por el teorema de existencia y unicidad de solución local, existe una única solución ϕ_n de (P_n) definida en I_{δ_n}, con $\delta_n = \text{mín}\{h, r/M_n\}$ donde $M_n = \text{máx}\{|p_n(t,x)| : (t,x) \in \Omega\}$. Es claro que para todo $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $|M_n - M| < \varepsilon$.[19] De esta estimación tendremos que $\delta_\varepsilon = \text{mín}\{h, r/(M+\varepsilon)\} < \delta_n$, puesto que esto se cumple para todo $\varepsilon > 0$ concluimos que $\delta \leq \delta_n$ y así todos las funciones ϕ_n pueden definirse sobre el mismo intervalo I_δ, para cada $n \geq n_0$.

Si la sucesión de funciones $\{\phi_n\}_{n\geq n_0}$ es uniformemente acotada y equicontinua, aplicando el teorema de Ascoli-Arzelà podremos asegurar la existencia de una subsucesión $\{\phi_{n(k)}\}_{k\geq 0}$ convergente a una función ϕ en I_δ. Además, tendremos que

$$\phi_{n(k)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} p_{n(k)}(s, \phi_{n(k)}(s))\, ds$$

de donde, tomando el límite cuando k tiende a infinito,[20] llegamos a

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds,$$

lo que nos asegura que ϕ es una solución (aunque no necesariamente la única) de (P).

Comprobemos que la sucesión $\{\phi_n\}_{n\geq n_0}$ es equicontinua y uniformemente acotada.

$\{\phi_n\}_{n\geq n_0}$ *es equicontinua:* Bastará ver que cada para ϵ, existe un δ tal que si $|t_2 - t_1| < \delta$, entonces $|\phi_n(t_2) - \phi_n(t_1)| < \epsilon$, con un mismo δ para todo n. Esto es así ya que, si suponemos $t_2 > t_1$,

$$\begin{aligned} |\phi_n(t_2) - \phi_n(t_1)| &= \left| \int_{t_0}^{t_2} p_n(s, \phi_n(s))\, ds - \int_{t_0}^{t_1} p_n(s, \phi_n(s))\, ds \right| \\ &= \left| \int_{t_1}^{t_2} p_n(s, \phi_n(s))\, ds \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} |p_n(s, \phi_n(s))|\, ds \leq M_n(t_2 - t_1) \leq K(t_2 - t_1), \end{aligned}$$

donde K es una constante que acota a todos los M_n, dicho valor existe porque la sucesión $\{M_n\}_{n\geq 0}$ es convergente. Así, bastará tomar $\delta = \epsilon/K$.

$\{\phi_n\}_{n\geq n_0}$ *es uniformemente acotada:* Esto es claro puesto que

$$|\phi_n(t)| \leq |x_0| + \left| \int_{t_0}^{t} p_n(s, \phi_n(s))\, ds \right| \leq |x_0| + M_n(t - t_0) \leq |x_0| + K\delta. \quad \square$$

El resultado anterior es un teorema de existencia de solución local obtenido suponiendo, únicamente, la continuidad de la función f. Al estar definida la

[19] Basta comprobar que si $p_n(t,x)$ converge uniformemente a la función $f(t,x)$, entonces M_n converge a M.

[20] Notad que si $\{p_n\}_{n\geq 0}$ converge a la función f cualquier subsucesión $\{p_{n(k)}\}_{k\geq 0}$ también lo hará.

función sobre un compacto el teorema de Weiertrass nos asegura que la función es acotada. Para obtener un teorema de existencia global, teniendo en cuenta que el conjunto sobre el que estará definida la función f no será compacto, deberemos considerar como hipótesis adicional la acotación de la función.

Teorema 18 (Teorema de existencia de solución global)**.** *Sea* $\Omega = [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$ *y* $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una función continua y acotada en* Ω*. Entonces, si* $t_0 \in [\alpha, \beta]$*, existe al menos una solución,* ϕ*, del problema de valores iniciales*

$$(P) \begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida sobre $[\alpha, \beta]$*,* $\phi\colon [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$*.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $t_0 = 0$ y $[\alpha, \beta] = [0, 1]$. Definimos la sucesión de funciones, para $n \geq 1$,

$$\phi_n(t) = \begin{cases} x_0, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ x_0 + \int_0^{t-\frac{1}{n}} f(s, \phi_n(s))\, ds, & \text{si } \frac{j}{n} < t \leq \frac{j+1}{n}, \text{ para } j = 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Notar que ϕ_n está definida en $\left(\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ a partir del valor de la función en el intervalo $\left[0, \frac{j}{n}\right]$.

Usando que la función f es acotada podemos probar que la sucesión $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ es equicontinua y uniformemente acotada. Ahora, por el teorema de Ascoli-Arzelà, podemos asegurar que existe una subsucesión $\{\phi_{n(k)}\}_{k\geq 1}$ uniformemente convergente en $[0, 1]$ a una función ϕ. De la definición de las funciones ϕ_n es claro que

$$\phi_{n(k)}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \phi_{n(k)}(s))\, ds - \int_{t-\frac{1}{n(k)}}^t f(s, \phi_{n(k)}(s))\, ds.$$

Usando que, por la convergencia uniforme y la continuidad de f,

$$\int_0^t f(s, \phi_{n(k)}(s))\, ds \longrightarrow \int_0^t f(s, \phi(s))\, ds,$$

y

$$\left| \int_{t-\frac{1}{n(k)}}^t f(s, \phi_{n(k)}(s))\, ds \right| \leq \frac{M}{n(k)} \longrightarrow 0,$$

cuando k tiende a infinito, donde M es la cota para la función f en Ω, concluimos que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s))\, ds;$$

es decir, ϕ es una solución de (P). □

Nota 9. El operador T_f que se utiliza para obtener la existencia y unicidad de solución de un problema de valores iniciales puede definirse para funciones f continuas sin ningún inconveniente. La hipótesis adicional por la que se exige que f sea lipschitziana en la segunda variable es la que permite asegurar la unicidad ya que hace que T_f sea contractivo y que podamos aplicar el teorema del punto fijo de Banach, obteniendo la convergencia de la sucesión de iteradas de Picard.

Como ya hemos dicho, en el caso de que la función f sea, únicamente, continua podemos plantearnos la construcción del operador T_f y, por tanto, la existencia de la iteradas de Picard. ¿Qué ocurre con la sucesión de iteradas de Picard en este caso? ¿convergen? ¿poseen alguna subsucesión convergente a alguna solución del problema de valores iniciales?

El siguiente ejemplo, debido a M. Müller, nos muestra que ni las iteradas de Picard, ni ninguna subsucesión suya, tienen por qué converger a una solución del problema de valores iniciales asociado.

Consideremos

$$(P)\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

donde $f\colon [0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida del siguiente modo

$$f(t,x) = \begin{cases} 2t, & \text{si } x \le 0, \\ -2t, & \text{si } x \ge t^2 \\ 2\lambda t - 2(1-\lambda)t, & \text{si } \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \text{ con } 0<\lambda<1. \end{cases}$$

La función f está representada en la figura 6.8 para el dominio $[0,1]\times[-1.5,1.5]$.

La función f es, claramente, una función continua y acotada en $[0,1]\times\mathbb{R}$ y esto garantiza la existencia de solución para (P). Calculando las iteradas de Picard, tomando $\phi_0(t)=0$, tenemos que

$$\phi_1(t) = \int_0^t f(s,0)\,ds = t^2,$$

y, para cada $n \ge 1$,

$$\phi_{2n}(t) = \int_0^t f(s,s^2)\,ds = -t^2$$

y

$$\phi_{2n+1}(t) = \int_0^t f(s,-s^2)\,ds = t^2.$$

Ni t^2 ni $-t^2$ son soluciones de (P). Sin embargo, el problema tiene solución única por ser f decreciente en x para cada t fijo. En efecto, si se tuvieran dos soluciones x_1 y x_2, se podría considerar la función

$$g(t) = (x_1(t) - x_2(t))^2 \ge 0.$$

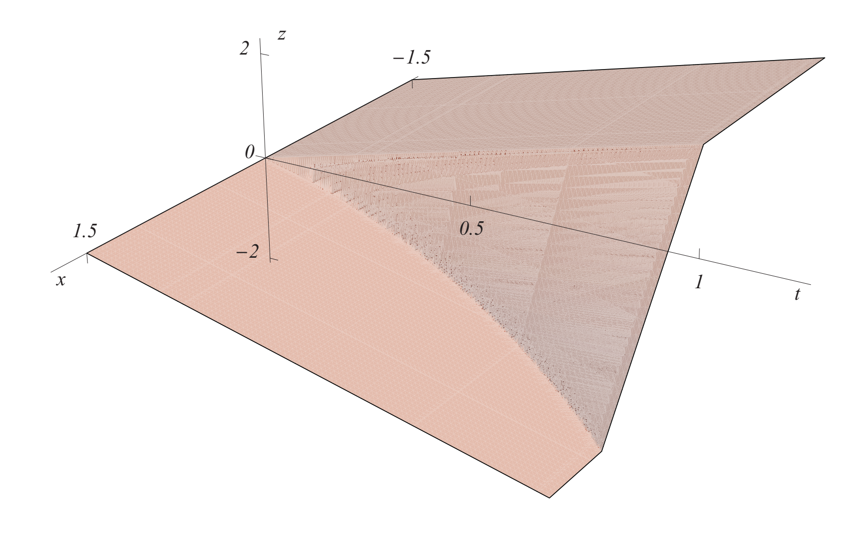


Figura 6.8: Representación gráfica de la función del ejemplo de Müller.

Es claro que $g(0) = 0$ y

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2(x_1(t) - x_2(t))(x_1'(t) - x_2'(t)) \\ &= 2(x_1(t) - x_2(t))(f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))) \leq 0, \end{aligned}$$

puesto que f es decreciente en la segunda variable. De este modo, $g(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, 1]$ y, por tanto, $g(t) = 0$ y $x_1(t) = x_2(t)$.[21]

6.6. Una aplicación: el teorema fundamental de curvas en $\mathbb{R}^3$

El objetivo de esta sección es mostrar cómo la teoría de existencia y unicidad de soluciones para problemas de valores iniciales permite probar resultados de importancia en otras disciplinas de las matemáticas. En concreto daremos una demostración del teorema fundamental de curvas en $\mathbb{R}^3$. Antes de probar el

[21]El argumento que acabamos de utilizar para probar la unicidad es realmente sencillo y puede usarse siempre que la función $f(t, x)$ es decreciente en la segunda variable.

resultado debemos introducir una serie de conceptos propios de la geometría diferencial de curvas.

Dada una curva en $\mathbb{R}^3$ descrita por su vector de posición

$$\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)), \qquad s \in [a, b],$$

donde las funciones x, y y z son, al menos, de clase $C^2([a, b])$, diremos que está parametrizada con respecto al parámetro arco si

$$\|\mathbf{r}'(s)\| := \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2 + (z'(s))^2} = 1.$$

Resulta interesante observar que si tenemos una curva cualquiera

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \qquad t \in [c, d],$$

no parametrizada con respecto al parámetro arco, mediante la identidad

$$s(t) = \int_c^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2 + (z'(u))^2}\, du,$$

usando el teorema de la función inversa, podemos asegurar la existencia de una función ϕ tal que $t = \phi(s)$, definida de $[0, L]$, con $L = s(d)$, en $[c, d]$. Con esta función podemos considerar la curva

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = (x(\phi(s)), y(\phi(s)), z(\phi(s)))\,, \qquad s \in [0, L],$$

que es en realidad una reparametrización de la curva original usando el parámetro arco. Por este motivo tomaremos, de ahora en adelante, todas las curvas parametrizadas con respecto al parámetro arco.

Para cada curva parametrizada con respecto al parámetro arco, definimos su vector tangente como

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s).$$

Notar que se trata de un vector unitario ya que $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$.

Mientras que para las curvas planas la elección del vector normal resulta evidente, en el caso de las curvas tridimensionales esta cuestión no es tan clara ya que existen infinidad de ellos. Sin embargo, si derivamos con respecto a s la identidad $\|\mathbf{r}'(s)\|^2 = \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 1$ (la notación «$\cdot$» indica producto escalar), tendremos que

$$0 = (\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{T}(s))' = 2\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{T}'(s),$$

por tanto, los vectores $\mathbf{T}(s)$ y $\mathbf{T}'(s)$ son perpendiculares. Este razonamiento nos lleva a definir el vector normal como

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\kappa(s)},$$

donde $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|$ se denomina curvatura[22] de $\mathbf{r}$.

[22]Esta curvatura es esencialmente la misma que para curvas planas de la que ya hemos hablado, lo que ocurre es que en este caso debe considerarse la circunferencia que mejor ajusta a la curva en un punto pero contenida en el plano que pasa por dicho punto y que está generado por los vectores $\mathbf{T}(s)$ y $\mathbf{N}(s)$. Este plano suele denominarse plano osculador.

Puesto que queremos determinar un base ortonormal en cada punto de la curva, es natural definir el vector binormal como

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s).$$

Los vectores $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ se conocen como triedro de Frenet-Serret. Observad que para que el triedro de Frenet-Serret esté correctamente definido se debe cumplir que la curvatura $\kappa(s)$ no sea nula en ningún punto.

De gran interés para nuestro objetivo serán las bien conocidas fórmulas de Frenet-Serret, que escriben las derivadas de los vectores del triedro en función de ellos mismos. En estas relaciones aparece un nuevo concepto: la torsión,[23] que definimos como

$$\tau(s) = \mathbf{N}'(s) \cdot \mathbf{B}(s).$$

Proposición 19 (Fórmulas de Frenet-Serret)**.** *Sea* $\mathbf{r}(s)$ *una curva en* $\mathbb{R}^3$ *parametrizada por el parámetro arco, entonces*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{pmatrix}.$$

Demostración. Por ser $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ un base se tendrá la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{pmatrix},$$

que se transforma en el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{T}'(s) = a_{11}\mathbf{T}(s) + a_{12}\mathbf{N}(s) + a_{13}\mathbf{B}(s), \\ \mathbf{N}'(s) = a_{21}\mathbf{T}(s) + a_{22}\mathbf{N}(s) + a_{23}\mathbf{B}(s), \\ \mathbf{B}'(s) = a_{31}\mathbf{T}(s) + a_{32}\mathbf{N}(s) + a_{33}\mathbf{B}(s). \end{cases} \tag{6.7}$$

Multiplicando escalarmente la primera ecuación de (6.7) por $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ y $\mathbf{B}(s)$ y usando la ortonormalidad se deduce que

$$a_{11} = \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0, \qquad a_{12} = \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{N}(s) = \kappa(s),$$

y

$$a_{13} = \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{B}(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s) \cdot (\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)) = 0.$$

Procediendo de igual modo con la segunda fila de (6.7) y usando que $\mathbf{N}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = -\mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{T}'(s)$ (para probar este hecho basta derivar contra s la relación $\mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0$) se concluye que $a_{21} = -\kappa(s)$, $a_{22} = 0$ y $a_{23} = \tau(s)$. Finalmente, de la tercera fila de (6.7), usando que $\mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = -\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{T}'(s)$ y $\mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{N}(s) = -\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{N}'(s)$, obtenemos que $a_{31} = a_{33} = 0$ y $a_{32} = -\tau(s)$. □

[23]Esencialmente, la torsión mide cómo una determinada curva se va torciendo en el espacio.

Ahora, tras el trabajo previo, ya estamos en disposición de enunciar y probar el teorema fundamental de curvas en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 20. *Sean $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ dos funciones continuas definidas en un cierto intervalo $[a,b]$, con $\kappa(s) > 0$ para $s \in [a,b]$, $s_0 \in [a,b]$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$ y (u_1,u_2,u_3) una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Entonces existe una única curva $\mathbf{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada con el parámetro arco tal que $\mathbf{r}(s_0) = p_0$ y (u_1,u_2,u_3) es el triedro de Frenet-Serret de $\mathbf{r}$ en $s = s_0$. Ademas, las funciones $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ son la curvatura y la torsión de $\mathbf{r}(s)$.*

Demostración. Veamos en primer lugar que existe una base de vectores ortonormales $\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$ de $\mathbb{R}^3$ satisfaciendo las fórmulas de Frenet-Serret con $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ jugando los papeles de la curvatura y la torsión.

Para ello consideremos la función

$$F : [a,b] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

definida por $F(s,e_1,e_2,e_3) = (\kappa(s)e_2, -\kappa(s)e_1 + \tau(s)e_3, -\tau(s)e_2)$. F es una función continua y las derivadas parciales con respecto a las componentes de los vectores e_i, $i = 1,2$ y 3, están acotadas. Por tanto, aplicando el apartado b) del Corolario 14 podemos asegurar que existe una única función

$$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

con $\alpha(s) = (e_1(s), e_2(s), e_3(s))$, solución del problema de valores iniciales

$$(P) \begin{cases} (e_1', e_2', e_3') = F(t, e_1, e_2, e_3), \\ (e_1(s_0), e_2(s_0), e_3(s_0)) = (u_1, u_2, u_3). \end{cases}$$

Debemos probar, a continuación, que los vectores $\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$ son ortonormales. Usando que estos vectores son solución del problema (P) se puede comprobar fácilmente que los productos escalares $e_1(s) \cdot e_1(s)$, $e_1(s) \cdot e_2(s)$, $e_1(s) \cdot e_3(s)$, $e_2(s) \cdot e_2(s)$, $e_2(s) \cdot e_3(s)$ y $e_3(s) \cdot e_3(s)$ cumplen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{de_1 \cdot e_1}{ds} = 2\kappa(s) e_1 \cdot e_2, \\ \dfrac{de_1 \cdot e_2}{ds} = \kappa(s)(e_2 \cdot e_2 - e_1 \cdot e_1) + \tau(s) e_1 \cdot e_3, \\ \dfrac{de_1 \cdot e_3}{ds} = \kappa(s) e_2 \cdot e_3 - \tau(s) e_1 \cdot e_2, \\ \dfrac{de_2 \cdot e_2}{ds} = -2\kappa(s) e_1 \cdot e_2 + 2\tau(s) e_2 \cdot e_3, \\ \dfrac{de_2 \cdot e_3}{ds} = -\kappa(s) e_1 \cdot e_3 + \tau(s) e_3 \cdot e_3 - \tau(s) e_2 \cdot e_2, \\ \dfrac{de_3 \cdot e_3}{ds} = -2\tau(s) e_2 \cdot e_3, \end{cases}$$

sujeto a la condición inicial

$$(e_1(s_0) \cdot e_1(s_0), e_1(s_0) \cdot e_2(s_0), e_1(s_0) \cdot e_3(s_0), e_2(s_0) \cdot e_2(s_0),\\ e_2(s_0) \cdot e_3(s_0), e_3(s_0) \cdot e_3(s_0)) = (1, 0, 0, 1, 0, 1).$$

Argumentando de un modo similar a como lo hemos hecho antes, puede probarse que este problema de valores iniciales posee solución única en $[a, b]$. Resulta sencillo comprobar que la función $(1, 0, 0, 1, 0, 1)$ es solución del problema y, por tanto, los vectores $\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$ cumplen que $(e_1(s) \cdot e_1(s), e_1(s) \cdot e_2(s), e_1(s) \cdot e_3(s), e_2(s) \cdot e_2(s), e_2(s) \cdot e_3(s), e_3(s) \cdot e_3(s)) = (1, 0, 0, 1, 0, 1)$; es decir forman una base ortonormal para cada $s \in [a, b]$.

Si construimos la curva

$$\mathbf{r}(s) = p_0 + \int_{s_0}^{s} e_1(t)\, dt$$

habremos concluido. □

Puede probarse que un cambio en la condiciones iniciales del teorema anterior; es decir, en la elección del punto p_0 y de los vectores (u_1, u_2, u_3), produce la misma curva pero modificada por una traslación y por un cierto giro, lo que en algunos textos llaman un movimiento rígido. Por tanto, podemos afirmar que cualquier curva en $\mathbb{R}^3$ está caracterizada por su curvatura y su torsión.

6.7. Problemas

En todos los problemas de esta sección trabajaremos con espacio métricos de la forma $(E, d) = (C^0([a, b], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ entendiendo

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty := \sup\{|f(x) - g(x)| \colon x \in [a, b]\}.$$

Problema 172. Demostrar, usando la aplicación

$$T \colon C^0([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R})$$

definida por

$$T\phi(x) = \phi(x) - \frac{2}{m + M} f(x, \phi(x)), \quad x \in [0, 1] \text{ y } \phi \in C^0([0, 1], \mathbb{R}),$$

que, si $f \in C^0([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ es continuamente diferenciable respecto a y en todo $[0, 1] \times \mathbb{R}$ y además

$$0 < m \leq \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \leq M < +\infty, \quad (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R},$$

existe una única $\phi \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ tal que $f(x, \phi(x)) = 0$ para $x \in [0, 1]$.

Problema 173. Sea la aplicación $T_\lambda \colon C^0([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow C^0([0, 1], \mathbb{R})$ definida por

$$T_\lambda \phi(x) = \lambda \int_0^1 \frac{x^2 + y^2}{1 + |\phi(y)|}\, dy.$$

Probar que T_λ es contractiva para $|\lambda| < 3/4$.

Problema 174. Sea la aplicación $T_\lambda\colon C^0([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow C^0([0,1],\mathbb{R})$ definida por

$$T_\lambda\phi(x) = e^x + 2\lambda \int_0^1 e^{x+t}\phi(t)\,dt.$$

a) Comprobar que T_λ es contractiva para $|\lambda| < \frac{1}{2e(e-1)}$.

b) Comprobar que T_λ^2 es contractiva para $\lambda^2 < \frac{1}{2e(e-1)(e^2-1)}$.

c) Calcular el punto fijo de T.

Problema 175. Sean $K \in C^0([a,b]\times[a,b],\mathbb{R})$ y $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ dados. Consideramos la ecuación integral de Volterra de segunda especie

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\phi(t)\,dt, \quad x \in [a,b] \text{ y } \phi \in C^0([a,b],\mathbb{R}).$$

Probar que para cada valor de λ esta ecuación posee una única solución ϕ.
Indicación: Probar que para cada λ existe una potencia n_0 del operador T_λ (definido de la manera obvia) que es contractiva.

Problema 176. Sea el operador $T_f\colon C^0([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow C^0([a,b],\mathbb{R})$ definido como

$$T_f\phi(x) = \int_a^b f(x)f(t)\phi(t)\,dt, \quad x \in [a,b] \text{ y } \phi \in C^0([a,b],\mathbb{R}),$$

para cada función $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ dada.

a) Hallar la imagen mediante T_f del espacio $C^0([a,b],\mathbb{R})$.

b) ¿Es T_f una aplicación continua?

c) ¿En qué condiciones podemos asegurar que T_f es contractiva?

d) Usar los apartados anteriores para resolver la ecuación integral

$$\phi(x) = x + \frac{1}{4}\int_0^1 xt\phi(t)\,dt.$$

Problema 177. Estudiar si son lipschitzianas respecto a la segunda variable cada una de las siguientes funciones:

a) $f(t,x) = t|x|$, en el recinto $|t| < a$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(t,x) = x^{1/3}$, con $|x| < 1$;

c) $f(t,x) = \frac{1}{x}$, con $1 \le x < \infty$;

d) $f(t,x_1,x_2,x_3) = (x_1^2x_2, t+x_3, x_3^2)$, en el recinto $|x| \le b$, $|t| \in \mathbb{R}$.

Problema 178. Probar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = x^2, \\ x(1) = -1, \end{cases}$$

admite una única solución ϕ definida en $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$. ¿Es prolongable la solución?; es decir, existe alguna función $\overline{\phi}$, definida en $[\alpha, \beta]$, con $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}] \subset [\alpha, \beta]$, tal que $\overline{\phi}\big|_{[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]} = \phi$.

Problema 179. Probar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = e^{-t^2} + x^3, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

admite una única solución definida en $[-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}]$.

Problema 180. Probar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = (4x + e^{-t^2})e^{2x}, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

admite solución única en $|t| \leq \frac{1}{8\sqrt{e}}$.

Problema 181. Calcular las iteradas de Picard asociadas a los problemas de valores iniciales:

a) $\begin{cases} x' = \frac{x}{t}, \\ x(1) = 1, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x, \\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = t - x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$

Problema 182. Calcular la sucesión de iteradas de Picard asociada al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = 2t(x + 1), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

¿A qué función converge dicha sucesión?

Problema 183. Probar que existe una única función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$f(t) = \int_0^t s^2 \operatorname{sen} f(s)\, ds.$$

Problema 184. Sea $\{\phi_n(t)\}_{n\geq 0}$ la sucesión de funciones definidas por $\phi_0(t) = 1$ y

$$\phi_n(t) = 1 + \int_0^t (\phi_{n-1}(s))^2 \, ds, \quad n \geq 1.$$

Probar que $\phi_n \to \phi$ uniformemente, donde ϕ es la solución de un problema de valores iniciales a determinar.

Problema 185. Encontrar una función verificando

$$\int_0^1 \phi(ts) \, ds = n\phi(t).$$

Problema 186. Calcular las tres primeras iteradas de Picard para el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = x + e^t, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Problema 187. Sea

$$f: \quad [t_0, t_1] \times [x_0 - b, x_0 + b] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

continua y tal que $(f(t, x_2) - f(t, x_1))(x_2 - x_1) \leq 0$, $\forall t \in [t_0, t_1]$ y $\forall x_1, x_2 \in [x_0 - b, x_0 + b]$. Demuéstrese que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admite solución única.

Problema 188. Sea el problema de valores iniciales

$$(P) \begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto t^2 \left| x - \frac{1}{2} \right|. \end{aligned}$$

¿Es la función f de clase C^1? ¿Existe solución única de (P)? Si la solución es única hallarla, si no es única hallar varias.

Problema 189. Sea la función

$$f(t, x) = \begin{cases} x \log\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que la ecuación $x' = f(t, x)$ tiene a lo más una solución verificando $x(0) = c$. ¿Es la función f lipschitziana en la segunda variable?

Problema 190. Considerar el problema de valores iniciales

$$(P)\quad \begin{cases} x' = |x|, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Determinar los puntos (t_0, x_0) para los que se puede garantizar que existe solución del problema de valores iniciales (P) en el intervalo $|t - t_0| < h$. Estudiar la unicidad.

Problema 191. Sea b un valor real positivo fijo y $a \in [-b, b]$. Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = -\left|\sqrt{b^2 - x^2} - |a|\right|, \\ x(0) = \sqrt{b^2 - a^2}. \end{cases}$$

Determinar solución o soluciones del problema en función de los valores de a.

Problema 192. Consideramos la función

$$f_n(t, x) = 1 + |x - t|^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Estudiar la existencia y unicidad del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f_1(t, x), \\ x(t_0) = t_0. \end{cases}$$

b) Determinar la solución general de la ecuación $x' = f_2(t, x)$.

Problema 193. Sean $f \in C^n([-a, a])$ y $x_0 \in [-a, a]$. Analizar la existencia y unicidad del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = \left| f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \cdots - \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right|, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

En caso de existencia, determinar una o varias soluciones.

Problema 194. Analizar el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = |x|^{1/2}, \\ x(1) = a, \end{cases}$$

según los valores de a.

Problema 195. Sea la ecuación diferencial $x' = f(t)(x - a)$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Discutir la existencia y unicidad de solución para el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t)(x - a), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

según los valores de x_0. En los casos de unicidad de solución encuéntrese utilizando separación de variables. En los casos de no unicidad encuéntrese más de una solución.

Problema 196. Sea f una función integrable y acotada en $\mathbb{R}$. Probar que para todo $a \in \mathbb{R}$ el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{1+t^2}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(s)\,ds, \\ x(0) = a, \end{cases}$$

admite una única solución definida en todo $\mathbb{R}$.

Problema 197. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y localmente integrable. Para cada pareja $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, estudiar la existencia y unicidad del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' - x = \displaystyle\int_{x}^{x+t} f(s)\,ds, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Problema 198. Probar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = t\sqrt{1-x^2}, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

tiene más de una solución.

Problema 199. Sea la ecuación

$$x''' = \frac{\sqrt{x-t}}{t^3} + \frac{\log x'}{t^3}. \tag{6.8}$$

Determinar que puntos de $\mathbb{R}^4$ se pueden tomar como valores iniciales para que junto con la ecuación (6.8) el problema de valores iniciales así planteado tenga solución.

Problema 200. Sea el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(x) + \operatorname{sen} t, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con derivadas continuas y acotadas. Probar que existe una única solución $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con tres derivadas continuas.

Problema 201. Probar que existe una única solución $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ para la ecuación

$$x(t) = \int_0^t s \arctan x(s)\,ds.$$

Problema 202. Probar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = x^2 + t^2, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

admite una única solución definida en $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Problema 203. Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} f : [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto -\sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Capítulo 7

Soluciones aproximadas

7.1. La ecuación del péndulo. Soluciones ε-aproximadas

Dada una ecuación diferencial cualquiera, es muy posible que no sepamos, e incluso que realmente no se pueda, resolverla por cuadraturas. Si modificamos ligeramente la ecuación diferencial y la transformamos en otra que sí somos capaces de resolver, nos interesa saber si las soluciones de esta nueva ecuación diferencial se pueden tomar como una buena aproximación de las soluciones de la ecuación original. Un ejemplo típico es el de la ecuación del péndulo en la que para ángulos pequeños se efectúa la aproximación $\operatorname{sen}\theta \sim \theta$. De esta forma es fácil obtener una solución y lo que nos preguntamos es la diferencia que existe entre el movimiento que describe esta aproximación con el movimiento real del péndulo.

Obtengamos en primer lugar la ecuación que modeliza la oscilación de un péndulo. Siguiendo el diagrama dado en la figura 7.1, supongamos que el péndulo tiene una longitud L, que la varilla tiene una masa despreciable y que la bola del extremo es de masa m. Denotaremos por θ el ángulo que forma la varilla con respeto a la vertical. La energía potencial[1] del péndulo viene dada por $E_{\text{potencial}} = mgL(1-\cos\theta)$. Supongamos toda la masa de la bola del extremo concentrada en un punto (x, y) donde el origen de coordenadas su supone en el extremo fijo de la varilla. De esta forma las coordenadas de la bola serán $(x, y) = (L\operatorname{sen}\theta, L\cos\theta)$. Entonces

$$v = \frac{d}{dt}(x, y) = \left(L\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, -L\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

[1] La energía potencial es el trabajo (recordad que el trabajo desarrollado por una fuerza es el producto de la fuerza por el desplazamiento) que debe hacer una fuerza para pasar de una determinada posición a otra predeterminada.

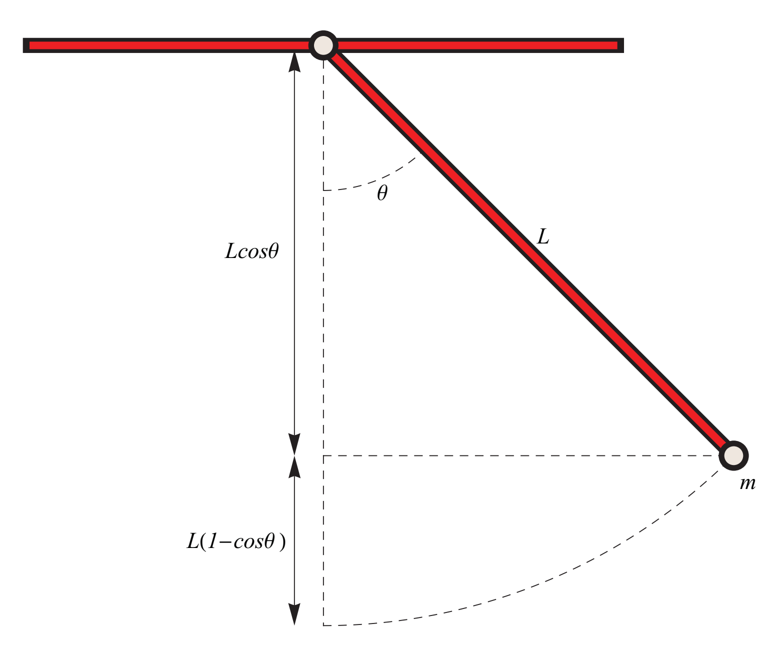


Figura 7.1: Diagrama de un péndulo simple.

y la energía cinética del péndulo será

$$\begin{aligned} E_{\text{cinética}} &= \frac{1}{2}m|v|^2 = \frac{1}{2}m\left(L^2\cos^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + L^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \end{aligned}$$

Por el principio de conservación de la energía

$$E = E_{\text{potencial}} + E_{\text{cinética}} = mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \tag{7.1}$$

donde E es una constante.

De esta ecuación ya podemos deducir ciertas cuestiones relativas al movimiento del péndulo. Si $\mathbf{v} = \frac{d\theta}{dt}$; es decir, la velocidad angular, la ecuación anterior se reescribe como

$$E = mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mL^2\mathbf{v}^2,$$

que nos permite expresar la velocidad angular como función del ángulo θ

$$\mathbf{v} = \pm\frac{\sqrt{2}}{L\sqrt{m}}\sqrt{E - mgL(1-\cos\theta)}.$$

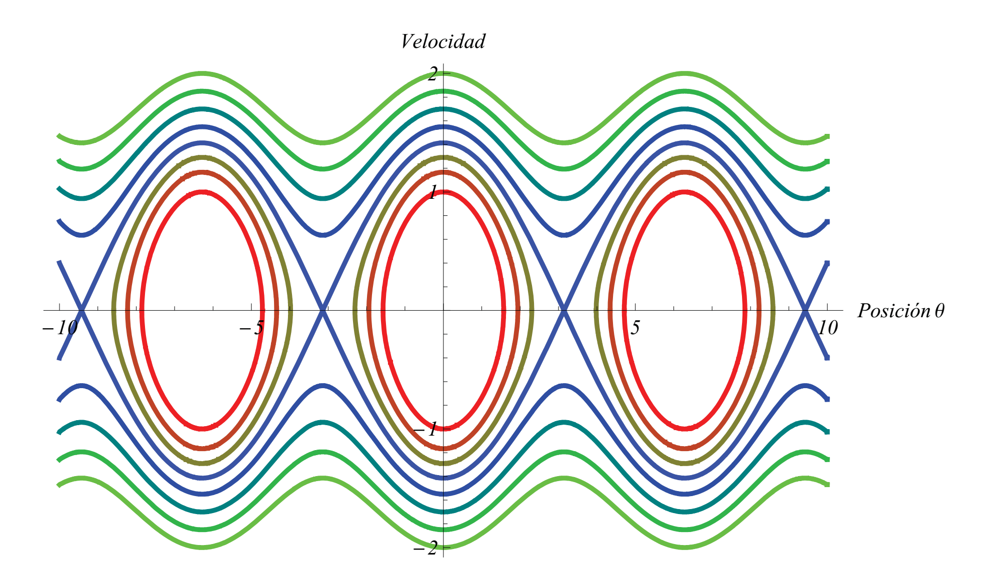


Figura 7.2: Representación gráfica de la velocidad angular del péndulo como función de θ para $L = 2g$ y $m = 1/(2g^2)$ partiendo del origen y para distintas velocidades iniciales.

La figura 7.2 representa la velocidad angular como función del ángulo para los valores $L = 2g$ y $m = 1/(2g^2)$, con $\theta(0) = 0$ y para distintas velocidades iniciales. De la ecuación (7.1) obtenemos que, en este caso, $E = v_0^2$. En la figura 7.2, las curvas más exteriores corresponden a velocidades mayores y las más interiores a velocidades más bajas.

Si en la ecuación (7.1) derivamos respecto a t, tendremos

$$0 = mgL\frac{d\theta}{dt}\operatorname{sen}\theta + mL^2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

que, simplificando, nos da la ecuación del movimiento del péndulo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{7.2}$$

Cuando el ángulo θ está próximo al origen, es bien conocido que $\operatorname{sen}\theta \sim \theta$ y podríamos plantearnos hacer esta sustitución en (7.2) para llegar a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0. \tag{7.3}$$

Con este cambio es posible obtener una solución ya que la nueva ecuación es de segundo orden en la que no aparece la variable independiente por lo que aplicando el método de reducción adecuado podemos solucionarla. ¿Qué diferencia existe entre la solución de las ecuaciones (7.2) y (7.3)?

Para analizar la cuestión que nos hemos planteado debemos comenzar dando una definición



Thomas H. Grönwall (1877–1932), matemático sueco. Aunque nacido y formado en Suecia, Grönwall desarrolló la mayor parte de su actividad científica en los Estados Unidos donde llegó en 1904 procedente de Alemania, país en el que se instaló en 1899 tras abandonar Suecia por problemas con las autoridades académicas de su país. La actividad científica del profesor Grönwall osciló durante toda su vida entre el análisis y las aplicaciones de las matemáticas en otras ciencias, colaborando como consultor para importantes empresas. El lema que lleva su nombre data de 1919.

Definición 7. Dada la ecuación $x' = f(t,x)$ con $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\Omega = [a,b] \times \mathbb{R}^n$. Diremos que la función $\phi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) es una ε-solución de la ecuación dada si pertenece a $C^1(I,\mathbb{R}^n)$ y satisface que

a) $(t,\phi(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$,

b) dado $\varepsilon > 0$, $|\phi'(t) - f(t,\phi(t))| < \varepsilon$, para todo $t \in I$.

Veamos un primer resultado que nos permite estudiar la diferencia entre dos ε-soluciones asociadas a la misma ecuación diferencial.

Lema 21 (Lema fundamental)**.** *Sea la ecuación $x' = f(t,x)$ con $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\Omega = [a,b] \times \mathbb{R}^n$, una función continua y lipschitziana en la segunda variable, con constante de Lipschitz k, en Ω. Sean $\phi_i\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, para $i = 1,2$, ε_i-soluciones de la ecuación propuesta. Si $x_i = \phi_i(t_0)$, para $i = 1,2$ y $t_0 \in I$, entonces*

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq |x_1 - x_2| e^{k|t-t_0|} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1) \tag{7.4}$$

para todo $t \in I$.

La demostración del Lema fundamental se basa en el denominado Lema de Grönwall que presentamos a continuación

Lema 22. *Sea $u(t)$ una función definida en $[0,r]$ continua, positiva y verificando que*

$$u(t) \leq at + k\int_0^t u(s)\,ds, \tag{7.5}$$

para ciertas constantes a y k y para todo $t \in [0,r]$. Entonces

$$u(t) \leq \frac{a}{k}(e^{kt} - 1), \quad t \in [0,r]. \tag{7.6}$$

Demostración. Si tomamos $v(t) = \int_0^t u(s)\,ds$, usando (7.5) tendremos que

$$v'(t) \leq at + kv(t), \tag{7.7}$$

o, de manera equivalente,

$$(v'(t) - kv(t))e^{-kt} = (v(t)e^{-kt})' \leq ate^{-kt}.$$

Ahora, integrando y teniendo en cuenta que $v(0) = 0$, llegamos a

$$v(t)e^{-kt} \leq a\int_0^t se^{-ks}\,ds,$$

para $t \in [0,r]$. Usando integración por partes para evaluar la integral del lado derecho, obtenemos la desigualdad

$$v(t) \leq \frac{a}{k^2}(e^{kt} - 1 - kt).$$

A partir de (7.7), se sigue la estimación $\frac{v'(t)-at}{k} = \frac{u(t)-at}{k} \leq v(t)$, que aplicada a la expresión anterior nos da (7.6). □

Demostración del Lema fundamental. Consideramos la función $u(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$ y denotamos $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Sin perdida de generalidad podemos suponer $t_0 = 0$ y $t > 0$. Es claro, usando que las funciones ϕ_i son ε_i-soluciones aproximadas y que f es lipschitziana en la segunda variable, que tenemos la cadena de desigualdades

$$\begin{aligned}|u'(t)| &= |\phi_1'(t) - \phi_2'(t)|\\ &\le |\phi_1'(t) - f(t,\phi_1(t))| + |\phi_2'(t) - f(t,\phi_2(t))| + |f(t,\phi_1(t)) - f(t,\phi_2(t))|\\ &\le \varepsilon + k|\phi_1(t) - \phi_2(t)| = \varepsilon + k|u(t)|.\end{aligned}$$

Ahora, usando que $\left|\int_0^t u'(s)\,ds\right| \le \int_0^t |u'(s)|\,ds$ y la estimación anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}|u(t) - u(0)| = \left|\int_0^t u'(s)\,ds\right| &\le \varepsilon t + k\int_0^t |u(s)|\,ds\\ &\le t(\varepsilon + k|u(0)|) + k\int_0^t |u(s) - u(0)|\,ds.\end{aligned}$$

De esta forma estamos en condiciones de aplicar el lema anterior a la función $|u(t) - u(0)|$ para obtener

$$|u(t) - u(0)| \le \frac{\varepsilon + k|u(0)|}{k}(e^{kt} - 1).$$

Finalmente, de la desigualdad $\big||u(t)| - |u(0)|\big| \le |u(t) - u(0)|$, deducimos que

$$|u(t)| \le \frac{\varepsilon}{k}(e^{kt} - 1) + |u(0)|e^{kt},$$

que es equivalente a (7.4). □

Nota 10. Fijarse que si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación $x' = f(t,x)$, entonces

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \le |x_1 - x_2|e^{k|t-t_0|}.$$

Esto es así puesto que una solución es una ε-solución con $\varepsilon = 0$. La desigualdad anterior estima la diferencia entre las soluciones de los problemas de valores iniciales

$$(P_1)\begin{cases}x' = f(t,x),\\ x(t_0) = x_1,\end{cases}\qquad (P_2)\begin{cases}x' = f(t,x),\\ x(t_0) = x_2.\end{cases}$$

Además, si $|x_1 - x_2| < \delta$, tenemos que $|\phi_1(t) - \phi_2(t)| < \delta e^{k|t-t_0|}$; es decir, si x_1 y x_2 están próximos las soluciones de los problemas (P_1) y (P_2) también permanecen cercanas para valores de t próximos a t_0. Realmente se trata de un resultado de continuidad respecto a los valores iniciales.

Veamos, finalmente, un teorema que nos permita estimar la diferencia entre soluciones a problemas de valores iniciales en función de la diferencia entre las ecuaciones que aparecen involucradas en ellos.

Teorema 23. *Sean* $\Omega = [a,b] \times \mathbb{R}^n$ *y* $f, g\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *funciones continuas y* f *lipschitziana en la segunda variable, con constante de Lipschitz* k*, en* Ω*. Supongamos que* $\phi_i\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, para* $i = 1, 2$*, con* $I \subseteq \mathbb{R}$*, son soluciones, respectivamente, de los problemas de valores iniciales*

$$(P_1)\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_1) = x_1, \end{cases} \qquad (P_2)\begin{cases} x' = g(t,x), \\ x(t_2) = x_2. \end{cases}$$

Si $M = \text{máx}\{|g(t,\phi_2(t))|\colon t \in [t_1, t_2]\}$ *y* $|f(t,\phi_2(t)) - g(t,\phi_2(t))| < \varepsilon$*, para* $t \in I$*, entonces*

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq (|x_1 - x_2| + M|t_1 - t_2|)e^{k|t-t_1|} + \frac{\varepsilon}{k}(e^{k|t-t_1|} - 1).$$

Demostración. En primer lugar debemos observar que la condición

$$|f(t,\phi_2(t)) - g(t,\phi_2(t))| < \varepsilon, \text{ para } t \in I,$$

es equivalente a que la función ϕ_2 es una ε-solución de la ecuación $x' = f(t,x)$, ya que $\phi_2'(t) = g(t,\phi_2(t))$. Aplicando el Lema fundamental al problema (P_1) (notar que ϕ_1 es solución y, por tanto, 0-solución) tendremos que

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq |\phi_1(t_1) - \phi_2(t_1)|e^{k|t-t_1|} + \frac{\varepsilon}{k}(e^{k|t-t_1|} - 1).$$

Para finalizar, veamos que $|\phi_1(t_1) - \phi_2(t_1)| \leq |x_1 - x_2| + M|t_1 - t_2|$. Esta estimación se seguirá teniendo en cuenta que, por el teorema del valor medio, existirá un valor $\xi \in (t_1, t_2)$ tal que

$$|\phi_2(t_2) - \phi_2(t_1)| = |\phi_2'(\xi)|\,|t_2 - t_1| = |g(\xi,\phi_2(\xi))|\,|t_2 - t_1|.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} |\phi_1(t_1) - \phi_2(t_1)| &\leq |\phi_1(t_1) - \phi_2(t_2)| + |\phi_2(t_2) - \phi_2(t_1)| \\ &= |x_1 - x_2| + |g(\xi,\phi_2(\xi))|\,|t_1 - t_2| \\ &\leq |x_1 - x_2| + M|t_1 - t_2|. \quad \square \end{aligned}$$

Nota 11. a) Si en el teorema anterior tomamos $f = g$ se verificará que $\varepsilon = 0$ y tendremos que

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq (|x_1 - x_2| + M|t_1 - t_2|)e^{k|t-t_1|}, \quad t \in I.$$

Esta desigualdad nos estima la diferencia entre dos soluciones para una misma ecuación con diferentes condiciones iniciales. De esta desigualdad podemos deducir, otra vez, la continuidad de las soluciones de una ecuación respecto a las condiciones iniciales, aunque en esta ocasión de una manera un poco más general. De hecho, tomando $t_1 = t_2$ llegaremos a la estimación

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq |x_1 - x_2|e^{k|t-t_1|}, \quad t \in I,$$

que es la que obtuvimos con el Lema fundamental.

b) En el caso de que las condiciones iniciales de los problemas (P_1) y (P_2) del teorema anterior coincidan llegaremos a la desigualdad

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq \frac{\varepsilon}{k}(e^{k|t-t_1|} - 1), \quad t \in I,$$

que estima la diferencia entre las soluciones en términos de ε; es decir, en función de la diferencia entre f y g.

c) Al estudiar diversos problemas físicos pueden aparecer problemas de valores iniciales de la forma

$$(P_\lambda) \begin{cases} x' = f(t, x, \lambda), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

donde λ es un parámetro en $\mathbb{R}^m$, de este modo podemos considerar que f es una función definida en algún subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. El estudio de la continuidad de las soluciones respecto del parámetro λ puede realizarse usando el teorema anterior haciendo uso de una sencilla transformación. En efecto, consideremos la función $z(t) = (x(t), \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$ y tomemos $z_0 = (x_0, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Asimismo tomamos

$$g(t, z) = (f(t, z), 0) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Con estas transformaciones el problema (P_λ) se convierte en

$$(P) \begin{cases} z' = g(t, z), \\ z(t_0) = z_0, \end{cases}$$

en el que ya no aparecen parámetros. Además cada solución de (P) da lugar a una solución de (P_λ) y viceversa.

Con el resultado que acabamos de probar, podemos proceder a analizar la diferencia que existe al tratar el movimiento del péndulo mediante la ecuación (7.2) y su linealizada (7.3). En primer lugar escribiremos ambas ecuaciones como sistemas de primer orden, tomando $x_1 = \theta$ y $x_2 = \frac{d\theta}{dt}$, y consideraremos que el péndulo parte del reposo desde un cierto ángulo $0 < \alpha < \pi/2$. De esta manera a (7.2) le asociamos el problema de valores iniciales

$$(P_1) \begin{cases} x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \operatorname{sen} x_1 \end{pmatrix} = f(t, x), \\ x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (\alpha, 0), \end{cases}$$

y a (7.3)

$$(P_2) \begin{cases} x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} x_1 \end{pmatrix} = g(t, x), \\ x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (\alpha, 0). \end{cases}$$

Así, usando la parte b) de la nota que sigue al teorema, tendremos que la diferencia entre las soluciones, que denotaremos por ϕ_1 y ϕ_2 estará dada por

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq \frac{\varepsilon}{k}(e^{k|t|} - 1),$$

luego debemos proceder a estimar ε y la constante de Lipschitz asociada con la función del problema (P_1). Notar que la diferencia que nos interesa estimar es $|\phi_{1,1}(t) - \phi_{2,1}(t)|$, pero esta es una consecuencia de la anterior. Para obtener ε, en primer lugar, debemos resolver el problema (P_2). Para ello es mejor utilizar la ecuación de segundo orden de la que hemos partido ($\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$) y obtener su solución general mediante un método de reducción de orden (notar que en la ecuación no aparece la variable independiente), con este procedimiento llegaremos a que

$$\phi_2(t) = (\phi_{2,1}(t), \phi_{2,2}(t)) = \left(\alpha \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right), -\alpha\sqrt{\frac{g}{L}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)\right).$$

Ahora resulta inmediato comprobar que

$$\begin{aligned}
|f(t, \phi_2(t)) - g(t, \phi_2(t))| &= \left|\left(0, -\frac{g}{L}(\operatorname{sen}\phi_{2,1}(t) - \phi_{2,1}(t))\right)\right| \\
&\leq \frac{g}{L} \operatorname{máx}\{|\operatorname{sen}\phi_{2,1}(t) - \phi_{2,1}(t)| \colon \phi_{2,1} \in [-\alpha, \alpha]\} \\
&\leq \frac{g\alpha^3}{6L},
\end{aligned}$$

luego tomaremos $\varepsilon = \frac{g\alpha^3}{6L}$.[2] Para la constante de Lipschitz procedemos de la manera habitual

$$\begin{aligned}
|f(t, x) - f(t, \overline{x})| &= \left|\left(x_2 - \overline{x}_2, -\frac{g}{L}(\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen}\overline{x}_1)\right)\right| \\
&\leq \operatorname{máx}\left\{1, \frac{g}{L}\right\} |x - \overline{x}|,
\end{aligned}$$

por tanto, $k = \operatorname{máx}\left\{1, \frac{g}{L}\right\}$.

7.2. El método de Euler. Problemas de balística

Cuando se describe el movimiento de un proyectil de masa m lanzado con una velocidad inicial v_0, formando un ángulo α con la horizontal, en una primera aproximación se procede a despreciar el rozamiento del aire y a considerar, únicamente, la fuerza del peso. Esta forma de abordar la cuestión nos lleva a las ecuaciones clásicas del tiro parabólico que se deducen del sistema diferencial

$$\begin{cases}
x'' = 0, \\
y'' = -g, \\
x(0) = y(0) = 0, \\
x'(0) = v_0 \cos\alpha, \quad y'(0) = v_0 \operatorname{sen}\alpha,
\end{cases}$$

[2]En el último paso de la estimación hemos utilizado la desigualdad $|\operatorname{sen} z - z| \leq \frac{|z|^3}{3!}$, ¿recuerdas cómo se obtenía la demostración de esta estimación?

que son una consecuencia de la segunda ley de Newton.

Esta forma de abordar el problema resulta muy ingenua y poco realista. Una forma más apropiada de atacar la cuestión consiste en suponer que el aire ejerce una fuerza de resistencia que es proporcional al cuadrado de la velocidad con una constante de proporcionalidad k. La fuerza actua en la dirección opuesta a la del vector velocidad. De este modo, considerando un proyectil de masa unitaria, el sistema de ecuaciones que modeliza la trayectoria es

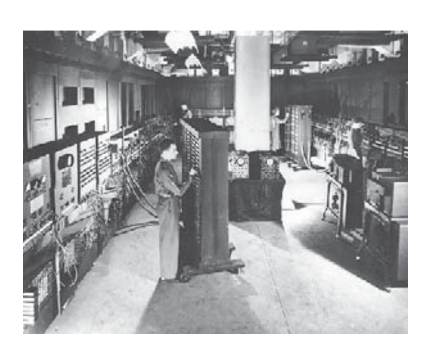
$$\begin{cases} x'' = -kx'\sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \\ y'' = -g - ky'\sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \\ x(0) = y(0) = 0, \\ x'(0) = v_0 \cos\alpha, \quad y'(0) = v_0 \operatorname{sen}\alpha. \end{cases} \tag{7.8}$$

El sistema de ecuaciones anterior y el correspondiente a las ecuaciones del tiro parabólico son ejemplos de problemas de *balística*. El objetivo de la balística es la descripción de la trayectoria que trazan distintos tipos de proyectiles bajo determinados condiciones: ángulo de elevación de un cañón, velocidad de salida, densidad y temperatura del aire, masa, tamaño y calibre del proyectil, la velocidad del viento y, para tiros de gran alcance, la curvatura de la Tierra. Una descripción matemática (relativamente simplificada) que modeliza el vuelo de un proyectil en un plano consta de dos ecuaciones diferenciales

$$x'' = -Ex', \quad y'' = -Ey' - g, \quad \text{con } E = \frac{G(v)H(y)}{c}.$$

E es una función empírica de gran complejidad, depende de la resistencia $G(v)$ que el aire ejerce al avance del proyectil y de la densidad del aire $H(y)$ respecto a la densidad al nivel del mar. La constante c engloba los factores dependientes de la naturaleza física y geométrica del proyectil y debe estimarse de manera experimental.

La resolución de este tipo de sistemas de ecuaciones se ha llevado a cabo siempre mediante procedimientos numéricos aproximados que, hasta la aparición de los ordenadores, se realizaban a mano. En Alemania, durante las décadas anteriores a la Primera Guerra Mundial se trabajó de manera intensiva en este tipo de procedimientos y ésta fue la razón de la superioridad de la artillería germana durante dicha guerra. El ejército estadounidense, consciente de este hecho, decidió fundar el *Laboratorio de Investigación Balística* o *BRL*, en sus siglas inglesas, para la realización de este tipo de cálculos. Durante la Segunda Guerra Mundial en el BRL se empleaban del orden de 20 horas de cálculo manual, asistido con calculadoras de mesa, para la elaboración de una única trayectoria. Existía una gran presión sobre el BRL para que elaborase las tablas balísticas (cada tabla reunía entre 2000 y 4000 trayectorias) con rapidez pues eran indispensables para que las armas desarrolladas pudiesen ser realmente utilizadas en los frentes de batalla. Como ejemplo cabe citar que durante una semana de agosto de 1944 el BRL recibió la solicitud de elaboración de 40 nuevas tablas, en esa misma semana se trabajaba sobre 74 tablas distintas con un



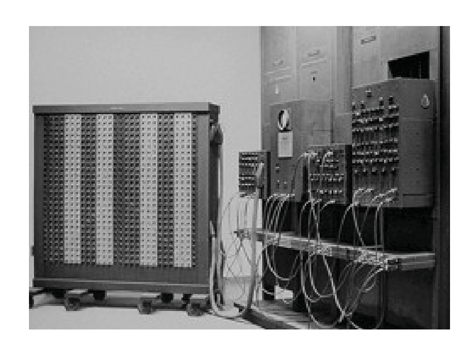


Figura 7.3: Dos imágenes de ENIAC: la primera de los años cincuenta del siglo pasado y la segunda de la actualidad.

personal de cálculo aproximado de 100 personas. La necesidad de automatización del proceso parecía más que evidente. En abril de 1943 J. Mauchly, H. H. Goldstine y J. P. Eckert planteron al BRL la construcción de un "calculador electrónico". Este artilugio, ideado para simplificar la contrucción de las tablas de balística, recibió el nombre de *ENIAC* (Electronic Numerical Integrator and Computer), tardó casi tres años en ser concluido (febrero de 1946, con la guerra ya finalizada) y hoy en día es comúnmente aceptado que fue el primer ordenador de la historia.

El sistema (7.8) no es fácilmente resoluble por cuadraturas, aunque sorprendentemente lo es, pero la solución que se obtiene no es sencilla de manipular. Procederemos a resolverlo por un procedimiento numérico aproximado: *el método de Euler*.

El método de Euler nos da una aproximación lineal de la solución que como veremos es una ε-solución si admitimos que éstas sean funciones de clase C^1 a trozos. Queremos obtener una aproximación a la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

con $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con Ω un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, continua y verificando que $|f(t,x)| \le M$. Supongamos que el conjunto

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \colon t \in [t_0, t_0+\eta], \quad |x - x_0| \le M(t-t_0)\} \subseteq \Omega. \tag{7.9}$$

Consideramos una partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[t_0, t_0+\eta]$

$$\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, t_{n+1} \colon t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = t_0 + \eta\}$$

y construimos una poligonal pasando por (t_0, x_0) y que en cada uno de los subintervalos $[t_k, t_{k+1}]$ coincida con una recta cuya pendiente es $f(t_k, x(t_k))$; es decir, es la función definida recursivamente por

$$x(t_0) = x_0,$$

$$x(t) = x(t_k) + f(t_k, x(t_k))(t - t_k), \qquad \text{si } t \in (t_k, t_{k+1}], \qquad \text{para } k = 0, \dots, n.$$

Al hablar del método de Euler se dice que es una aproximación numérica porque, en realidad, se aproxima la solución en una sucesión de puntos (los t_k) por los valores $x(t_k)$, que se obtienen por recurrencia, y luego se interpola para obtener la función x.

Es claro que x es una función de clase $C^1([t_0, t_0 + \eta], \mathbb{R}^n)$ a trozos; es decir, para cada $k = 0, \dots, n$, $x \in C^1([t_k, t_{k+1}], \mathbb{R}^n)$. Para comprobar que $(t, x) \in D$ debemos proceder por inducción. Si $t \in [t_0, t_1]$, tenemos que $x(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0)$ y así

$$|x(t) - x_0| \leq |f(t_0, x_0)|(t - t_0) \leq M(t - t_0),$$

de donde vemos que $(t, x) \in D$ cuando $t \in [t_0, t_1]$. Supongamos que se cumple que

$$|x(t) - x_0| \leq M(t - t_0) \tag{7.10}$$

para $t \in (t_{k-1}, t_k]$ (es decir, $(t, x) \in D$ si $t \in (t_{k-1}, t_k]$). Sea ahora $t \in (t_k, t_{k+1}]$, entonces $x(t) = x(t_k) + f(t_k, x(t_k))(t - t_k)$ y, usando (7.10) con $t = t_k$, llegamos a que

$$\begin{aligned} |x(t) - x_0| &\leq |x(t_k) - x_0| + |f(t_k, x(t_k))|(t - t_k) \\ &\leq M(t_k - t_0) + M(t - t_k) = M(t - t_0). \end{aligned}$$

De este modo $(t, x) \in D$ cuando $t \in (t_k, t_{k+1}]$ y podremos continuar así hasta comprobar la condición en todos los subintervalos en los que dividamos $[t_0, t_0 + \eta]$.

Por tanto, acabamos de ver que a cada partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[t_0, t_0 + \eta]$ le podemos asociar una única poligonal completamente contenida en D. Veamos ahora que, efectivamente, dado un $\varepsilon > 0$ siempre existe una partición del intervalo $[t_0, t_0 + \eta]$ en la que la poligonal se comporta como una ε-solución.

Teorema 24. *Sea $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con Ω un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, una función continua y acotada, por una constante M, en Ω. Si consideramos el conjunto D definido como en* (7.9)*, dado $\varepsilon > 0$ siempre existe una partición $\mathcal{P}_\varepsilon$ tal que la poligonal $x(t)$ asociada con ella está contenida en D y*

$$|x'(t) - f(t, x)| < \varepsilon$$

para los $t \in [t_0, t_0 + \eta]$ en los que exista x'.

Demostración. Por ser f una función continua y D un conjunto compacto, podemos asegurar que la función f es uniformemente continua en D. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|(t, x) - (\bar{t}, \overline{x})| < \delta$ (para $(t, x), (\bar{t}, \overline{x}) \in D$) entonces $|f(t, x) - f(\bar{t}, \overline{x})| < \varepsilon$.

Sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1} \colon t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = t_0 + \eta\}$ una partición de $[t_0, t_0 + \eta]$ tal que $\max\{t_{k+1} - t_k \colon k = 0, \dots, n\} < \min\{\delta, \delta/M\}$. De esta forma, para $t \in (t_k, t_{k+1}]$,

$$|(t, x(t)) - (t_k, x(t_k))| = |(t - t_k, f(t_k, x(t_k))(t - t_k))|$$

$$\leq \text{máx}\{t_{k+1} - t_k, M(t_{k+1} - t_k)\} < \delta.$$

Usando ahora que $x'(t) = f(t_k, x(t_k))$, para $t \in (t_k, t_{k+1})$ y la continuidad uniforme, llegamos a que, para $t \in (t_k, t_{k+1})$,

$$|x'(t) - f(t, x(t))| = |f(t_k, x(t_k)) - f(t, x(t))| < \varepsilon. \quad \square$$

Un modo estándar de proceder consiste en tomar una partición uniforme; es decir, $t_{k+1} - t_k = h = \eta/n$, donde n es el número de subintervalos que vamos a considerar. Se construye la sucesión $x(t_{k+1}) = x(t_k) + hf(t_k, x(t_k))$ y los puntos consecutivos se unen mediante una recta. Veamos como hacer esto en el caso del sistema del proyectil con rozamiento. En primer lugar reescribimos el sistema tomando $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = x'$ y $x_4 = y'$:

$$\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ x_3' = -kx_3\sqrt{x_3^2 + x_4^2}, \\ x_4' = -g - kx_4\sqrt{x_3^2 + x_4^2}, \\ x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0, 0, v_0 \cos\alpha, v_0 \operatorname{sen}\alpha). \end{cases}$$

Si queremos aproximar la solución en un intervalo de la forma $[0, T]$, consideramos los puntos $t_k = kh$, con $h = T/n$ y $k = 0, \ldots, n$, y construimos la sucesión $\{x(t_k)\}_{k=0,\ldots,n}$ como $x(0) = x(t_0) = (0, 0, v_0 \cos\alpha, v_0 \operatorname{sen}\alpha)$

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) = (x_1(t_k), x_2(t_k), x_3(t_k), x_4(t_k)) \\ + h\Bigg(x_3(t_k), x_4(t_k), -kx_3(t_k)\sqrt{x_3^2(t_k) + x_4^2(t_k)}, \\ -g - kx_4(t_k)\sqrt{x_3^2(t_k) + x_4^2(t_k)}\Bigg) \end{aligned}$$

con $k = 0, \ldots, n-1$. Notar que en realidad sólo estamos interesados en $(x_1, x_2) = (x, y)$.

Obviamente la elaboración manual de estos cálculos es intratable para valores grandes de n y por ello recurrimos a algún tipo de software para afrontarlo. Por ejemplo, tomando $k = 0.03$, con *Mathematica* podemos proceder del siguiente modo: definimos las funciones `x1,x2,x3` y `x4` recursivamente

```
x1[0, v0_, a_, h_] := 0;
x2[0, v0_, a_, h_] := 0;
x3[0, v0_, a_, h_] := v0*Cos[a];
x4[0, v0_, a_, h_] := v0*Sin[a];
x1[k_, v0_, a_, h_] :=
 x1[k, v0, a, h] = x1[k - 1, v0, a, h] + h*x3[k - 1, v0, a, h];
x2[k_, v0_, a_, h_] :=
 x2[k, v0, a, h] = x2[k - 1, v0, a, h] + h*x4[k - 1, v0, a, h];
x3[k_, v0_, a_, h_] := x3[k, v0, a, h] =
```

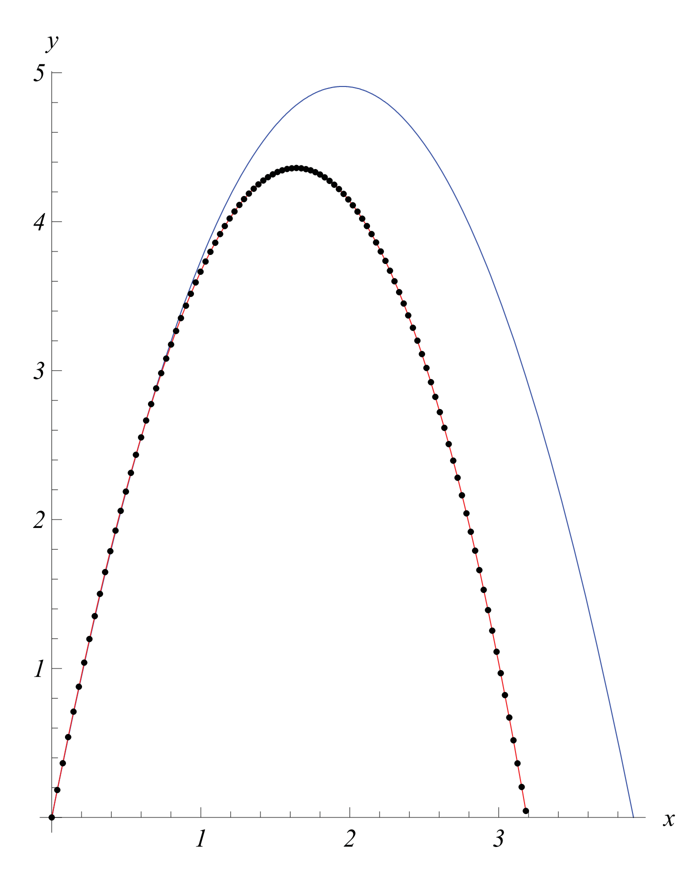


Figura 7.4: Salida obtenida con `balistica[0, 1.88, 100, 10, 7*Pi/16]`. En rojo, representación gráfica de la solución del sistema (7.8) con el parámetro $k = 0.03$ y, en azul, el tiro parabólico sin rozamiento con las mismas condiciones iniciales $v_0 = 10\text{m/sg}$ y $\alpha = 7\pi/16$.

```
 x3[k - 1, v0, a, h] - 0.03*h*x3[k - 1, v0, a, h]*
  Sqrt[(x3[k - 1, v0, a, h])^2 + (x4[k - 1, v0, a, h])^2];
x4[k_, v0_, a_, h_] := x4[k, v0, a, h] =
 x4[k - 1, v0, a, h] - h*(0.03*x4[k - 1, v0, a, h]*
  Sqrt[(x3[k - 1, v0, a, h])^2 + (x4[k - 1, v0, a, h])^2] + 9.8);
```

Ahora construimos un bloque, denominado `balistica` que obtiene los puntos que nos interesan, los une con una línea y construye, además, la trayectoria del tiro parábolico para que podamos comparar el efecto de la resistencia en la trayectoria del proyectil:

```
balistica[t0_, t1_, n_, v0_, a_] :=
  Block[{h1, d1, d2, trac},
    h1 = (t1 - t0)/n;
```

```
trac = Table[{x1[k, v0, a, h1],x2[k, v0, a, h1]}, {k, 0, n}];
d1 = ListPlot[trac, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0],
              MeshStyle -> {Black},
              Joined -> True, Mesh -> All];
d2 = ParametricPlot[{v0*Cos[a]*t,-(9.8/2) t^2 + v0*Sin[a]*t},
                    {t, 0, 2*v0*Sin[a]/9.8},
                    PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1]}];
Show[d2, d1, AxesStyle -> Directive[Medium, Italic],
     AxesLabel -> {x, y}, AspectRatio -> Automatic]]
```

La figura 7.4 recoge una aplicación de `balistica` en la que se ha considerado la trayectoria con amortiguamiento en el intervalo de tiempo $[0, 1.88]$ y el tiro parabólico sin rozamiento, con una velocidad inicial de 10m/sg y con un ángulo inicial de $7\pi/16$.

El método de Euler es, habitualmente, el primer método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales que se analiza en los cursos de Cálculo Numérico centrados en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Su comportamiento no es óptimo, ni mucho menos, pero no es malo teniendo en cuenta su sencillez. En cursos de Cálculo Numérico veréis métodos mucho más eficientes pero bastante más sofisticados. El objetivo de este curso queda cubierto con lo que hemos visto.

7.3. Problemas

Problema 204. Consideramos los problemas de valores iniciales

$$(P) \begin{cases} x' = 3(x - \operatorname{sen} t) + \cos t, \\ x(0) = 0, \end{cases} \qquad (P_\varepsilon) \begin{cases} x' = 3(x - \operatorname{sen} t) + \cos t, \\ x(0) = \varepsilon. \end{cases}$$

Estudiar el comportamiento de la diferencia $|\phi(t) - \phi_\varepsilon(t)|$, donde $\phi(t)$ es la solución de (P) y $\phi_\varepsilon(t)$ es solución de (P_ε), dependiendo de los valores de t, (tomar los valores $t = \varepsilon/3$, $t = 2\pi$ y $t \to \infty$). Hacerlo directamente y usando el Lema Fundamental.

Problema 205. Consideramos los problemas de valores iniciales

$$(P_1) \begin{cases} x' = t(1 - \cos x), \\ x(0) = x_1 > 0, \end{cases} \qquad (P_2) \begin{cases} x' = tx^2/2, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Calcular la solución de (P_1) y estimar la diferencia entre las soluciones de ambos problemas.

Problema 206. Sean x y z las soluciones de los problemas de valores iniciales

$$(P_1) \begin{cases} x' = (1 + \lambda)x - (2 + \mu)t, \\ x(0) = 0, \end{cases} \qquad (P_2) \begin{cases} z' = z - 2t, \\ z(0) = 0, \end{cases}$$

con λ y μ parámetros reales verificando que $|\lambda| < \varepsilon_0$ y $|\mu| < \varepsilon_1$. Estimar $|x(t) - z(t)|$ para $t \in (-1, 1)$.

Problema 207. Consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' - t^2 x = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Estimar el error cometido al considerar la función

$$\begin{aligned} \phi : [-1/2, 1/2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{t^4/12}, \end{aligned}$$

como solución del problema dado.

Problema 208. Sean $f, g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuas y f lipschitziana en la segunda variable de constante k. Sean $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ las soluciones de los problemas de valores iniciales

$$(P_1) \begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(a) = x_0, \end{cases} \qquad (P_2) \begin{cases} x' = g(t, x), \\ x(a) = x_0. \end{cases}$$

Probar que si $|f(t, \phi_2(t)) - g(t, \phi_2(t))| < \varepsilon$, $\forall t \in [a, b]$, entonces

$$\left| \frac{\phi_1(t) - \phi_2(t)}{t - a} \right| < C.$$

Problema 209. La ecuación diferencial $x'' = x^2 - t$ es de segundo orden y no lineal y suele ser conocida como ecuación de Painlevé. Usando el método de Euler generar la representación gráfica dada en la figura 7.5 en la que se han usado las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = -3.5, -3, \ldots, -0.5, 0$ y se ha considerado el intervalo de tiempo $(0, 15)$. ¿Qué ocurre cada vez que las soluciones cortan a la parábola $x^2 = t$?

La ecuación $x'' = x^2 - 0.1x^3 - t$ es una perturbación de la ecuación de Painlevé en la que se ha introducido el término no lineal $-0.1x^3$. Generar imágenes como las que se muestran en la figura 7.6 en las que se representado (x, x') considerando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = -5, -3, -1, 1$ en el intervalo $t \in (0, 50)$.

Problema 210. Usando el método de Euler, analizar la trayectoria de un proyectil disparado con un ángulo α respecto de la horizontal, con una velocidad inicial v_0 y sobre el que se ejerce una fuerza de rozamiento, contraria al movimiento, cuya magnitud es proporcional a $|v|^\gamma$, donde v es la velocidad y $\gamma \in [0, 2]$. Analizar distintas casos variando el ángulo de tiro, la velocidad inicial, la constante de proporcionalidad de la fuerza de rozamiento y el valor de γ.

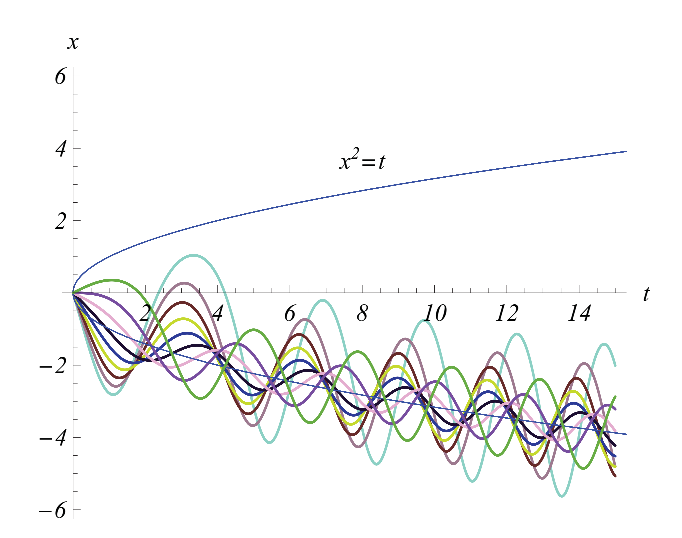


Figura 7.5: Soluciones de la ecuación de Painlevé con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = -3.5, -3, \ldots, -0.5, 0$ en el intervalo de tiempo $(0, 15)$. La curva que se muestra en azul es la parábola $x^2 = t$.

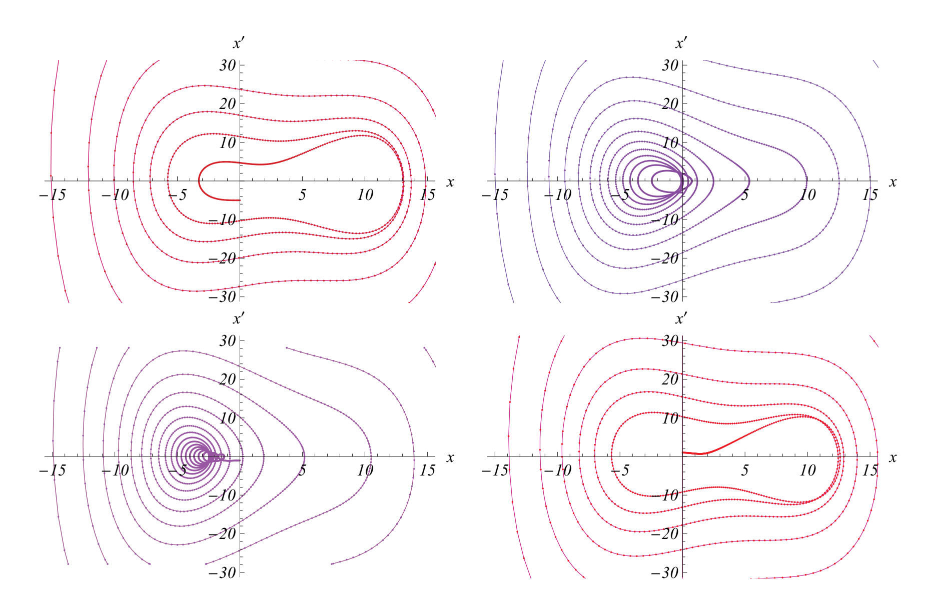


Figura 7.6: De izquierda a derecha y de arriba a abajo, se muestran las soluciones de la ecuación $x'' = x^2 - 0.1x^3 - t$ con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = -5, -3, -1, 1$ en el intervalo $t \in (0, 50)$.

Problema 211. Supongamos un sistema mecánico compuesto por una masa, m, sujeta a dos muelles idénticos, de longitud L, y confinada a moverse en la dirección horizontal sin fricción sobre la superficie en que está apoyada. La situación se ilustra en la figura 7.7. Asumimos que los muelles satisfacen la ley de Hooke; es decir, ejercen una resistencia proporcional, con constante de proporcionalidad k, al cambio de longittud respecto de su posición de equilibrio. Denotaremos por x el desplazamiento de la masa desde su posición inicial.

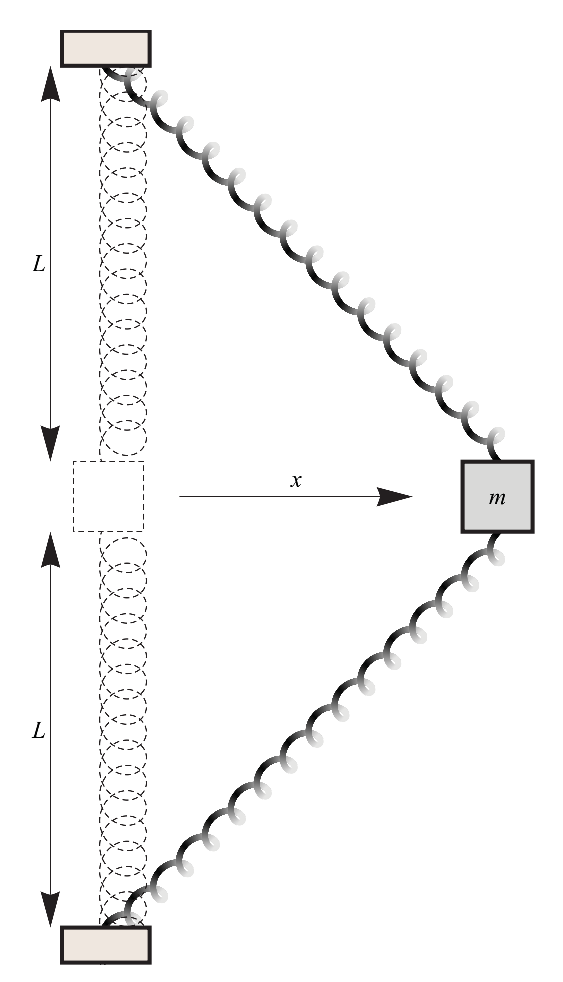


Figura 7.7: Gráfico ilustrativo de la situación descrita en el problema 211.

a) Probar que la ecuación diferencial que describe el movimiento de la masa viene dada por

$$mx'' + 2kx\left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + x^2}}\right) = 0.$$

b) Usando el método de Euler, analizar el movimiento de la masa para distintas condiciones iniciales ($x(0) = a$ y $x'(0) = b$) y considerando distintos valores para los parámetros (masa m, constante k de la ley de Hooke y longitud de los muelles L).

Problema 212. Supongamos un estanque circular de radio uno y un pato nadando en el borde del mismo en sentido contrario a las agujas del reloj. Deseamos aproximar la trayectoria de la curva de persecución de un perro, cuya posición inicial consideramos un punto interior del estanque, que intenta capturar al pato si suponemos que el perro nada n veces más lento que el pato.

a) Si (x, y) son las coordenadas paramétricas de la trayectoria del perro, probar que satisfacen las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = n\frac{\cos t - x}{\sqrt{(\cos t - x)^2 + (\operatorname{sen} t - y)^2}}$$
$$\frac{dy}{dt} = n\frac{\operatorname{sen} t - y}{\sqrt{(\cos t - y)^2 + (\operatorname{sen} t - y)^2}}.$$

b) Aproximar por el método de Euler la trayectoria para distintas posiciones iniciales del perro. En la figura 7.8 mostramos tres posibles trayectorias para el perro en las que la posición inicial aparece marcada por el punto azul.

c) Si suponemos ahora que el perfil del estanque es una cierta curva de coordenadas parámetricas (X, Y), probar que la trayectoria del perro está dada por las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = n\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2}\frac{X - x}{\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2}}$$
$$\frac{dy}{dt} = n\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2}\frac{Y - y}{\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2}}.$$

Aproximar la trayectoria para alguna curva de vuestra elección con diversas posiciones iniciales. En la figura 7.9 mostramos la trayectoria en el caso de un estanque con forma de astroide y otro con forma de lemniscata, como antes en azul se representa la posición inicial del perro

Problema 213. El sistema de Lorenz es un modelo matemático simplificado para la convección atmosférica. Este sistema está dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - \beta z, \end{cases}$$

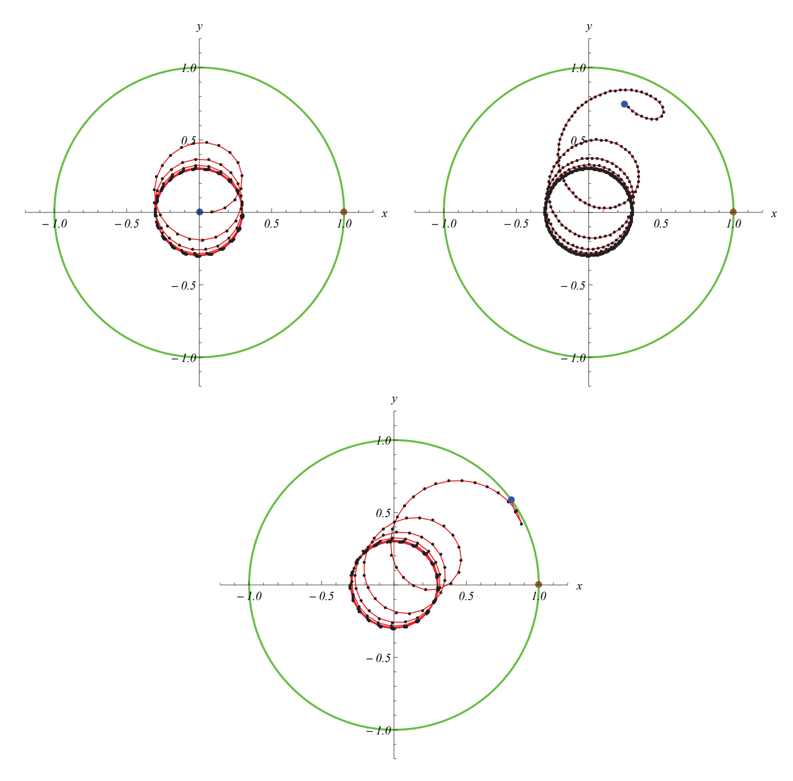


Figura 7.8: Tres trayectorias del perro en su intento de capturar al pato, la posición inicial aparece indicada por el punto azul. El punto marrón representa la posición inicial del pato.

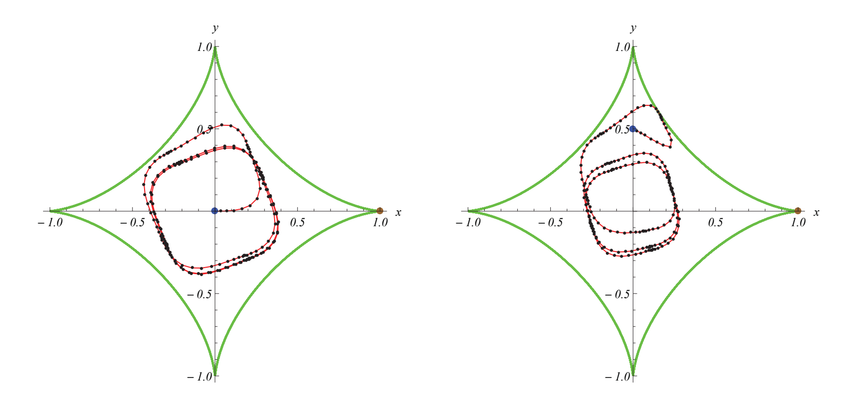


Figura 7.9: Trayectorias del perro cuando el estanque tiene forma de astroide.

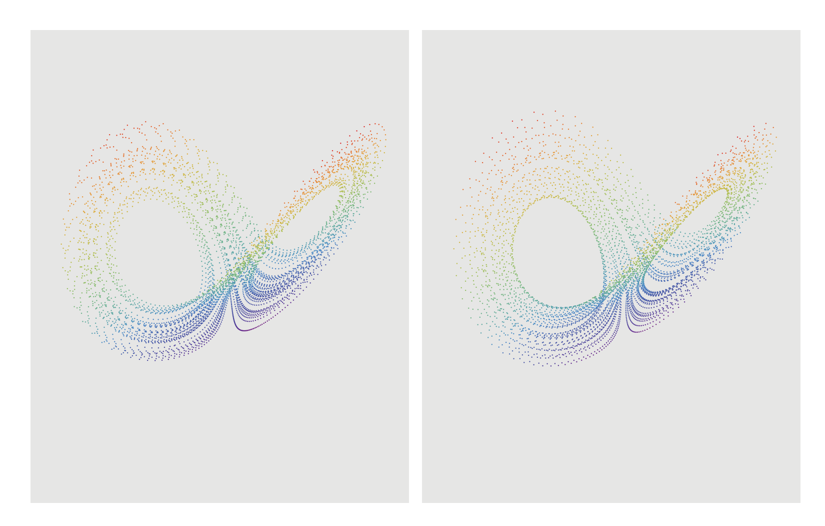


Figura 7.10: Algunas trayectorias para el sistema de Lorenz del Problema 213.

donde x, y y z representan una posición en el espacio y σ, ρ y β son parámetros. Utilizando el método de Euler traza distintas soluciones del sistema de Lorenz tomando $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, ρ variable y distintas condiciones iniciales. Debes obtener resultados similares a los de la figura 7.10.

Capítulo 8

Sistemas y ecuaciones lineales. Teoría general

8.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Sea

$$\begin{aligned} A : I &\longrightarrow M(n \times n) \\ t &\longmapsto (a_{ij}(t))_{1 \le i,j \le n}, \end{aligned}$$

con I un intervalo contenido en $\mathbb{R}$, $M(n \times n)$ el conjunto de las matrices reales[1] cuadradas de orden n y

$$A(t) = (a_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{aligned} b : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (b_1(t), \dots, b_n(t))^t. \end{aligned}$$

A partir de la matriz $A(t)$ y del vector $b(t)$ definimos el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$x' = A(t)x + b(t),$$

equivalente a

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

[1]Podríamos considerar matrices con entradas complejas pero no aportarían nada nuevo y supondrían una complicación técnica.

Este tipo de sistemas diferenciales se denominan lineales. El objetivo de esta primera sección va ser analizar este tipo de sistemas. En primer lugar veamos un resultado de existencia y unicidad de solución.

Teorema 25. *Sean $A(t)$ y $b(t)$ definidas como anteriormente y continuas en I. Entonces, para cada $t_0 \in I$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe una única solución, ϕ, del problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida en I.[2]

Demostración. Sea $[\alpha, \beta]$ un intervalo cualquiera contenido en I tal que $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Es claro que si consideramos la función

$$\begin{aligned} f : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) = A(t)x + b(t), \end{aligned}$$

el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tendrá una única solución definida en $[\alpha, \beta]$. Esto es así porque podemos aplicar el teorema de existencia y unicidad de solución global ya que f es continua y lipschitziana en la segunda variable. La continuidad es sencilla de ver. Respecto a la propiedad de Lipschitz tenemos que

$$|f(t, x) - f(t, \overline{x})| = |A(t)(x - \overline{x})| \leq \|A(t)\| \, |x - \overline{x}| \leq C|x - \overline{x}|,$$

donde hemos usado que $\|A(t)\| \leq C$, siendo $\| \cdot \|$ una cualquiera de las normas en el espacio de las matrices,[3] por ser $A(t)$ continua en $[\alpha, \beta]$.[4] Puesto que la

[2] El teorema para ecuaciones lineales de primer orden que vimos en la primera parte de estas notas es un caso particular de este; por tanto, la prueba que demos a continuación será valida para aquel también.

[3] En este punto, tal vez, convenga introducir un comentario sobre normas matriciales. Si $A \in M(n \times n)$, definimos una norma para A, denotada por $\|A\|$, como $\|A\| = \sup\{|Ax| : |x| = 1\}$, donde $| \cdot |$ denota una cualquiera de las normas de $\mathbb{R}^n$. Por definición, es clara la desigualdad que hemos utilizado: $|A(x - \overline{x})| \leq \|A\| \, |x - \overline{x}|$. Cada norma en $\mathbb{R}^n$ da lugar a una norma matricial; por ejemplo, si consideramos $|x|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ tendremos que

$$\|A\|_1 = \sup\{|Ax|_1 : |x|_1 = 1\} = \text{máx}\{|a_{1j}| + \cdots + |a_{nj}| : j = 1, \ldots, n\},$$

(la última igualdad es un interesante ejercicio). Es posible definir otras normas para matrices que no están vinculadas a normas en $\mathbb{R}^n$; de todos modos, al ser $M(n \times n)$ un espacio vectorial finito, todas las normas son equivalentes. El conjunto $(M(n \times n), \| \cdot \|)$ es un espacio de Banach. Las normas matriciales que hemos definido, asociadas con normas vectoriales, satisfacen la desigualdad $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \, \|B\|$ (luego por la equivalencia de normas se tendrá una desigualdad de este tipo, tal vez con una cierta constante, para cualquiera de las normas matriciales), cuando en un espacio de Banach se satisface una propiedad de este tipo decimos que es un álgebra de Banach.

[4] Aquí debemos comentar que la aplicación $t \longmapsto \|A(t)\|$ es continua en I si $A(t)$ lo es, ya que $\| \cdot \|$ es continua.

función f se puede definir para cualquier $[\alpha, \beta]$ contenido en I podemos asegurar la existencia y unicidad de solución en I. □

Un corolario evidente del resultado previo es

Corolario 26. *Sea $A(t)$ definida como anteriormente y continua en I. Entonces, para cada $t_0 \in I$ la única solución, ϕ, del problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} x' = A(t)x, \\ x(t_0) = 0, \end{cases}$$

es $x(t) = 0$ para todo $t \in I$.

8.2. Sistemas lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones de la forma $x' = A(t)x$, es decir con $b(t) = 0$, se denomina *sistema lineal homogéneo.* El siguiente resultado nos da la estructura algebraica de la familia de soluciones de un sistema lineal homogéneo.

Teorema 27. *El conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo $x' = A(t)x$, con $A(t) \in M(n \times n)$ continua en I, forma un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración. En primer lugar, veamos que el conjunto de soluciones del sistema $x' = A(t)x$ forma un espacio vectorial, para ello bastará ver que la función $ax_1 + bx_2$ es solución si x_1 y x_2 son dos soluciones del sistema lineal homogéneo y a y b son constantes reales. Pero esto es claro, puesto que

$$(ax_1 + bx_2)' = ax_1' + bx_2' = aA(t)x_1 + bA(t)x_2 = A(t)(ax_1 + bx_2).$$

Completaremos la prueba determinando una base de dimensión n. Consideramos $\{a_1, \dots, a_n\}$ una base de vectores de $\mathbb{R}^n$. Para cada $k = 1, \dots, n$, tomamos la función $x_k(t)\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como la única solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = A(t)x, \\ x(t_0) = a_k, \end{cases}$$

para algún $t_0 \in I$. Veamos que $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ son una base del espacio de soluciones del sistema lineal homogéneo. Viendo que son linealmente independientes y sistema generador concluiremos.

$\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ *son linealmente independientes para $t \in I$:* Esto es así por ser linealmente independientes en $t = t_0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1(t) + \cdots + \lambda_n x_n(t) = 0, \quad t \in I &\Longrightarrow \lambda_1 x_1(t_0) + \cdots + \lambda_n x_n(t_0) = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

$\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ *son un sistema generador:* Sea x una solución del sistema $x' = A(t)x$ verificando que $x(t_0) = x_0$. Teniendo en cuenta que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ son base de $\mathbb{R}^n$ existirán $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tales que $x_0 = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n$. Probando que $\beta_1 x_1(t) + \cdots + \beta_n x_n(t)$ es solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

por la unicidad, tendremos que $x = \beta_1 x_1(t) + \cdots + \beta_n x_n(t)$ y, por tanto, las funciones $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ formarán un sistema generador del espacio de soluciones. Ahora, es claro que

$$(\beta_1 x_1(t) + \cdots + \beta_n x_n(t))' = \beta_1 x_1'(t) + \cdots + \beta_n x_n'(t) = A(t)(\beta_1 x_1(t) + \cdots + \beta_n x_n(t))$$

y

$$\beta_1 x_1(t_0) + \cdots + \beta_n x_n(t_0) = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n = x_0. \quad \square$$

Nota 12. Algunos propiedades sobre la matriz fundamental.

a) Cada una de las funciones de una base del espacio de soluciones se denomina *solución fundamental*. Una matriz en la que las columnas son una base del espacio de soluciones de un sistema homogéneo se denomina *matriz fundamental*. Es decir, si $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ son una base de soluciones, la matriz

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \end{pmatrix}$$

es fundamental. Además, si $x(t)$ es una solución cualquiera del sistema homogéneo, tendremos que existirán $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que $x(t) = \lambda_1 x_1(t) + \cdots + \lambda_n x_n(t)$, por tanto,

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = X(t)\lambda$$

donde $\lambda^t = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

b) Resulta sencillo observar que, si $X(t)$ es una matriz fundamental, $X'(t) = A(t)X(t)$.[5]

c) Podría ocurrir que una matriz tuviese por columnas soluciones de un sistema lineal homogéneo y no fuese fundamental: bastaría que alguna de las columnas fuese combinación lineal de las otras. El siguiente resultado nos permite identificar una matriz fundamental.

Proposición 28. *Sea* $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \end{pmatrix}$ *una matriz cuyas columnas son soluciones del sistema lineal homogéneo* $x' = A(t)x$*, con* $A(t)$ *continua en un intervalo* I*. Entonces son equivalentes:*

[5] Entendiendo que

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

a) $X(t)$ *es una matriz fundamental.*

b) Existe $t_0 \in I$ *tal que* $\det X(t_0) \neq 0$.

c) $\det X(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$.

Demostración. a) $\Longrightarrow$ *c).* Supongamos que existe $t_0 \in I$ tal que $\det X(t_0) = 0$, entonces los vectores $\{a_1, \dots, a_n\}$, con $a_k = x_k(t_0)$, $k = 1, \dots, n$, serán linealmente dependientes. Sin embargo, esto es una contradicción ya que, por ser $X(t)$ una matriz fundamental, los vectores $\{a_1, \dots, a_n\}$ son linealmente independientes. La contradicción viene de suponer que existe $t_0 \in I$ tal que $\det X(t_0) = 0$.

c) $\Longrightarrow$ *b).* Obvio

b) $\Longrightarrow$ *a).* Si $\det X(t_0) \neq 0$, entonces los vectores $\{a_1, \dots, a_n\}$, con $a_k = x_k(t_0)$, $k = 1, \dots, n$, son una base de $\mathbb{R}^n$. De esta forma es claro que las funciones $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ son soluciones de los problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = A(t)x, \\ x(t_0) = a_k, \end{cases}$$

por tanto, forman una base de soluciones para el sistema lineal homogéneo $x' = A(t)x$ y, así, $X(t)$ es una matriz fundamental. □

d) Notad que hemos construido la base de funciones a partir de una base de $\mathbb{R}^n$, teniendo en cuenta que existen infinitas bases para $\mathbb{R}^n$, podemos asegurar que existen infinitas bases de funciones para las soluciones de un sistema lineal homogéneo y como consecuencia infinitas matrices fundamentales. Parece natural preguntarse: ¿qué relación existe entre dos matrices fundamentales distintas? La respuesta a esta cuestión es la siguiente proposición

Proposición 29. *Sean* $X(t)$ *e* $Y(t)$ *dos matrices fundamentales asociadas al sistema* $x' = A(t)x$*, con* $A(t)$ *continua en un intervalo* I*. Entonces existe una matriz* C *constante, con* $\det C \neq 0$*, tal que* $Y(t) = X(t)C$.

Demostración. En primer lugar comprobemos que la matriz $X(t)C$ es fundamental para cualquier C tal que $\det C \neq 0$. Las columnas de esta matriz serán soluciones del sistema lineal homogéneo $x' = A(t)x$ (serán combinaciones lineales de las columnas de $X(t)$) y se verificará que

$$\det(X(t)C) = \det X(t) \det C \neq 0$$

luego, por la proposición anterior, será fundamental.

Veamos que la matriz

$$C(t) = X^{-1}(t)Y(t)$$

es constante y habremos concluido, puesto que el determinante de esta matriz sera no nulo (notad que esta construcción es posible ya que, por ser una matriz fundamental, $\det X(t) \neq 0$ para todo $t \in I$).

Derivando[6]

$$\begin{aligned} C'(t) &= -X^{-1}(t)X'(t)X^{-1}(t)Y(t) + X^{-1}(t)Y'(t) \\ &= -X^{-1}(t)A(t)X(t)X^{-1}(t)Y(t) + X^{-1}(t)A(t)Y(t) = 0. \end{aligned}$$

Luego por un argumento estándar $C(t)$ es una matriz constante. □

d) Concluimos esta revisión de propiedades de la matriz fundamental de un sistema de ecuaciones lineal con un resultado clásico.

Teorema 30 (Fórmula de Abel-Liouville-Jacobi o Teorema de la traza)**.** *Sea $X(t)$ una matriz fundamental del sistema $x' = A(t)x$, con $A(t)$ continua sobre un intervalo I. Entonces*

$$(\det X(t))' = \operatorname{traza} A(t) \det X(t).$$

Además, para todo $t, t_0 \in I$ se verifica que

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{traza} A(s)\, ds\right).$$

Demostración. Es conocido que si σ_n denota las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ y si $p \in \sigma_n$ es una de estas permutaciones, $\epsilon(p)$ indica -1 elevado al número de inversiones de p, entonces

$$\det X(t) = \sum_{p \in \sigma_n} \epsilon(p) x_{1p(1)}(t) x_{2p(2)}(t) \ldots x_{np(n)}(t).$$

Así,

$$\begin{aligned} (\det X(t))' &= \sum_{p \in \sigma_n} \epsilon(p) x'_{1p(1)}(t) x_{2p(2)}(t) \ldots x_{np(n)}(t) \\ &\quad + \sum_{p \in \sigma_n} \epsilon(p) x_{1p(1)}(t) x'_{2p(2)}(t) \ldots x_{np(n)}(t) + \ldots \\ &\quad + \sum_{p \in \sigma_n} \epsilon(p) x_{1p(1)}(t) x_{2p(2)}(t) \ldots x'_{np(n)}(t) \\ &= \begin{vmatrix} x'_{11}(t) & x'_{12}(t) & \ldots & x'_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2} & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x'_{21}(t) & x'_{22}(t) & \ldots & x'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2} & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

[6]Se verifica que

$$(X^{-1}(t))' = -X^{-1}(t)X'(t)X^{-1}(t).$$

Esto se obtiene del siguiente modo

$$\begin{aligned} X^{-1}(t)X(t) = I_{n\times n} &\Longrightarrow (X^{-1}(t))'X(t) + X^{-1}(t)X'(t) = 0_{n\times n} \\ &\Longrightarrow (X^{-1}(t))' = -X^{-1}(t)X'(t)X^{-1}(t). \end{aligned}$$

La regla de derivación estándar sería $(X^{-1}(t))' = -X^{-2}(t)X'(t)$ pero no se satisface porque el producto de matrices no es commutativo.

$$+\cdots+\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1}(t) & x'_{n2} & \dots & x'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Trabajemos ahora sobre el primero de estos determinantes, el resto van a funcionar del mismo modo. Por ser $X(t)$ matriz fundamental del sistema $x' = A(t)x$ tendremos que

$$x'_{1j}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(t)x_{kj}(t), \quad j = 1, \dots, n.$$

Con esto el primer determinante se transforma en

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(t)x_{k1}(t) & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(t)x_{k2}(t) & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(t)x_{kn}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2} & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

que, aplicando propiedades de los determinantes, es igual a

$$a_{11}(t)\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2} & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + a_{12}(t)\begin{vmatrix} x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2} & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+ a_{1n}(t)\begin{vmatrix} x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2} & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t)\det X(t),$$

donde en el último paso hemos aplicado que un determinante con dos filas iguales es nulo. De este modo, procediendo de manera análoga con los restantes determinantes de $(\det X(t))'$, deducimos que

$$\begin{aligned}(\det X(t))' &= (a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)) \det X(t) \\ &= \operatorname{traza} A(t) \det X(t).\end{aligned}$$

Para obtener la última parte basta proceder a resolver la ecuación de variables separadas y usar que el determinante de una matriz fundamental de un sistema lineal homogéneo es no nulo. □

Figura 8.1: Los tres personajes involucrados en el Teorema 30, de izquierda a derecha Niels Henrik Abel (1802–1829), Joseph Liouville (1809–1882) y Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851). A pesar de haber muerto con 27 años y sin querer desmerecer el trabajo de los otros dos, la obra de Abel ha sido una de las más influyentes en la matemática de los siglos XIX y XX. En Noruega, país de origen de Abel, se entrega cada año la medalla Abel que, con permiso de las medallas Fields que se entregan cada cuatro años, puede considerarse el premio Nobel de las matemáticas.

8.2.1. Reducción de la dimensión de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo

Sea el sistema lineal homogéneo $x' = A(t)x$, con $A(t) \in M(n \times n)$. Supongamos que $x_1, \ldots, x_r$, con $r < n$, son soluciones linealmente independientes conocidas del sistema. Consideramos la matriz cuadrada de orden n

$$P(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1r} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(r-1)1} & \ldots & x_{(r-1)r} & 0 & \ldots & 0 \\ x_{r1} & \ldots & x_{rr} & 0 & \ldots & 0 \\ x_{(r+1)1} & \ldots & x_{(r+1)r} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nr} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

donde hemos colocada por columnas las r soluciones conocidas y hemos completado la $n-r$ columnas restantes con una matriz de ceros de tamaño $r \times (n-r)$ (en la parte superior) y con la matriz identidad de orden $n-r$ (en la parte inferior). El cambio de función $x = P(t)z$, nos reduce el sistema de dimensión n a otro de dimensión $n-r$ (involucrando a las funciones $z_{r+1}, \ldots, z_n$) y a r ecuaciones elementales. La prueba es laboriosa y no aporta nada especial, veamos un ejemplo que siempre resulta más ilustrativo.

Ejemplo 34. Obtener una matriz fundamental para el sistema $x' = A(t)x$, con

$$A(t) = \frac{1}{1-t^2}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}, \qquad t \in (-1, 1),$$

sabiendo que $x_1(t) = (1, t)$ es una solución.

Resulta elemental verificar que $x_1'(t) = A(t)x_1(t)$. Construimos la matriz de cambio

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando $x = P(t)z$ tendremos que $x' = P'(t)z + P(t)z'$, que sustituido en el sistema propuesto nos da

$$P'(t)z + P(t)z' = A(t)P(t)z \Longrightarrow z' = P^{-1}(t)(A(t)P(t) - P'(t))z.$$

Usando que

$$P'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix},$$

llegamos a

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{1-t^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

o, equivalentemente,

$$z_1' = \frac{z_2}{1-t^2} \qquad \text{y} \qquad z_2' = -\frac{2t}{1-t^2}z_2.$$

La segunda de la ecuaciones (o sistema de dimensión uno) es de variables separadas y una vez que la resolvamos la primera será elemental. Resolviendo llegamos a $z_1(t) = ct + k$ y $z_2(t) = c(1-t^2)$ y deshaciendo el cambio concluimos que

$$x = P(t)z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct + k \\ c(1-t^2) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Por tanto, como segunda solución podemos considerar $x_2(t) = (t, 1)$ y la matriz fundamental será

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Cualquier solución del sistema dado se escribirá como $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) = (\alpha t + \beta, \beta t + \alpha)$, para $t \in (-1, 1)$. Las soluciones describen una familia de segmentos. Si, por ejemplo, imponemos que cada uno de los segmentos pase para $t = 0$ por el punto $(\cosh a, \operatorname{senh} a)$ para $a \in \mathbb{R}$; es decir, si consideramos la condición inicial $x(0) = (\cosh a, \operatorname{senh} a)$, los segmentos estarán contenidos en las rectas de ecuación $x \cosh a - y \operatorname{senh} a = 1$. Resulta interesante observar que la envolvente de esta familia de rectas es precisamente la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. En el caso de considerar la condición inicial $x(0) = (\cos a, \operatorname{sen} a)$, $a \in [-\pi, \pi]$, las rectas son $x \cos a - y \operatorname{sen} a = \cos(2a)$ y la envolvente de la familia de segmentos resulta ser una astroide girada. Ambos casos se muestran en la figura 8.2. $\triangleleft$

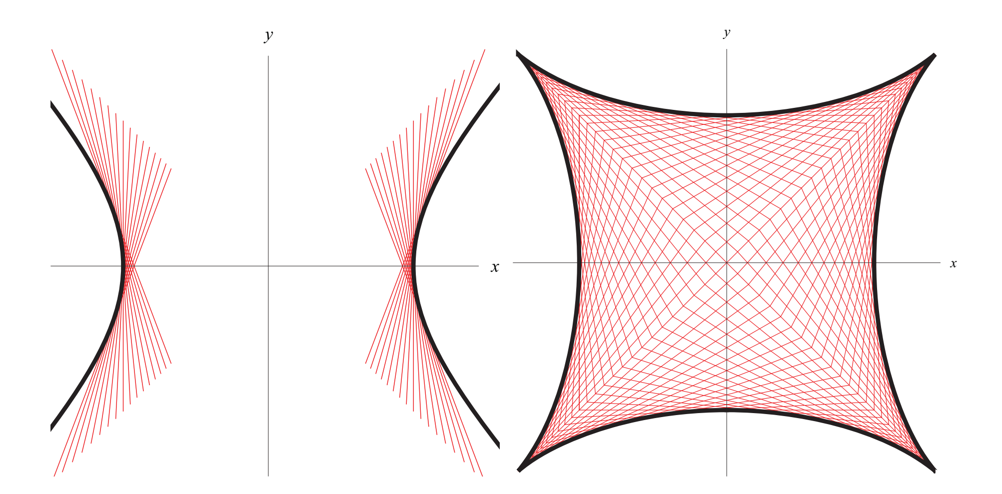


Figura 8.2: A la izquierda las soluciones del Ejemplo 34 con la condición inicial $x(0) = (\cosh a, \operatorname{senh} a)$ y a la derecha las correspondientes a $x(0) = (\cos a, \operatorname{sen} a)$. En ambos casos se muestra en negro la envolvente de la familia de segmentos.

8.3. Sistemas lineales no homogéneos

A continuación analizaremos la estructura de las soluciones del sistema de ecuaciones lineal $x' = A(t)x + b(t)$, siendo $A(t) \in M(n \times n)$ y $b(t) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ como al principio de este capítulo. Al referirnos a este sistema (en el que hemos impuesto $b(t) \neq 0$) hablaremos de sistema lineal no homogéneo.

Proposición 31. *Sean $A(t)$ y $b(t)$ continuas en un cierto intervalo I. Si $X(t)$ es una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo $x' = A(t)x$ y $x_p(t)$ es una solución particular del sistema lineal no homogéneo $x' = A(t)x + b(t)$, entonces cualquier otra solución, $x(t)$, del sistema lineal no homogéneo puede escribirse como $x(t) = x_p(t) + X(t)C$, con $C^t = (C_1, \ldots, C_n)$.*

Demostración. Es sencillo comprobar que $x_p(t) + X(t)C$ es solución del sistema lineal no homogéneo. En efecto,

$$\begin{aligned}(x_p(t) + X(t)C)' &= x_p'(t) + X'(t)C \\ &= A(t)x_p(t) + b(t) + A(t)X(t)C \\ &= A(t)(x_p(t) + X(t)C) + b(t).\end{aligned}$$

Veamos ahora que cada solución del sistema lineal no homogéneo puede escribirse de esta forma. Sea $x(t)$ una solución cualquiera del sistema lineal no homogéneo, consideramos $x(t) - x_p(t)$. Esta función es solución del sistema lineal homogéneo $x' = A(t)x$, para verlo es suficiente una pequeña comprobación

$$\begin{aligned}(x(t) - x_p(t))' &= x'(t) - x_p'(t) \\ &= A(t)x(t) + b(t) - (A(t)x_p(t) + b(t)) = A(t)(x(t) - x_p(t)).\end{aligned}$$

Por tanto existirá un vector $C^t = (C_1, \dots, C_n)$ tal que $x(t) - x_p(t) = X(t)C$ y habremos concluido. □

Esta proposición nos ha reducido el problema de encontrar la solución de un sistema lineal no homogéneo a encontrar una solución particular y a determinar una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo asociado. La siguiente proposición va a simplificarnos un poco más el trabajo.

Proposición 32 (Principio de superposición de soluciones)**.** *Si las funciones* $x_{p,1}, \dots, x_{p,k}$ *son soluciones particulares de los sistemas*

$$x' = A(t)x + b_1(t), \dots, x' = A(t)x + b_k(t),$$

entonces $x_{p,1} + \cdots + x_{p,k}$ *es una solución particular del sistema*

$$x' = A(t)x + b_1(t) + \cdots + b_k(t).$$

La demostración es elemental y la dejamos como ejercicio para el lector.

Obviamente el problema ahora radica en poder encontrar soluciones particulares para los sistemas no homogéneos. Veamos un procedimiento para hacerlo, es el denominado *método de variación de las constantes* y generaliza el visto para ecuaciones lineales de primer orden.

Sea $X(t)$ una matriz fundamental asociada con el sistema homogéneo $x' = A(t)x$. Cada solución de este sistema puede escribirse como $x(t) = X(t)C$, con $C^t = (C_1, \dots, C_n)$. La idea, igual que para las ecuaciones lineales de primer orden, consiste en suponer que $x(t) = X(t)C(t)$ donde $C^t(t) = (C_1(t), \dots, C_n(t))$, proceder a sustituir en el sistema lineal no homogéneo $x' = A(t)x + b(t)$ y obtener $C(t)$. Teniendo en cuenta que $(X(t)C(t))' = X'(t)C(t) + X(t)C'(t) = A(t)X(t)C(t) + X(t)C'(t)$, al sustituir en el sistema no homogéneo llegaremos a

$$X(t)C'(t) = b(t) \Longrightarrow C'(t) = X^{-1}(t)b(t) \Longrightarrow C(t) = \int X^{-1}(t)b(t)\,dt.$$

Es posible elegir una primitiva que valga cero para algún valor t_0, para obtener que $C(t) = \int_{t_0}^t X^{-1}(s)b(s)\,ds$ y, por tanto,

$$x_p(t) = X(t)\int_{t_0}^t X^{-1}(s)b(s)\,ds.$$

***Ejemplo* 35.** Encontrar la solución del problema de valores iniciales

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(wt) \\ w\cos(wt) \end{pmatrix}, \quad x(0) = (1, 0),$$

con $w \neq 0$, sabiendo que $x_1(t) = (\operatorname{sen}(wt), w\cos(wt))$ es solución del sistema homogéneo asociado.

Comenzaremos obteniendo una matriz fundamental para el sistema homogéneo asociado. Para ello haremos uso del método de reducción de la dimensión

del sistema que hemos visto en la subsección anterior. Es sencillo comprobar que, efectivamente, $x_1(t)$ es solución del sistema homogéneo. Consideramos la matriz

$$P(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(wt) & 0 \\ w\cos(wt) & 1 \end{pmatrix}$$

y hacemos el cambio de función $x = P(t)z$, con el que llegamos al sistema

$$z' = \frac{1}{\operatorname{sen}(wt)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -w\cos(wt) \end{pmatrix},$$

puesto que

$$P^{-1}(t) = \frac{1}{\operatorname{sen}(wt)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w\cos(wt) & \operatorname{sen}(wt) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P'(t) = \begin{pmatrix} w\cos(wt) & 0 \\ -w^2\operatorname{sen}(wt) & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto da lugar a las ecuaciones

$$z_1' = \frac{z_2}{\operatorname{sen}(wt)} \qquad \text{y} \qquad z_2' = -\frac{w\cos(wt)}{\operatorname{sen}(wt)} z_2$$

cuyas soluciones son

$$z_1 = -k\frac{\cos(wt)}{w\operatorname{sen}(wt)} + c \qquad \text{y} \qquad z_2 = \frac{k}{\operatorname{sen}(wt)}.$$

Deshaciendo el cambio tendremos

$$x = P(t)z = \begin{pmatrix} -k\frac{\cos(wt)}{w} + c\operatorname{sen}(wt) \\ k\operatorname{sen}(wt) + cw\cos(wt) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \operatorname{sen}(wt) \\ w\cos(wt) \end{pmatrix} - \frac{k}{w}\begin{pmatrix} \cos(wt) \\ -w\operatorname{sen}(wt) \end{pmatrix}$$

y tendremos la solución $x_2(t) = (\cos(wt), -w\operatorname{sen}(wt))$ y la matriz fundamental

$$X(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(wt) & \cos(wt) \\ w\cos(wt) & -w\operatorname{sen}(wt) \end{pmatrix}.$$

Si suponemos que una solución particular va ser de la forma $x_p(t) = X(t)C(t)$ tendremos que podemos tomar

$$C(t) = \int_0^t X^{-1}(s)\begin{pmatrix} \operatorname{sen}(ws) \\ w\cos(ws) \end{pmatrix} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$

puesto que

$$X^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(ws) & \frac{\cos(ws)}{w} \\ \cos(ws) & -\frac{\operatorname{sen}(ws)}{w} \end{pmatrix}.$$

Así, la solución particular será $x_p(t) = (t\operatorname{sen}(wt), wt\cos(wt))$ y la solución general del sistema vendrá dada por

$$x(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(wt) & \cos(wt) \\ w\cos(wt) & -w\operatorname{sen}(wt) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\operatorname{sen}(wt) \\ wt\cos(wt) \end{pmatrix},$$

para ciertas constantes c_1 y c_2. Imponiendo la condición inicial $x(0) = (1, 0)$ obtenemos $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$ y, con esto, la solución buscada es $x(t) = (t\operatorname{sen}(wt) + \cos(wt), w(t\cos(wt) - \operatorname{sen}(wt)))$. $\triangleleft$

Material complementario

¡La belleza puede aparecer en cualquier parte!

Uno de los principios fundamentales que me han guiado desde que comencé a escribir estas notas ha sido hacerlas atractivas para el lector o el estudiante que se acerque a ellas. Un capítulo como este, con un contenido teórico tan abundante, siempre me ha parecido que quedaba un poco parco en imágenes. Durante las primeras versiones de este trabajo era una sucesión de resultados y ejemplos que conseguían agotar a cualquiera. Indagando en la posibilidad de ilustrar de algún modo el capítulo reparé en el ejemplo anterior. En un principio, un ejemplo más de los muchos que he incluido. Sin embargo, al trazar las curvas solución me llevé una muy grata sorpresa.

En un primer intento de ilustrar el ejemplo me planteé dibujar la curva solución para algunos valores del parámetro w. Para ello recurrí a Mathematica. *Definí una función que dado un valor del parámetro w me trazase la curva solución del Ejemplo 35:*

```
dib[w_] := ParametricPlot[
             {t*Sin[w*t] + Cos[w*t], w*(t*Cos[w*t] - Sin[w*t])},
             {t, -4*Pi/Abs[w], 4*Pi/Abs[w]},
             PlotStyle -> {Thickness[0.01], Hue[1 - Abs[w]/8]},
             AxesStyle -> Directive[Italic, Medium]
             AspectRatio -> Automatic]
```

El resultado para los valores $w = -3, 3, -2, 2, -1$ y 1 (obtenido con el comando `Table[dib[w], dib[-w], w, 1, 3]`) se muestra, de izquierda a derecha, Realmente la curva en si misma no es nada espectacular: un lazo, con simetría respecto del eje horizontal y con distinto comportamiento para w y $-w$. en la figura 8.3.

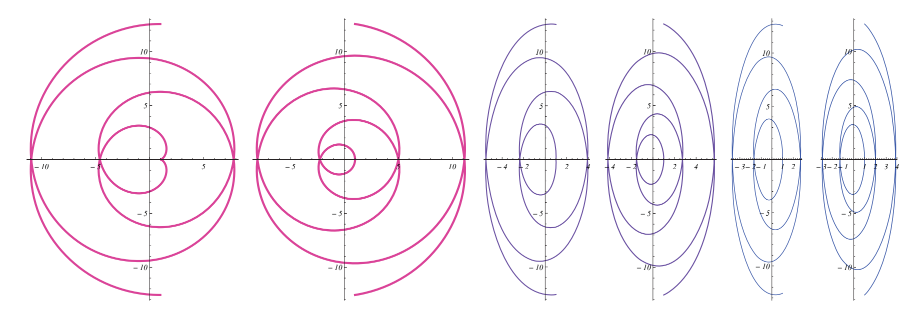


Figura 8.3: La curva solución del problema de valores iniciales del Ejemplo 35 para distintos valores de w.

A primera vista parecía que las curvas no ofrecían muchas posibilidades pero, a pesar de ello, hice un intento. Comencé por modificar la función de dibujo para que trazase la curva más fina y para que tomase una gama de colores distinta, en concreto definí

```
dib2[w_] := ParametricPlot[
              {t*Sin[w*t] + Cos[w*t], w*(t*Cos[w*t] - Sin[w*t])},
              {t, -4*Pi/Abs[w], 4*Pi/Abs[w]},
              PlotStyle -> {Thickness[0.003], Hue[Abs[w]/8]},
              AspectRatio -> Automatic]
```

Con esta nueva función de dibujo le solicité a Mathematica que generase una imagen mostrando varias curvas juntos para valores positivos del parámetro w mediante la orden

```
Show[Table[{dib2[w]}, {w, 0.75, 6, 0.25}],
     Axes -> False,
     Background -> Black,
     FrameStyle -> Directive[Red, Thickness[0.03]],
     Frame -> True,
     FrameTicks -> False,
     PlotRange -> {{-12, 16}, {-14.5, 14.5}}]
```

También le solicite que mostrase una imagen con valores negativos del parámetro cambiando `w` *por* `-w`*. El resultado se muestra en la figura 8.4, a la izquierda para valores positivos de w y a la derecha para negativos. en la figura 8.3.*

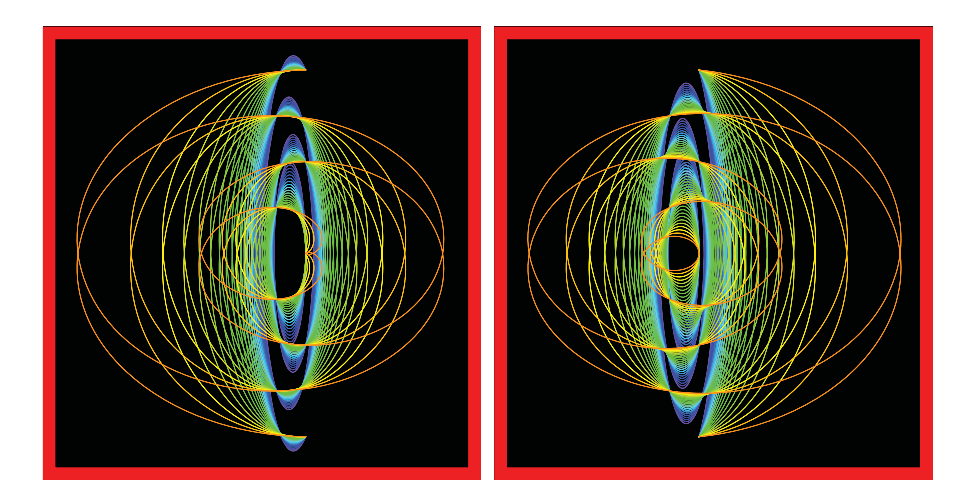


Figura 8.4: A la izquierda varias curvas solución del problema de valores iniciales del Ejemplo 35 con valores positivo de w y a la derecha las mismas curvas pero con los valores de w en negativo.

El resultado obtenido con unas sencillas aportaciones estéticas (el fondo negro y el marco rojo) era realmente interesante. En esa situación, lo obvio era intentar juntar ambos dibujos en un sólo gráfico. Para ello bastaba con sustituir en la orden anterior la línea `Table[dib2[w], w, 0.75, 6, 0.25]` *por* `Table[dib2[w],dib2[-w], w, 0.75, 6, 0.25]`*. El conjunto, como puede apreciarse en la figura 8.5, resulta bastante espectacular. Sin duda alguna, ¡la belleza puede aparecer en cualquier parte!*

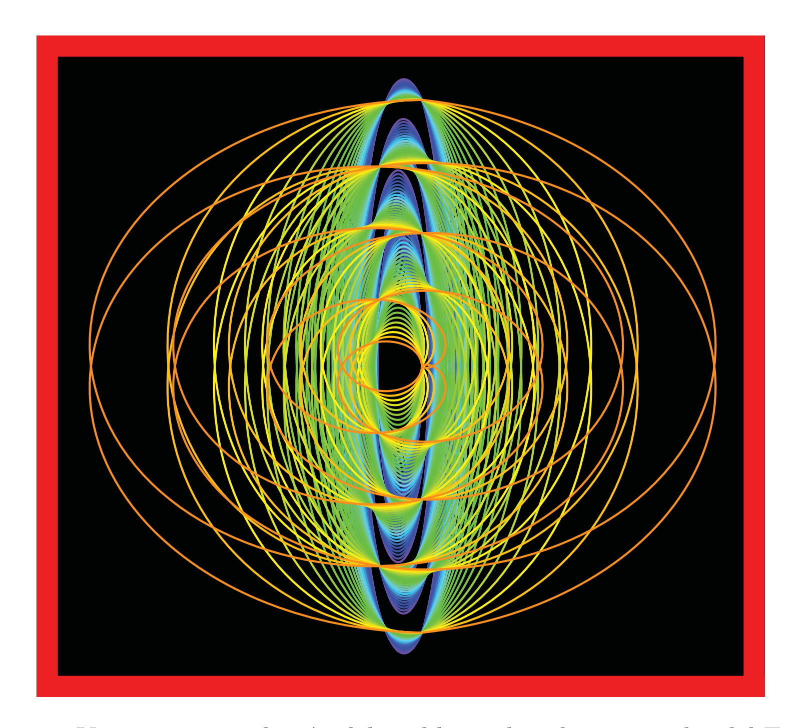


Figura 8.5: Varias curvas solución del problema de valores iniciales del Ejemplo 35 para valores positivo y negativos de w.

8.4. Un sistema de ecuaciones no lineal y los nudos tóricos

Aunque la parte fundamental de este capítulo es el estudio de la teoría general de ecuaciones y sistemas diferenciales lineales, hemos pensado que el estudio de un sistema de ecuaciones no lineal puede resultar interesante. Estos sistemas no suelen ser resolubles en forma cerrada en la mayor parte de los casos; sin embargo el sistema que analizaremos podremos resolverlo de manera

explícita gracias a una transformación apropiada que lo convertirá en un sistema lineal. Las soluciones que obtengamos nos permitirán visualizar una familia de curvas de gran interés en matemáticas: *los nudos tóricos*.

El sistema en cuestión al que nos referimos es

$$(S)\begin{cases} x' = -my + nxz, \\ y' = mx + nyz, \\ z' = \frac{n}{2}(1 + z^2 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Si le añadimos la condición inicial $(x(0), y(0), z(0)) = (a, b, c)$, estaremos interesados en soluciones para las que se cumpla la condición $a^2 + b^2 \neq 0$.

Como ya hemos comentado, mediante una transformación apropiada reduciremos el sistema a otro lineal que si seremos capaces de manipular. La siguiente proposición nos muestra como hacerlo.

Proposición 33. *Sea* $\Delta = 1 + a^2 + b^2 + c^2$. *Si* (X, Y, Z, D) *es una solución del sistema de ecuaciones*

$$(S')\begin{cases} X' = -mY, \\ Y' = mX, \\ Z' = n(D - \Delta), \\ D' = -nZ, \end{cases}$$

verificando $(X(0), Y(0), Z(0), D(0)) = 2(a, b, c, 1)$, *entonces*

$$(x, y, z) = \left(\frac{X}{D}, \frac{Y}{D}, \frac{Z}{D}\right)$$

es una solución del sistema (S) *verificando que* $(x(0), y(0), z(0)) = (a, b, c)$.

Demostración. Veamos en primer lugar que $x = \frac{X}{D}$ e $y = \frac{Y}{D}$ satisfacen las dos primeras ecuaciones de (S). La prueba en ambos casos es análoga y sólo analizaremos la correspondiente a x. En efecto, derivando y usando las relaciones para X' y D' dadas en el sistema (S'), tenemos que

$$x' = \frac{X'}{D} - X\frac{D'}{D^2} = -m\frac{Y}{D} + n\frac{XZ}{D^2} = -my + nxz.$$

La prueba de que $z = \frac{Z}{D}$ satisface la tercera ecuación en (S) es más delicada. En primer lugar debemos probar que

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + D^2 = 2D\Delta. \tag{8.1}$$

Para ello consideremos la función

$$F(t) = X^2(t) + Y^2(t) + Z^2(t) + (D(t) - \Delta)^2.$$

Usando las relaciones del sistema (S'), Resulta sencillo comprobar que

$$F'(t) = 2(X(t)X'(t) + Y(t)Y'(t) + Z(t)Z'(t) + (D(t) - \Delta)D'(t)) = 0$$

y, por tanto, $F(t) = K$. Ahora, con la condición $(X(0), Y(0), Z(0), D(0)) = 2(a, b, c, 1)$, podemos deducir que $K = \Delta^2$, lo que completa la comprobación de (8.1). Ahora, para $z = \frac{Z}{D}$, con las relaciones en (S'), se cumple que

$$z' = \frac{Z'}{D} - Z\frac{D'}{D^2} = \frac{n}{D^2}(D(D-\Delta) + Z^2),$$

de donde, usando (8.1) para eliminar el factor $D\Delta$, finalizamos que

$$\begin{aligned} z' &= \frac{n}{D^2}\left(D^2 + Z^2 - \frac{X^2 + Y^2 + Z^2 + D^2}{2}\right) \\ &= \frac{n}{2}\frac{D^2 + Z^2 - X^2 - Y^2}{D^2} \\ &= \frac{n}{2}(1 + z^2 - x^2 - y^2). \quad \square \end{aligned}$$

Tras esta proposición nos basta con estudiar las soluciones del sistema (S'). Es sencillo observar que este sistema se puede desacoplar en dos sistemas, uno conteniendo (X, Y) y otro (Z, D),

$$(S_1')\begin{cases} X' = -mY, \\ Y' = mX, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad (S_2')\begin{cases} Z' = n(D-\Delta), \\ D' = -nZ. \end{cases}$$

Para obtener la solución de (S_1') debemos observar que si tomamos una nueva función W tal que $X = -mW$ el sistema se transforma en

$$\begin{pmatrix} W' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ Y \end{pmatrix}.$$

Este último sistema es precisamente el que hemos analizado en el ejemplo anterior y sus soluciones serán

$$(W, Y) = (c_1 \operatorname{sen}(mt) + c_2 \cos(mt), c_1 m \cos(mt) - c_2 m \operatorname{sen}(mt)),$$

de modo que si recuperamos la función X se tiene que

$$(X, Y) = (d_1 \operatorname{sen}(mt) + d_2 \cos(mt), -d_1 \cos(mt) + d_2 \operatorname{sen}(mt)).$$

Con las condiciones $(X(0), Y(0)) = 2(a, b)$, llegamos a que

$$(X, Y) = 2(a \cos(mt) - b \operatorname{sen}(mt), b \cos(mt) + a \operatorname{sen}(mt)).$$

Para resolver (S_2') comenzamos observando que su sistema homogéneo coincide con (S_1') tomando $m = -n$ y por tanto su matriz fundamental será

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(nt) & \cos(nt) \\ -\cos(nt) & -\operatorname{sen}(nt) \end{pmatrix}.$$

Bucando una solución particular para el sistema no homogéneo de la forma

$$\begin{pmatrix} Z_p(t) \\ D_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(nt) & \cos(nt) \\ -\cos(nt) & -\operatorname{sen}(nt) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

se deberá cumplir que

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(ns) & \cos(ns) \\ -\cos(ns) & -\operatorname{sen}(ns) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -n\Delta \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \Delta(1-\cos(nt)) \\ -\Delta \operatorname{sen}(nt) \end{pmatrix}$$

y, por tanto,

$$\begin{pmatrix} Z_p(t) \\ D_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta \operatorname{sen}(nt)) \\ \Delta(1-\cos(nt)) \end{pmatrix}.$$

Así

$$(Z, D) = (-c_1 \operatorname{sen}(nt) + c_2 \cos(nt) - \Delta \operatorname{sen}(nt), \\ - c_1 \cos(nt) - c_2 \operatorname{sen}(nt) + \Delta(1 - \cos(nt)))$$

y usando la condición inicial $(Z(0), D(0)) = 2(c, 1)$ concluimos que

$$(Z, D) = (2c \cos(nt) + (2 - \Delta) \operatorname{sen}(nt), \Delta - 2c \operatorname{sen}(nt) + (2 - \Delta) \cos(nt)).$$

Ahora resulta inmediato que las soluciones del sistema (S) son

$$x = \frac{X}{D} = \frac{2(a\cos(mt) - b\operatorname{sen}(mt))}{\Delta - 2c\operatorname{sen}(nt) + (2-\Delta)\cos(nt)},$$

$$y = \frac{Y}{D} = \frac{2(b\cos(mt) + a\operatorname{sen}(mt))}{\Delta - 2c\operatorname{sen}(nt) + (2-\Delta)\cos(nt)}$$

y

$$z = \frac{Z}{D} = \frac{2c\cos(nt) + (2-\Delta)\operatorname{sen}(nt)}{\Delta - 2c\operatorname{sen}(nt) + (2-\Delta)\cos(nt)}.$$

Es sencillo comprobar que las trayectorias descritas por las soluciones de (S) se encuentran sobre el toro generado por la rotación alrededor del eje z de la circunferencia $(x-k)^2 + z^2 = k^2 - 1$, donde $k = \frac{\Delta}{2\sqrt{a^2+b^2}}$. Cuando m y n son enteros primos entre si, las trayectorias son los denominados nudos tóricos de tipo (m, n). En la figura 8.6 se muestran los nudos tóricos $(2, 3)$ (conocido como trébol) y $(4, 5)$. Un nudo tórico de tipo (m, n) es una trayectoria cerrada sobre la superficie del toro que rodea m veces al eje z y n veces a la circunferencia generatriz del toro. Para construir un nudo tórico de tipo (m, n) basta considerar un cuadrado de lado unidad, dividirlo en $m \times n$ rectángulos de base $1/n$ y altura $1/m$ y trazar las diagonales de cada uno de los rectángulos. En la figura 8.7 se muestra la división que debe hacerse del cuadrado unidad para generar el nudo tórico $(2, 3)$. Al identificar (podemos pensar en enrollar) en primer lugar los lados horizontales del cuadrado y posteriormente los lados verticales tendremos un toro y las diagonales que hemos trazado describirán el nudo tórico de tipo (m, n). Esto será así si m y n son primos entre sí, en caso de que $\text{mcd}\{m, n\} = k$ obtendremos k copias del nudo tórico $(m/k, n/k)$. Si m/n es irracional las

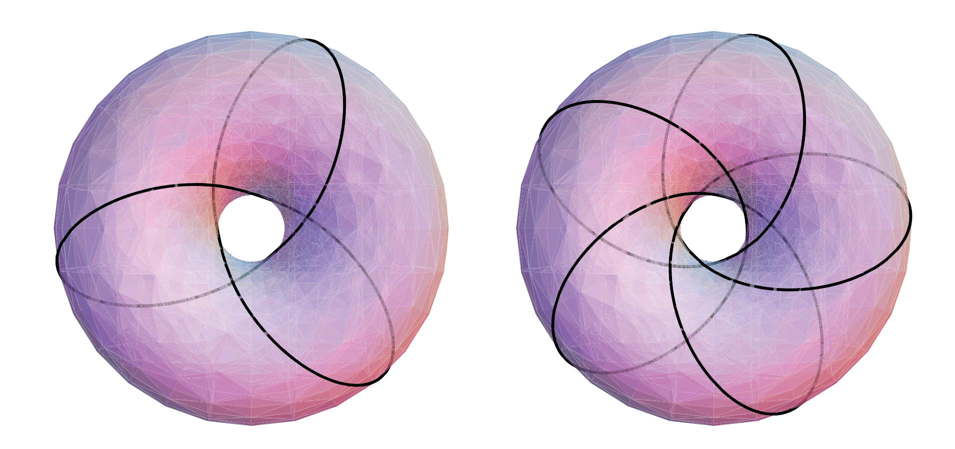


Figura 8.6: Los nudos tóricos para $(m, n) = (2, 3)$ (conocido como trébol) y $(m, n) = (4, 5)$.

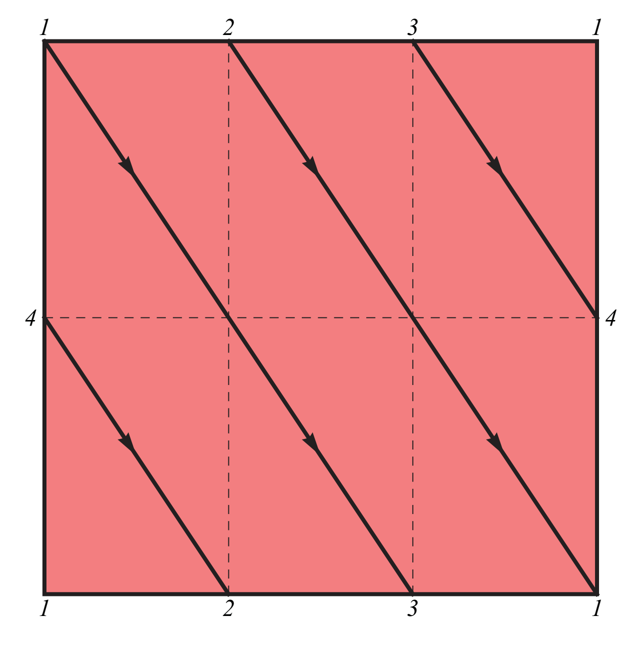


Figura 8.7: División del cuadrado unidad para generar el nudo tórico $(m, n) = (2, 3)$.

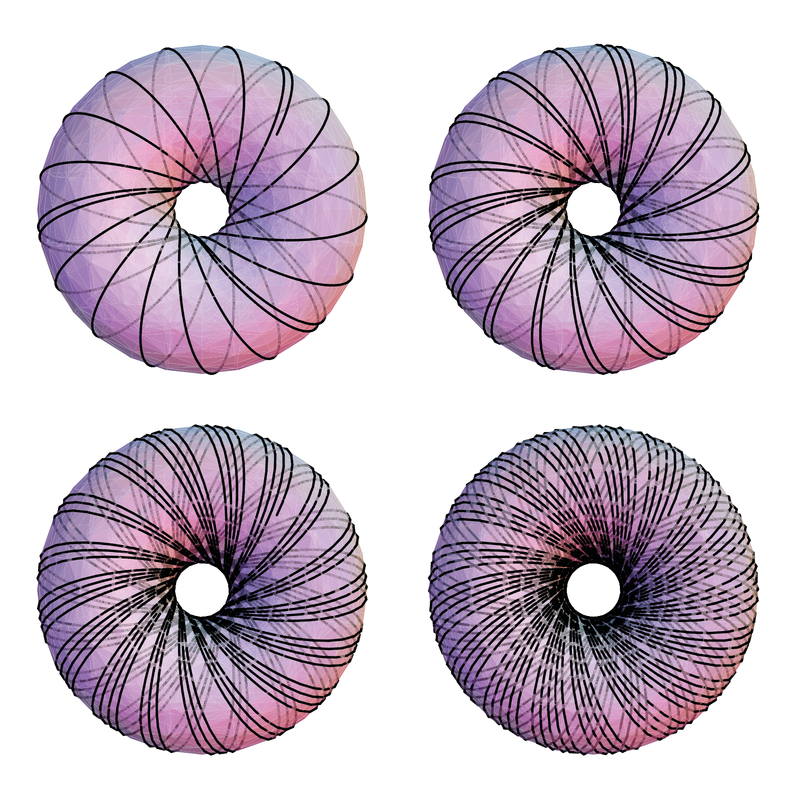


Figura 8.8: Cuatro instantáneas de la solución del sistema (S) para $(m, n) = (1, \sqrt{2})$.

soluciones de (S) no son curvas cerradas y, de hecho, son densas en el toro. En la figura 8.8 hemos trazado cuatro instantáneas de la curva solución de (S) para $(m, n) = (1, \sqrt{2})$, observad como la curva va llenando poco a poco toda la superficie del toro.

Para apreciar el efecto de los términos no lineales en el sistema (S), podemos plantearnos resolver

$$(S_L)\begin{cases} x' = -my, \\ y' = mx, \\ z' = \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Las soluciones del sistema (S_L) son una familia de hélices. En efecto, si consideramos la condición inicial $(x(0), y(0), z(0)) = (a, b, c)$ la solución de (S_L) es

$$x = a\cos(mt) - b\operatorname{sen}(mt), \qquad y = b\cos(mt) + a\operatorname{sen}(mt) \quad \text{y} \quad z = \frac{n}{2}t + c.$$

La hélice solución para los valores $(m, n) = (2, 3)$ se puede ver en la figura 8.9.

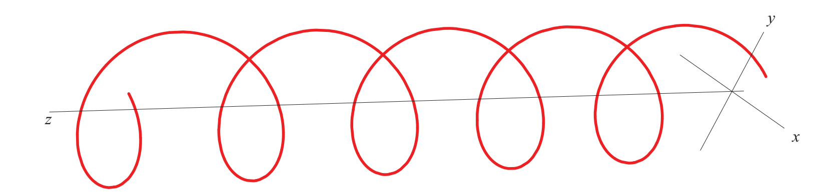


Figura 8.9: La hélice solución del sistema (S_L) para $(m, n) = (2, 3)$.

La idea de esta sección está tomada del artículo "A three-dimensional system with knotted trajectories" de R. Parris, aparecido en la revista *The American Mathematical Monthly* en 1977, págs. 468–469.

8.5. Ecuaciones lineales de orden n

Sean, para $i = 1, \dots, n$, las funciones

$$\begin{aligned} a_i : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto a_i(t), \end{aligned}$$

definidas sobre un intervalo I contenido en $\mathbb{R}$, y

$$\begin{aligned} c : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c(t). \end{aligned}$$

A la ecuación

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = c(t) \tag{8.2}$$

se le denomina ecuación lineal de orden n. Mediante el cambio $x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}$, si tomamos $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, la ecuación (8.2) se transforma en el sistema lineal

$$\overline{x}' = A(t)\overline{x} + b(t), \tag{8.3}$$

con la matriz

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

y el vector

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Nota 13. Por la transformación que relaciona (8.2) y (8.3), es sencillo verificar que

a) si $x(t)$ es una solución de (8.2), entonces $(x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ es una solución de (8.3); y,

b) si $\overline{x} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ es una solución de (8.3), entonces $x_1(t)$ es una solución de (8.2).

Es decir, existe una correspondencia biyectiva entre las soluciones de la ecuación (8.2) y las del sistema (8.3). Este hecho nos va a permitir reescribir, sin necesidad de demostración, todos los resultados que hemos visto para sistemas de ecuaciones lineales en el contexto de las ecuaciones lineales de orden n.

Veamos, en primer lugar, un resultado de existencia y unicidad de solución para ecuaciones lineales de orden n, que es el equivalente al Teorema 25 para ecuaciones lineales.

Teorema 34. *Sean $a_i(t)$, con $i = 1, \dots, n$, y $c(t)$ funciones continuas en un intervalo I. Entonces, para cada $t_0 \in I$ y $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$, existe una única solución, ϕ, del problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)x = c(t), \\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1,\ \dots\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \end{cases}$$

definida en I.

El siguiente corolario es el análogo del que sigue al Teorema 25.

Corolario 35. *Sean $a_i(t)$, con $i = 1, \dots, n$, funciones continuas en un intervalo I. Entonces, para cada $t_0 \in I$ la única solución, ϕ, del problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)x = 0, \\ x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0, \end{cases}$$

es $x(t) = 0$ para todo $t \in I$.

8.5.1. Ecuaciones lineales homogéneas de orden n

Al igual que para sistemas lineales comencemos viendo la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación lineal de orden n en la que suponemos $c(t) = 0$; por analogía, estas ecuaciones se denominan homogéneas.

Teorema 36. *El conjunto de soluciones de la ecuación lineal homogénea de orden n*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)x = 0,$$

donde $a_i(t)$, con $i = 1, \ldots, n$, son funciones continuas en un intervalo I, forma un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$.

Nota 14. a) Cada una de las funciones de una base del espacio de soluciones se denomina *solución fundamental*. Al conjunto de funciones de una base se le denomina *sistema fundamental de soluciones*. Si $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ son un sistema fundamental soluciones cualquier solución de la ecuación se escribirá como

$$x(t) = c_1x_1(t) + \cdots + c_nx_n(t).$$

Para un sistema fundamental de soluciones, el análogo a la matriz fundamental se denomina *matriz de Wronski* y se define como

$$W(x_1, \ldots, x_n)(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz de Wronski

$$\mathcal{W}(x_1, \ldots, x_n)(t) = \det(W(x_1, \ldots, x_n)(t))$$

se denomina *determinante de Wronski o wronskiano.*

La matriz de Wronski es una matriz fundamental del sistema (8.3).

b) Igual que para sistemas homogéneos, un conjunto de soluciones de una ecucación lineal homogénea no tiene porque ser un sistema fundamental de soluciones. El siguiente resultado, análogo a la Proposición 28, nos permitirá identificar un sistema fundamental de soluciones.

Proposición 37. *Sean $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ soluciones de la ecuación lineal homogénea de orden n*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)x = 0,$$

donde $a_i(t)$, con $i = 1, \ldots, n$, son funciones continuas en un intervalo I. Entonces son equivalentes:

a) Las funciones $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ son un sistema fundamental de soluciones.

b) Existe $t_0 \in I$ tal que $\mathcal{W}(x_1, \ldots, x_n)(t_0) \neq 0$.

c) $\mathcal{W}(x_1, \ldots, x_n)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Para concluir enunciemos la versión para ecuaciones lineales del Teorema de la traza.

Teorema 38 (Fórmula de Abel-Liouville-Jacobi.)**.** *Sea $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ un sistema fundamental de la ecuación lineal homogénea de orden n*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)x = 0,$$

donde $a_i(t)$, con $i = 1, \ldots, n$, son funciones continuas en un intervalo I. Entonces

$$(\mathcal{W}(x_1, \ldots, x_n)(t))' = -a_1(t)\mathcal{W}(x_1, \ldots, x_n)(t).$$

Además, para todo $t, t_0 \in I$ se verifica que

$$\mathcal{W}(x_1, \ldots, x_n)(t) = \mathcal{W}(x_1, \ldots, x_n)(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\, ds}.$$

8.5.2. Reducción del orden de una ecuación lineal homogénea de orden n

Supongamos que $x_1(t), \ldots, x_r(t)$, con $r < n$, son soluciones de la ecuación lineal

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)x = 0.$$

Entonces el cambio de función $x = x_r z$ nos transformará la ecuación dada en

$$z^{(n)} + \tilde{a}_1(t)z^{(n-1)} + \tilde{a}_2(t)z^{(n-2)} + \cdots + \tilde{a}_{n-1}(t)z' = 0,$$

para ciertas funciones $\tilde{a}_i$, con $i = 1, \ldots, n-1$. De esta forma, con el cambio de función $w = z'$, llegaremos a la ecuación

$$w^{(n-1)} + \tilde{a}_1(t)w^{(n-2)} + \tilde{a}_2(t)w^{(n-3)} + \cdots + \tilde{a}_{n-1}(t)w = 0,$$

que es de un orden menor que la de partida. Además, las funciones

$$(x_1(t)/x_r(t))', \ldots, (x_{r-1}(t)/x_r(t))'$$

son soluciones de esta última ecuación.

Nuevamente prescindimos de la prueba de este hecho (en este caso se trata de un sencillo ejercicio de derivación) y pasamos a trabajar unos ejemplos.

***Ejemplo* 36.** Encontrar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación

$$(t^3 - 2t^2)x'' - (t^3 + 2t^2 - 6t)x' + (3t^2 - 6)x = 0$$

sabiendo que admite una solución de la forma $x(t) = t^k$.

Derivando la función $x(t) = t^k$ y sustituyendo en la ecuación de partida llegamos a

$$-t^2(k-3) + tk(k-3) - 2(k-3)(k-1) = 0,$$

que se satisface solamente para $k = 3$. Así tenemos la solución $x(t) = t^3$. Ahora efectuamos el cambio de función $x = t^3 z$ ($x' = 3t^2 z + t^3 z'$ y $x'' = 6tz + 6t^2 z' + t^3 z''$) que nos lleva a la ecuación

$$t(t-2)z'' - (t^2 - 4t + 6)z' = 0$$

o, tomando $w = z'$,

$$t(t-2)w' - (t^2 - 4t + 6)w = 0,$$

cuya solución es $w = ce^t \frac{t-2}{t^3}$. Por tanto, integrando[7]

$$z = c \int e^t \frac{t-2}{t^3}\, dt = c\frac{e^t}{t^2} + k$$

y el sistema fundamental de soluciones buscado es $\{t^3, te^t\}$. ◁

***Ejemplo* 37.** Encontrar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación

$$(2t-3)x''' - (6t-7)x'' + 4tx' - 4x = 0$$

sabiendo que admite alguna solución de la forma $x(t) = e^{kt}$.

Si derivamos tres veces la función $x(t) = e^{kt}$, sustituimos en la ecuación propuesta y simplificamos, obtenemos

$$2k(k^2 - 3k + 2)t - (3k^3 - 7k^2 + 4) = 0,$$

y los únicos valores de k para los que se satisface son $k = 1$ y $k = 2$. Luego $x_1(t) = e^{2t}$ y $x_2(t) = e^t$ son dos soluciones de la ecuación.

Efectuando en la ecuación de partida el cambio $x = e^t z$ ($x' = e^t(z' + z)$, $x'' = e^t(z'' + 2z + z)$ y $x''' = e^t(z''' + 3z'' + 3z' + z)$) llegamos a

$$(2t-3)z''' - 2z'' + (5-2t)z' = 0,$$

que, efectuando $w = z'$, se convierte en

$$(2t-3)w'' - 2w' + (5-2t)w = 0.$$

Ahora la función $w_1(t) = (x_1(t)/x_2(t))' = e^t$ es solución de la nueva ecuación y podemos efectuar el cambio $w = e^t v$ ($w' = e^t(v' + v)$ y $w'' = e^t(v'' + 2v' + v)$) que nos da la ecuación

$$(2t-3)v'' + 4(t-2)v' = 0$$

[7] ¡Cuidado!, el cálculo de esta primitiva no es elemental.

que con la sustitución $u = v'$ se transforma en

$$(2t-3)u' + 4(t-2)u = 0.$$

La solución de esta última ecuación es $u = ae^{-2t}(2t-3)$, lo que nos da $v = a(1-t)e^{-2t} + b$ y $z' = e^t v = a(1-t)e^{-t} + be^t$. Finalmente obtenemos que $z = ate^{-t} + be^t + c$ y $x = at + be^{2t} + ce^t$ y el sistema fundamental de soluciones es $\{t, e^{2t}, e^t\}$. ◁

Ejemplo 38. En el año 1967 el profesor J. P. Hoyt publicó una breve nota titulada "Remarks on a second order differential equation" en la revista *The American Mathematical Monthly*, pág 436. El objetivo de su trabajo era analizar las soluciones de la ecuación diferencial

$$tx'' - (t+n)x' + nx = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Su resultado establecía que dos soluciones linealmente independientes eran

$$x_1(t) = e^t \qquad \text{y} \qquad x_2(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!};$$

es decir, la función exponencial y la suma parcial n-ésima de su desarrollo de Taylor. En los años posteriores al trabajo de Hoyt se obtuvieron varias generalizaciones y extensiones de su resultado (véase el artículo "On a class of ordinary linear differential equations having $\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ and $\sum_{k=0}^{n} C_k x^k$ as solutions", aparecido también en el *The American Mathematical Monthly*, año 1977, págs. 716–720, y las referencias que incluye). En este ejemplo analizaremos una ecuación un poco más general que la Hoyt pero esencialmente equivalente; en concreto determinaremos dos soluciones linealmente independientes para la ecuación

$$tx'' + (at-n)x' - anx = 0, \qquad n \in \mathbb{N} \text{ y } a \in \mathbb{R}, \tag{8.4}$$

usando el método de reducción de orden.

En primer lugar, tanteando con funciones de la forma $x = e^{kt}$, tras derivar y sustituir en la ecuación (8.4), obtenemos que para que sean solución se debe verificar la relación

$$(a+k)(tk-n) = 0;$$

por tanto, la única solución de tipo exponencial es $x = e^{-at}$. Ahora, efectuando el cambio de función $x = e^{-at}z$ en la ecuación (8.4) esta queda reducida a

$$tz'' - (at+n)z' = 0$$

que tras el cambio $w = z'$ se transforma en la ecuación de variables separadas

$$tw' - (at+n)w = 0.$$

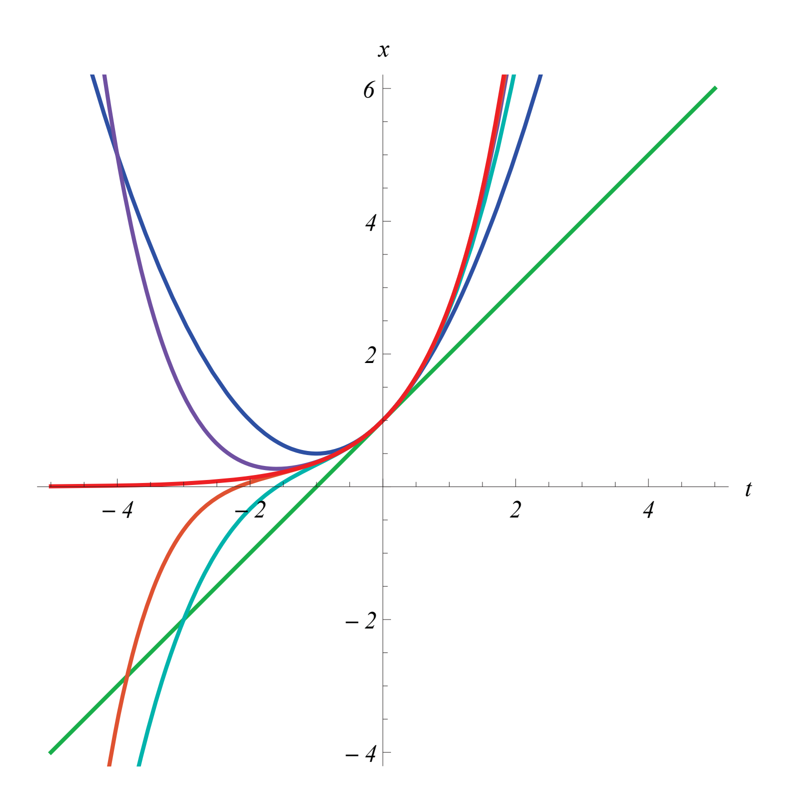


Figura 8.10: En rojo la exponencial $e^{2t/3}$, las otras curvas son las sumas parciales de la serie de Taylor de la función para $n = 1, \ldots, 5$.

La solución general de esta ecuación es

$$w = ke^{at}t^n,$$

lo que nos da

$$z = k \int e^{at}t^n \, dt.$$

Veamos finalmente que

$$\int e^{at}t^n \, dt = \frac{n!(-1)^n}{a^{n+1}} e^{at} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-at)^k}{k!} + C.$$

Para probarlo procederemos por inducción. El caso $n = 0$ es evidente, probemos que se cumple para $n+1$, si se cumple para n. Aplicando integración por partes y usando la hipótesis de inducción se tiene que

$$\int e^{at}t^{n+1} \, dt = \frac{t^{n+1}}{a} e^{at} - \frac{n+1}{a} \int e^{at}t^n \, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{t^{n+1}}{a}e^{at} - \frac{n+1}{a}\frac{n!(-1)^n}{a^{n+1}}e^{at}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-at)^k}{k!} + C \\
&= \frac{(n+1)!(-1)^{n+1}}{a^{n+2}}e^{at}\left(\frac{(-at)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-at)^k}{k!}\right) + C \\
&= \frac{(n+1)!(-1)^{n+1}}{a^{n+2}}e^{at}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-at)^k}{k!} + C.
\end{aligned}
$$

Por tanto la solución general de la ecuación (8.4) puede escribirse como

$$x(t) = Ce^{-at} + B\sum_{k=0}^{n}\frac{(-at)^k}{k!};$$

es decir, una función exponencial y la suma parcial n-ésima de su desarrollo de Taylor. En la figura 8.10 se muestra (en rojo) la exponencial $e^{2t/3}$ y las sumas parciales de su serie de Taylor para $n = 1, \ldots, 5$. $\lhd$

8.5.3. Ecuaciones lineales no homogéneas de orden n

Veamos, para finalizar esta sección, la parte correspondiente a ecuaciones lineales no homogéneas; es decir, ecuaciones de la forma

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = c(t)$$

en las que exigimos que $c(t) \neq 0$. El primer resultado nos ofrece la estructura de las soluciones de este tipo de ecuaciones.

Proposición 39. *Sean $a_i(t)$, con $i = 1, \ldots, n$, y $c(t)$ continuas en un cierto intervalo I. Si $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ son un sistema fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea de orden n*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)x = 0.$$

y $x_p(t)$ es una solución particular de la ecuación lineal no homogéneo de orden n

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = c(t),$$

entonces cualquier otra solución, $x(t)$, de la ecuación lineal no homogénea de orden n puede escribirse como

$$x(t) = x_p(t) + c_1x_1(t) + \cdots + c_nx_n(t),$$

para ciertas constantes $c_1, \ldots, c_n$.

Proposición 40 (Principio de superposición de soluciones)**.** *Si las funciones* $x_{p,1}, \ldots, x_{p,k}$ *son soluciones particulares de las ecuaciones*

$$\begin{aligned} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x &= c_1(t), \\ x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x &= c_2(t), \\ &\vdots \\ x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x &= c_k(t), \end{aligned}$$

entonces $x_{p,1} + \cdots + x_{p,k}$ *es una solución particular de la ecuación*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = c_1(t) + c_2(t) + \cdots + c_k(t).$$

Para concluir esta sección veamos el análogo del método de variación de las constantes en este contexto.

Sea $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ una sistema fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea de orden n

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0.$$

Para obtener una solución particular de la correspondiente ecuación no homogénea consideramos

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t).$$

Teniendo en cuenta que la matriz de Wronski es una matriz fundamental para el sistema lineal homogéneo asociado con la ecuación tendremos que los coeficientes $c^t(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))$ serán solución del sistema

$$W(x_1, \ldots, x_n)(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c(t) \end{pmatrix}$$

equivalente a

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

***Ejemplo* 39.** Determinar la solución general de la ecuación

$$x'' + \frac{t-1}{t}x' - \frac{x}{t} = t \operatorname{sen} t.$$

La ecuación homogénea asociada con la propuesta es, tras simplificar el denominador,

$$tx'' + (t-1)x' - x = 0$$

y se corresponde con un caso particular de la analizada en el Ejemplo 38; de hecho, tomando $a = n = 1$ deducimos que la solución general de la ecuación homogénea es

$$x = C_1 e^{-t} + C_2(1-t).$$

Para obtener una solución particular usamos el método de variación de las constantes descrito anteriormente. Suponemos que

$$x_p = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)(1-t),$$

donde deducimos $C_1(t)$ y $C_2(t)$ del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & 1-t \\ -e^{-t} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

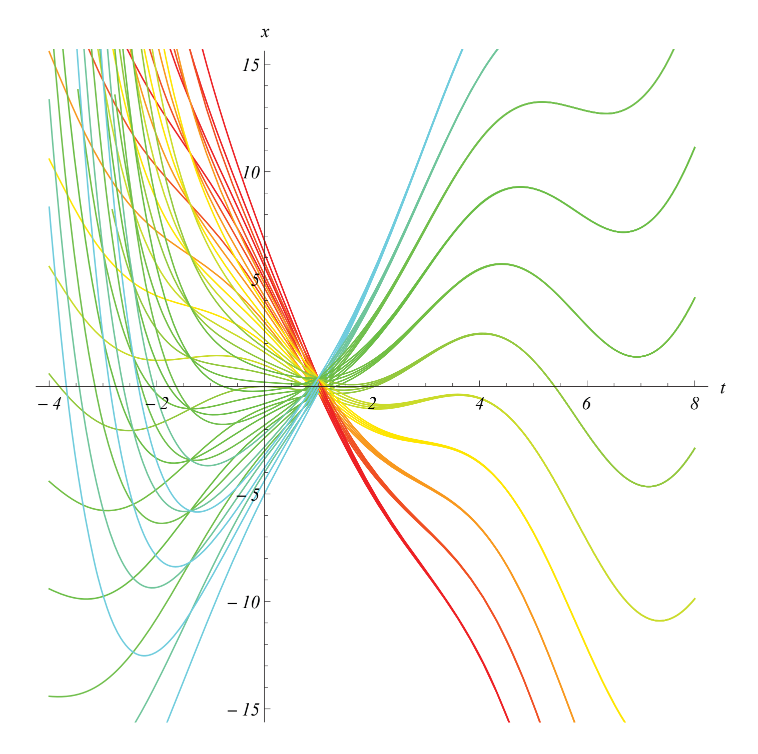


Figura 8.11: Representación gráfica de algunas de las soluciones de la ecuación del Ejemplo 39, las curvas de un mismo color se corresponden con un mismo valor del parámetro C_2.

Por tanto, usando el método de Cramer, tenemos que

$$C_1'(t) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1-t \\ t\operatorname{sen} t & -1 \end{vmatrix}}{te^{-t}} \qquad \text{y} \qquad C_2'(t) = -\frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} & t\operatorname{sen} t \end{vmatrix}}{te^{-t}};$$

es decir,

$$C_1(t) = \int e^t(1-t)\operatorname{sen} t\,dt = \frac{e^t}{2}((t-2)\cos t + (1-t)\operatorname{sen} t) + K_1$$

y

$$C_2(t) = -\int \operatorname{sen} t\,dt = \cos t + K_2.$$

Luego, omitiendo las constantes, la solución particular es

$$x_p = \frac{1}{2}((1-t)\operatorname{sen} t - t\cos t)$$

y la solución general toma la forma

$$x_p = C_1e^{-t} + C_2(1-t) + \frac{1}{2}((1-t)\operatorname{sen} t - t\cos t).$$

En la figura 8.11 se muestra la solución general para distintos valores de los parámetros C_1 y C_2. Las curvas de un mismo color corresponden a un mismo valor de C_2, observad que cuando $t \to +\infty$ la solución se va aproximando a $C_2(1-t) + \frac{1}{2}((1-t)\operatorname{sen} t - t\cos t)$ (es decir, se disipa el término exponencial) y cuando $t \to -\infty$ se puede ver (a pesar del barullo que aparece en la imagen) que las curvas tienden a comportarse esencialmente como una curva exponencial. $\triangleleft$

8.6. Problemas

Problema 214. Resolver el sistema de ecuaciones

$$x' = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & 1+\cos t \end{pmatrix} x,$$

teniendo en cuenta que la matriz de los coeficientes es triangular.

Problema 215. Consideramos el sistema lineal

$$x' = A(t)x + b(t), \quad t \in I,$$

y sea $P(t)$ una matriz inversible que triangula a la matriz $A(t)$, para todo $t \in I$; es decir, $P^{-1}(t)A(t)P(t) = T(t)$, donde $T(t)$ es una cierta matriz triangular.

a) Probar que si $P(t) = P$, es decir no depende de t, el cambio de variable $x = Pz$ transforma el sistema original en otro con matriz triangular. Determinar la expresión del nuevo sistema.

b) Probar que si $P^{-1}(t)P'(t)$ es una matriz triangular, entonces el cambio de variable $x = P(t)z$ transforma el sistema original en otro con matriz triangular. Determinar la expresión del nuevo sistema.

c) Resolver el sistema

$$x' = \begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ 1 & t+2 \end{pmatrix} x$$

usando las técnicas propuestas en los apartados anteriores.

Problema 216. Consideramos el sistema lineal homogéneo

$$x' = \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ -t & t^2 & 0 \\ 1 & -t & t^2 \end{pmatrix} x, \quad t > 0.$$

Teniendo en cuenta que $x(t) = (t, 1, 0)$ y $x(t) = (0, t, 1)$ son soluciones encontrar un sistema fundamental de soluciones.

Problema 217. Consideramos los sistemas

$$x' = A(t)x, \tag{8.5}$$

y

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{8.6}$$

para $t \in I = [-1, 1]$ y donde las matrices $A(t)$ y $b(t)$ son impares.

a) Si $x(t)$ es una solución de (8.6), probar que $x(t)$ es par si y sólo si $x(-1) = x(1)$.

b) Si $X(t)$ es una matriz fundamental del sistema (8.5), probar que

$$|X(1) - X(-1)| \neq 0$$

si y sólo si existe una única solución par de (8.6) para toda matriz impar $b(t)$.

Problema 218. Consideramos el sistema

$$x' = A(t)x + b(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$ y donde las matrices $A(t)$ y $b(t)$ son periódicas de periodo T.

a) Probar que si $x(t)$ es una solución, entonces $x(t+T)$ también lo es.

b) Si $x(t)$ es una solución del sistema dada, probar que $x(t)$ es periódica de periodo T si y sólo si $x(0) = x(T)$.

Problema 219. Consideramos la ecuación

$$x'' + f(t)x' + g(t)x = 0.$$

a) Probar que si $f(t) + tg(t) = 0$, entonces $x = t$ es solución de la ecuación.

b) Probar que si $1 \pm f(t) + g(t) = 0$, entonces $x = e^{\pm t}$ es solución de la ecuación.

c) Probar que si $z^2 + zf(t) + g(t) = 0$ admite z_0 como raíz, entonces $x = e^{z_0 t}$ es solución de la ecuación.

Problema 220. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales, en las que mediante x_1 e x_2 denotamos soluciones particulares de la ecuación homogénea asociada:

a) $(t^2 - 1)x'' = 6x$, donde x_1 es un polinomio.

b) $x'' + (\tan t)x' + (\cos^2 t)x = 0$, con $x_1 = \cos(\operatorname{sen} t)$.

c) $t^2x'' - tx' - 3x = 5t^4$, con $x_1 = \frac{1}{t}$.

d) $t^3x''' - 3t^2x'' + 6tx' - 6x = 0$, con $x_1 = x$ y $x_2 = x^2$.

e) $x'' - 2(\tan t)x' = 1$.

f) $t(\log t)x'' - x' = \log^2 t$.

g) $4(t^2 + t)x'' + 2(2t + 1)x' - x = 2\sqrt{t^2 + t}$, con $x_1 = \sqrt{t}$ y $x_2 = \sqrt{t + 1}$.

Problema 221. Consideramos la ecuación

$$tx'' + 2x' + tx = 1.$$

a) Comprobar que existe α de forma que la función $x = t^\alpha \operatorname{sen} t$ es solución de la ecuación homogénea asociada a la ecuación dada.

b) Usando la solución obtenida en el apartado anterior encontrar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.

c) Obtener la solución general de la ecuación dada.

Problema 222. Sea f una función no nula, $f \in C^n(I)$ y verificando que las funciones $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ no tienen ceros comunes en el intervalo I. A partir de dicha función consideramos

$$p_i(t) = -\frac{f^{(n-i)}(t)f^{(n)}(t)}{(f(t))^2 + (f'(t))^2 + \ldots + (f^{(n-1)}(t))^2},$$

para $1 \le i \le n$.

a) Probar que $\forall t \in I$ la función $x(t) = f(t)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = 0.$$

b) Dar una expresión, en términos de p_1 y f, de la solución general de la ecuación anterior en el caso $n = 2$.

Problema 223. Consideremos la ecuación

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t).$$

a) Sabiendo que $x(t) = (1 + t)^2$ es una solución de la ecuación homogénea y que el Wronskiano de cualesquiera dos soluciones linealmente independientes es constante determinar la solución general de la ecuación homogénea.

b) Usando el apartado anterior obtener la solución general de la ecuación no homogénea.

c) Probar que existe una función $K(t, s)$ de forma que la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$$

puede escribirse como

$$x(t) = \int_0^t f(s)K(t, s)\, ds.$$

Problema 224. Consideremos la ecuación diferencial

$$x'' - f(t)x' + (f(t) - 1)x = 0.$$

a) Encontrar la solución general de la ecuación dada.

b) Usando el apartado anterior obtener la solución general de la ecuación

$$x'' - \frac{x'}{t} + \left(\frac{1-t}{t}\right) x = 0.$$

c) Sea x_p una solución particular de la ecuación

$$x'' - \frac{x'}{t} + \left(\frac{1-t}{t}\right) x = h(t),$$

definida para $t > 0$. Probar que existe una función $K(t, s)$ tal que

$$x_p(x) = \int_{t_0}^t K(t, s)h(s)\, ds,$$

para algún valor $t_0 > 0$.

Problema 225. Se considera la ecuación diferencial

$$x'' - tf(t)x' + f(t)x = g(t).$$

a) Sabiendo que $x_1 = t$ es una solución de la ecuación homogénea, encontrar otra solución linealmente independiente.

b) Usando el apartado anterior y el método de variación de las constantes encontrar la solución general de la ecuación dada, en función de $f(t)$ y $g(t)$.

Problema 226. Dada la ecuación $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, se pide hallar la relación entre las funciones $a(t)$ y $b(t)$ para que la ecuación anterior admita dos soluciones, x_1 y x_2, tales que $x_2 = tx_1$. Aplicar esto a la resolución de la ecuación

$$x'' + 2tx' + (t^2 + 1)x = te^{-t^2/2}.$$

Problema 227. Consideramos la ecuación

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0.$$

a) Si x_1 y x_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación dada, probar que

$$p(t) = \frac{\begin{vmatrix} x_1'' & x_1 \\ x_2'' & x_2 \end{vmatrix}}{W(x_1, x_2)(t)} \text{ y } q(t) = \frac{\begin{vmatrix} x_1' & x_1'' \\ x_2' & x_2'' \end{vmatrix}}{W(x_1, x_2)(t)}.$$

b) Obtener la ecuación correspondiente a las soluciones $x_1(t) = t+1$ y $x_2(t) = e^t$.

c) Para la ecuación del apartado b), efectuar el cambio de función $u = x'/x$, con $u = u(t)$. Comprobar que la ecuación resultante es de tipo Riccati y obtener su solución general.

d) Determinar la solución general de la ecuación

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = t,$$

siendo $p(t)$ y $q(t)$ las funciones determinadas en el apartado b).

Capítulo 9

Sistemas y ecuaciones lineales de coeficientes constantes

9.1. Sistemas de ecuaciones lineales de coeficientes constantes

Sea el sistema lineal homogéneo $x' = Ax$ donde, ahora, $A \in M(n \times n)$ es una matriz constante. Los problemas de valores iniciales asociados con este sistema tendrán una solución única para todo $t \in \mathbb{R}$, para cualquier condición inicial $x(t_0) = x_0$ (notad que las matrices constantes son continuas en todo $\mathbb{R}$). Veamos un primer resultado referente a las matrices fundamentales asociadas con estos sistemas.

Teorema 41. *Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental del sistema $x' = Ax$, con $A \in M(n \times n)$ constante, verificando que $\Phi(0) = I_n$. Entonces*

a) $\Phi'(t) = A\Phi(t)$.

b) $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$, *para todo* $t, s \in \mathbb{R}$.

c) $\Phi(-t) = (\Phi(t))^{-1}$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

d) La sucesión de funciones

$$\Phi_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k$$

converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}$ *a la función* $\Phi(t)$.

Demostración. El apartado a) es obvio por ser $\Phi(t)$ una matriz fundamental del sistema $x' = Ax$.

Para probar el apartado b) fijamos $s \in \mathbb{R}$, veamos que las matrices $\Phi(t+s)$ y $\Phi(t)\Phi(s)$ son soluciones del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} X' = AX, \\ X(0) = \Phi(s), \end{cases}$$

y por la unicidad de solución habremos concluido. Obviamente ambas matrices satisfacen la condición inicial. Además,

$$\frac{d}{dt}\Phi(t+s) = \Phi'(t+s) = A\Phi(t+s)$$

y

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t)\Phi(s)) = \Phi'(t)\Phi(s) = A\Phi(t)\Phi(s)$$

con lo que finalizamos este apartado.

El apartado c) es una consecuencia de b), es suficiente tomar $s = -t$.

Para concluir el apartado d) basta ver que las funciones $\Phi_m(t)$ son una sucesión de iteradas de Picard asociadas al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} X' = AX, \\ X(0) = I_n. \end{cases}$$

Tomamos $\Phi_0(t) = I_n$ y tenemos que, si $\Phi_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k$, entonces

$$\begin{aligned} \Phi_{m+1}(t) &= I_n + \int_0^t A\Phi_m(s)\, ds = I_n + \int_0^t A \sum_{k=0}^{m} \frac{s^k}{k!} A^k\, ds \\ &= I_n + \sum_{k=0}^{m} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} A^{k+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{t^k}{k!} A^k. \quad \square \end{aligned}$$

Nota 15. a) La serie infinita $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ se denomina *exponencial de la matriz* tA y se denota $\exp(tA)$ o e^{tA}; es decir,

$$\exp(tA) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

b) El apartado a) del teorema anterior nos está diciendo que la exponencial de tA, además de ser una matriz fundamental de la ecuación $x' = Ax$, es la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} X' = AX, \\ X(0) = I_n. \end{cases}$$

Los apartados b) y c) pueden reescribirse en términos de la exponencial de la matriz tA como

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$$

y

$$e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}.$$

Estas propiedades son análogas a las de las exponencial clásica.

c) Para obtener un sistema fundamental de soluciones para el sistema $x' = Ax$ bastará tomar una base de vectores de $\mathbb{R}^n$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$, y hacer el producto con la exponencial de tA; es decir, $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, con $x_k(t) = e^{tA}v_k$, para $k = 1, \ldots, n$, es un sistema fundamental de soluciones.

9.1.1. Cálculo de e^{tA}

Sea J la forma canónica de Jordan asociada con la matriz A; entonces, existe una matriz invertible P tal que $A = PJP^{-1}$. Con esta descomposición, usando que $A^k = PJ^kP^{-1}$, tendremos que

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}PJ^kP^{-1} = Pe^{tJ}P^{-1}.$$

Veamos ahora cómo calcular la exponencial de la forma canónica de Jordan. La matriz J es una diagonal de cajas

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p \end{pmatrix},$$

con $p \leq n$, donde cada caja $J_i \in M(n_i \times n_i)$ es de la forma[1]

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I_{n_i} + E_{n_i},$$

donde los λ_i son valores propios de la matriz A y teniendo en cuenta la notación

$$E_{n_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1]Notad que $n_1 + \cdots + n_p = n$.

Las matrices E_m se denominan matrices nilpotentes y satisfacen que

$$\begin{aligned}
E_m^0 &= I_m = (a_{ij}^0), && \text{con } a_{ij}^0 = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \\
E_m^1 &= E_m = (a_{ij}^1), && \text{con } a_{ij}^1 = \begin{cases} 1, & j = i+1, \\ 0, & j \neq i+1, \end{cases} \\
E_m^2 &= (a_{ij}^2), && \text{con } a_{ij}^2 = \begin{cases} 1, & j = i+2, \\ 0, & j \neq i+2, \end{cases} \\
&\vdots && \vdots \\
E_m^{m-1} &= (a_{ij}^{m-1}), && \text{con } a_{ij}^{m-1} = \begin{cases} 1, & j = i+m-1, \\ 0, & j \neq i+m-1, \end{cases} \\
E_m^k &= 0_m, && \text{para } k \geq m.
\end{aligned}$$

La exponencial de una matriz satisface la siguiente propiedad: si $AB = BA$ entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.[2] Ahora, teniendo en cuenta que $I_{n_i} E_{n_i} = E_{n_i} I_{n_i}$, se verifica que

$$e^{tJ_i} = e^{t\lambda_i I_{n_i}} e^{tE_{n_i}} = e^{t\lambda_i} I_{n_i} \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{t^k}{k!} E_{n_i}^k = e^{t\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

[2]Veamos una demostración de este hecho.

Demostración. Usando que el producto de las matrices A y B es commutativo tendremos que

$$(A+B)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} A^{k-n} B^n.$$

Esta identidad se obtiene mediante un proceso de inducción. Supongamos la igualdad cierta para k y verifiquemosla para $k+1$:

$$\begin{aligned}
(A+B)^{k+1} &= \left(\sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} A^{k-n} B^n \right) (A+B) = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} A^{k-n} B^n A + \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} A^{k-n} B^n B \\
&= \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} A^{k+1-n} B^n + \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} A^{k-n} B^{n+1} = \sum_{n=0}^{k+1} \binom{k+1}{n} A^{k+1-n} B^n.
\end{aligned}$$

Ahora, el resultado es una consecuencia del producto de Cauchy de dos series. En efecto:

$$\begin{aligned}
e^A e^B &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{A^{k-n} B^n}{(k-n)! n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} A^{k-n} B^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = e^{A+B}. \quad \square
\end{aligned}$$

De este modo, sin más que observar que

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_p} \end{pmatrix}$$

concluimos el cálculo de e^{tA}.[3]

Nota 16. En el caso de que la matriz A sea diagonalizable la matriz de Jordan se reduce a una matriz diagonal compuesta por los valores propios. En ese caso la exponencial se calcula de manera casi trivial:

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix} P^{-1} \Longrightarrow e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{t\lambda_p} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

***Ejemplo* 40.** Calcular e^{tA} siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz A es

$$|A - \lambda I_4| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)^2$$

y el polinomio mínimo es $(\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$. Así la forma canónica de Jordan será

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora es sencillo comprobar que

$$\ker(A - I_4) = \langle (0,0,1,-1) \rangle, \quad \ker(A - I_4)^2 = \langle (0,0,1,-1), (1,1,0,0) \rangle$$

[3] La prueba de este hecho se basa en la identidad

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} J_1^n & & & \\ & J_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p^n \end{pmatrix}.$$

y
$$\ker(A - 3I_4) = \langle (0,0,1,1), (1,-1,0,0) \rangle.$$
Para construir la matriz P consideraremos los vectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tales que $Av_1 = v_1$ y $Av_2 = v_1 + v_2$, luego $v_1 \in \ker(A - I_4)$, $v_2 \in \ker(A - I_4)^2 \setminus \ker(A - I_4)$, además $v_1 = (A - I_4)v_2$, y $v_3, v_4 \in \ker(A - 3I_4)$. Luego
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Por tanto
$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e^t+e^{3t}}{2} & \frac{e^t-e^{3t}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{e^t-e^{3t}}{2} & \frac{e^t+e^{3t}}{2} & 0 & 0 \\ te^t & te^t & \frac{e^t+e^{3t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^t}{2} \\ -te^t & -te^t & \frac{e^{3t}-e^t}{2} & \frac{e^t+e^{3t}}{2} \end{pmatrix}$$
y hemos concluido. ◁

***Ejemplo* 41.** Determinar e^{tA} siendo
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que
$$|A - \lambda I_3| = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda).$$
Por tanto, la matriz es diagonalizable ya que posee tres valores propios y distintos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$. Ahora, es claro que
$$\ker(A - I_3) = \langle (1,2,-1) \rangle \quad \ker(A - 2I_3) = \langle (1,0,0) \rangle$$
y
$$\ker(A - 3I_3) = \langle (1,0,1) \rangle.$$
De este modo, podemos tomar
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Así se tiene que
$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} & \frac{e^t - 2e^{2t} + e^{3t}}{2} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & \frac{e^{3t}-e^t}{2} & e^{3t} \end{pmatrix},$$
que es la matriz solicitada. ◁

Nota 17. Puede ocurrir que alguno de los valores propios de la matriz sea complejo pero, al estar con matrices reales, entonces otro de los valores propios será su conjugado. Supongamos que estos valores propios son $\lambda_i = a + ib$ y $\lambda_{i+1} = \overline{\lambda_i}$ (por simplicidad los suponemos de multiplicidad uno). Cuando en la diagonal aparezcan los valores λ_i y λ_{i+1} los sustituiremos por una caja de la forma

$$I(a,b) := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Los vectores v_i y $v_{i+1}(= \overline{v_i})$ se sustituirán por $\tilde{v}_i = (v_i + v_{i+1})/2$ y $\tilde{v}_{i+1} = i(v_i - v_{i+1})/2$. La exponencial de $tI(a,b)$ se calcula del siguiente modo

$$e^{tI(a,b)} = \exp\left(taI_2 + tb\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{ta}\begin{pmatrix} \cos(tb) & -\operatorname{sen}(tb) \\ \operatorname{sen}(tb) & \cos(tb) \end{pmatrix},$$

donde en el último paso hemos usado que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

***Ejemplo* 42.** Calcular e^{tA} siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso el polinomio característico de la matriz A es

$$|A - \lambda I_3| = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$$

y los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + 2i$ y $\lambda_3 = 1 - 2i$. Además

$$\ker(A - I_3) = \langle(2,-2,3)\rangle, \quad \ker(A - (1+2i)I_3) = \langle(0,1,-i)\rangle,$$

y

$$\ker(A - (1-2i)I_3) = \langle(0,1,i)\rangle.$$

Entonces, tomando $\tilde{v}_2 = ((0,1,-i) + (0,1,i))/2 = (0,1,0)$ y $\tilde{v}_3 = i((0,1,-i) - (0,1,i))/2 = (0,0,1)$, consideramos

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y llegamos a que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Pe^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2t) & -\operatorname{sen}(2t) \\ 0 & \operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 + \cos(2t) + \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) & -\operatorname{sen}(2t) \\ \frac{3}{2} + \cos(2t) - \frac{3}{2}\cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es la matriz exponencial requerida. ◁

9.1.2. Método de valores y vectores propios para el cálculo de soluciones fundamentales en sistemas de coeficientes constantes homogéneos

Aunque ya hemos visto que podemos obtener las soluciones fundamentales de un sistema de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes mediante el cálculo de la exponencial de la matriz de coeficientes (basta, por ejemplo, tomar las columnas para tener las soluciones fundamentales), el procedimiento resulta extremadamente laborioso. Veamos que, hasta cierto punto, este proceso puede simplificarse. La idea fundamental es que el producto de e^{tA} por cada uno de los vectores de una base de $\mathbb{R}^n$ proporciona una base de soluciones fundamentales.

Sea $A \in M(n \times n)$ una matriz de coeficientes constantes con valores propios λ_i, $i = 1, \ldots, p$, con mutiplicidades n_i. Es conocido, se trata de un resultado de álgebra lineal consecuencia del teorema de Cayley-Hamilton, que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, donde

$$E_i = \ker(A - \lambda_i I_n)^{n_i}.$$[4]

Si, para cada $i = 1, \ldots, p$, los vectores $\{v_{ij}\}_{j=1,\ldots,n_i}$ son una base del espacio E_i, tendremos que

$$\begin{aligned} e^{tA} v_{ij} = e^{t\lambda_i I_n} e^{t(A-\lambda_i I_n)} v_{ij} &= e^{t\lambda_i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k \right) v_{ij} \\ &= e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{n_i - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k v_{ij} \end{aligned}$$

[4]En realidad no es necesario considerar $\ker(A - \lambda_i I_n)^{n_i}$, basta tomar $\ker(A - \lambda_i I_n)^{\tilde{n}_i}$, donde $\tilde{n}_i$ es la multiplicidad de λ_i en el polinomio mínimo asociado con A y, por supuesto, $\tilde{n}_i \leq n_i$. Lo que ocurre es que $\ker(A - \lambda_i I_n)^k = \ker(A - \lambda_i I_n)^{\tilde{n}_i}$ para todo $k \geq \tilde{n}_i$.

y, por tanto, las funciones

$$\phi_{ij}(t) = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_i I_n)^k v_{ij},$$

con $i = 1, \ldots, p$ y $j = 1, \ldots, n_i$, son una base fundamental de soluciones.

***Ejemplo* 43.** Encontrar una base de soluciones fundamentales para el sistema $x' = Ax$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como ya vimos en el Ejemplo 40, el polinomio característico de la matriz A es $(\lambda - 1)^2(\lambda - 3)^2$. Así tendremos que

$$\mathbb{R}^4 = \ker(A - I_4)^2 \oplus \ker(A - 3I_4)^2.$$

Ahora es sencillo comprobar que

$$\ker(A - I_4)^2 = \langle (0, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 0) \rangle$$

y

$$\ker(A - 3I_4)^2 = \ker(A - 3I_4) = \langle (0, 0, 1, 1), (1, -1, 0, 0) \rangle.$$

Para construir la base de soluciones comenzamos con $\lambda = 1$, si $v_1 = (0, 0, 1, -1)$ y $v_2 = (1, 1, 0, 0)$:

$$\phi_1(t) = e^t(I_4 + t(A - I_4))v_1 = e^t v_1 = e^t(0, 0, 1, -1)$$

y

$$\phi_2(t) = e^t(I_4 + t(A - I_4))v_2 = e^t(v_2 + 2tv_1) = e^t(1, 1, 2t, -2t).$$

Finalizamos analizando las soluciones asociadas con $\lambda = 3$, tomando $v_3 = (0, 0, 1, 1)$ y $v_4 = (1, -1, 0, 0)$:

$$\phi_3(t) = e^{3t}(I_4 + t(A - 3I_4))v_3 = e^{3t}v_3 = e^{3t}(0, 0, 1, 1)$$

y

$$\phi_4(t) = e^{3t}(I_4 + t(A - 3I_4))v_4 = e^{3t}v_4 = e^{3t}(1, -1, 0, 0).$$

Las funciones $\{\phi_1, \ldots, \phi_4\}$ forman la base de soluciones pedida. $\triangleleft$

***Ejemplo* 44.** La posición de una partícula en movimiento en el espacio en función del tiempo viene dada como la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \neq 0$.

a) Determinar las ecuaciones de la trayectoria.

b) Probar que la partícula siempre se mueve sobre un plano.

c) Probar que la velocidad de la partícula tiende a ser constante para valores grandes del tiempo.

Para determinar la trayectoria bastará encontrar una base se soluciones fundamentales del sistema. Es fácil comprobar que, denotando por A la matriz del sistema,

$$|A - \lambda I_3| = -\lambda^3 + \lambda(\alpha^2+\beta^2) = -\lambda(\lambda - \sqrt{\alpha^2+\beta^2})(\lambda + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}).$$

Así, en este caso,

$$\mathbb{R}^3 = \ker(A) \oplus \ker(A - \sqrt{\alpha^2+\beta^2} I_3) \oplus \ker(A + \sqrt{\alpha^2+\beta^2} I_3).$$

Además, $\ker A = \langle(-\beta, 0, \alpha)\rangle$, $\ker(A - \sqrt{\alpha^2+\beta^2} I_3) = \langle(\alpha, \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \beta)\rangle$ y $\ker(A + \sqrt{\alpha^2+\beta^2} I_3) = \langle(\alpha, -\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \beta)\rangle$. Luego

$$\phi_1(t) = (-\beta, 0, \alpha), \quad \phi_2(t) = e^{t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\alpha, \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \beta)$$

y

$$\phi_3(t) = e^{-t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\alpha, -\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \beta).$$

Por tanto, la posición de la partícula vendrá dada por

$$\begin{aligned}(x(t), y(t), z(t)) &= C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + C_3\phi_3(t) \\ &= \Big(-C_1\beta + \alpha\left(C_2 e^{t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + C_3 e^{-t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right), \\ &\quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(C_2 e^{t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - C_3 e^{-t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right), \\ &\quad C_1\alpha + \beta\left(C_2 e^{t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + C_3 e^{-t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\Big)\end{aligned}$$

Ahora es claro que la trayectoria pertenece siempre al plano $\beta x - \alpha z = -C_1(\alpha^2 + \beta^2)$. En la figura 9.1 hemos trazado algunas de las curvas solución para $C_1 = 0$, tomando $\alpha = -1$ y $\beta = 1/4$. Observad como claramente todas ellas están contenidas en un mismo plano.

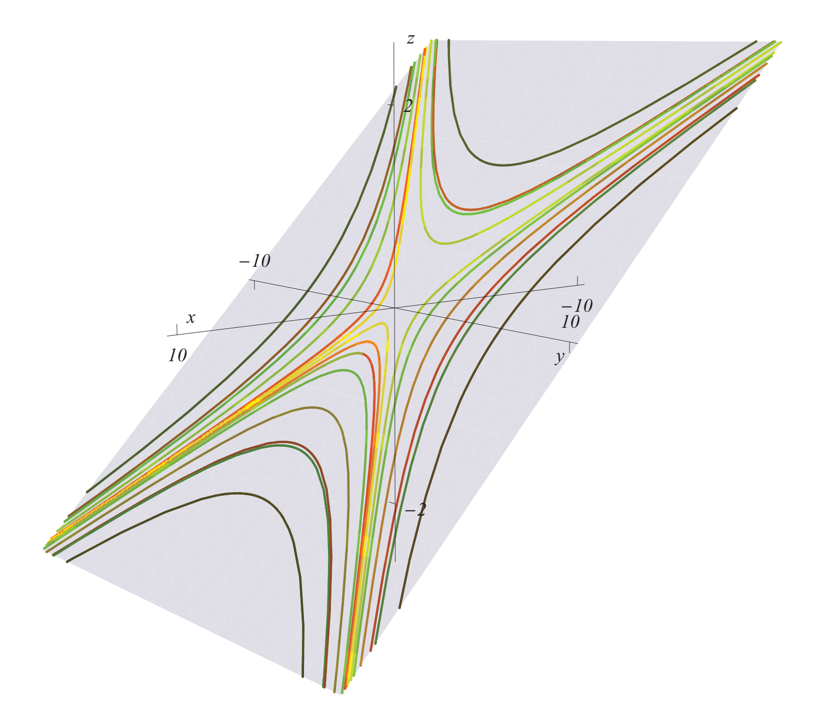


Figura 9.1: Algunas curvas solución del Ejemplo 44 trazadas para $C_1 = 0$, todas ellas están contenidas en el plano $\beta x - \alpha z = 0$, en este caso se han tomado $\alpha = -1$ y $\beta = 1/4$.

Por último, el vector velocidad es el vector normalizado en la dirección del vector derivado de la posición; es decir,

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}.$$

Con esto, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}(x'(t), y'(t), z'(t)) = \Big(&\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(C_2 e^{t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - C_3 e^{-t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right),\\ &(\alpha^2+\beta^2)\left(C_2 e^{t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + C_3 e^{-t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right),\\ &\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(C_2 e^{t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - C_3 e^{-t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\Big)\end{aligned}$$

y

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{2}(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{C_2^2 e^{2t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + C_3^2 e^{-2t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}},$$

concluimos que

$$\lim_{t\to\infty} \overrightarrow{v}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, 1, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right),$$

es decir, el vector tangente tiende a ser constante y, por tanto, la partícula tiende a desplazarse sobre una recta. ◁

Nota 18. Sean λ_i y λ_{i+1} valores propios complejos conjugados asociados a la matriz A del sistema $x' = Ax$; es decir, $\lambda_{i+1} = \overline{\lambda_i}$. Entonces existirán vectores propios v_i y v_{i+1} que también serán conjugados: $v_{i+1} = \overline{v_i}$. Esto dará lugar a dos soluciones, ϕ_i y ϕ_{i+1}, complejas y conjugadas del sistema. Para obtener soluciones reales podemos sustituir estas soluciones por las funciones $(\phi_i + \phi_{i+1})/2$ e $i(\phi_i - \phi_{i+1})/2$ que también serán soluciones.

***Ejemplo* 45.** Para cada a no nulo, obtener una base de soluciones fundamentales para el sistema

$$\begin{cases} x'' = -a^2 y, \\ y'' = a^2 x. \end{cases}$$

Tomando $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, y, x', y')$, el sistema propuesto se reescribe como $z' = Az$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es claro que $|A - \lambda I_4| = \lambda_4 + a^4$ y $\lambda_1 = ar_1$, $\lambda_2 = a\overline{r_1}$, $\lambda_3 = ar_2$ y $\lambda_4 = a\overline{r_2}$, con $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ y $r_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Además, $\ker(A - \lambda_i I_4) = \langle (a^2, -\lambda^2, \lambda a^2, -\lambda^3) \rangle$. Con esto tomaremos la soluciones

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \frac{1}{2}(e^{ar_1 t}(a^2, -a^2 r_1^2, a^3 r_1, -a^3 r_1^3) + e^{a\overline{r_1}t}(a^2, -a^2\overline{r_1}^2, a^3\overline{r_1}, -a^3\overline{r_1}^3)) \\ &= \left(a^2 e^{at\sqrt{2}/2}\cos\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right), a^2 e^{at\sqrt{2}/2}\operatorname{sen}\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right),\right. \\ &\quad a^3 e^{at\sqrt{2}/2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)\right), \\ &\quad \left. a^3 e^{at\sqrt{2}/2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right), \end{aligned}$$

$$\phi_2(t) = \frac{i}{2}(e^{ar_1 t}(a^2, -a^2 r_1^2, a^3 r_1, -a^3 r_1^3) - e^{a\overline{r_1}t}(a^2, -a^2\overline{r_1}^2, a^3\overline{r_1}, -a^3\overline{r_1}^3))$$

$$
\begin{aligned}
&= \Bigg(-a^2e^{at\sqrt{2}/2}\operatorname{sen}\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right), a^2e^{at\sqrt{2}/2}\cos\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right),\\
&\quad -a^3e^{at\sqrt{2}/2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)\right),\\
&\quad a^3e^{at\sqrt{2}/2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)\right)\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_3(t) &= \frac{1}{2}(e^{ar_2t}(a^2,-a^2r_2^2,a^3r_2,-a^3r_2^3)+e^{a\overline{r_2}t}(a^2,-a^2\overline{r_2}^2,a^3\overline{r_2},-a^3\overline{r_2}^3))\\
&= \Bigg(a^2e^{-at\sqrt{2}/2}\cos\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right), -a^2e^{-at\sqrt{2}/2}\operatorname{sen}\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right),\\
&\quad -a^3e^{-at\sqrt{2}/2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)\right),\\
&\quad -a^3e^{-at\sqrt{2}/2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)\right)\Bigg),
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\phi_4(t) &= \frac{i}{2}(e^{ar_2t}(a^2,-a^2r_2^2,a^3r_2,-a^3r_2^3)-e^{a\overline{r_2}t}(a^2,-a^2\overline{r_2}^2,a^3\overline{r_2},-a^3\overline{r_2}^3))\\
&= \Bigg(a^2e^{-at\sqrt{2}/2}\operatorname{sen}\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right), a^2e^{-at\sqrt{2}/2}\cos\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right),\\
&\quad a^3e^{-at\sqrt{2}/2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)\right),\\
&\quad -a^3e^{-at\sqrt{2}/2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)\right)\Bigg)
\end{aligned}
$$

De este modo considerando las dos primeras componentes de las funciones ϕ_i, tendremos que la solución buscada será

$$
\begin{aligned}
x = a^2 &\Bigg(\cos\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)\left(c_1e^{at\sqrt{2}/2}+c_3e^{-at\sqrt{2}/2}\right)\\
&-\operatorname{sen}\left(\frac{at\sqrt{2}}{2}\right)\left(c_2e^{at\sqrt{2}/2}-c_4e^{-at\sqrt{2}/2}\right)\Bigg)\\
y = a^2 &\Bigg(\operatorname{sen}\left(at\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(c_1e^{at\sqrt{2}/2}-c_3e^{-at\sqrt{2}/2}\right)\\
&+\cos\left(at\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(c_2e^{at\sqrt{2}/2}+c_4e^{-at\sqrt{2}/2}\right)\Bigg).
\end{aligned}
$$

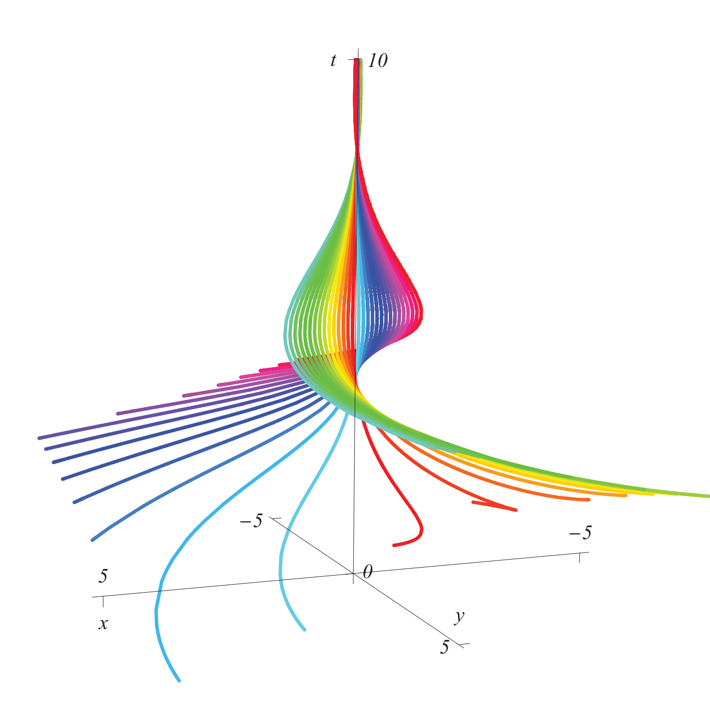


Figura 9.2: Algunas curvas solución del Ejemplo 45 trazadas en el espacio para $a = 1$, $c_1 = c_2 = 0$ y $c_3 = c_4$ variando en intervalo $[-20, 20]$ cada una con un color distinto y con la variable t en el intervalo $[0, 10]$: una curiosa familia de espirales tridimensionales que se va acumulando alrededor del eje t para valores grandes de esta variable.

En la figura 9.2 se muestran algunas de las curvas dadas por (t, x, y) para diversos valores de los parámetros involucrados. Observad que se trata de una familia de espirales tridimensionales. $\triangleleft$

9.2. Ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes

Nuestro objetivo en esta sección es analizar la familia de soluciones de la ecuación

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = 0,$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, n$.

Igual que ya hicimos en el caso de coeficientes no constantes, tomando las nuevas variables $x_1 = x, x_2 = x', \ldots, x_n = x^{(n-1)}$, basta estudiar el sistema

equivalente $x' = Ax$, con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

La siguiente proposición nos permitirá saber algunas cuestiones relativas a la descomposición de $\mathbb{R}^n$ en términos de la matriz asociada con la ecuación lineal.

Proposición 42. *Consideremos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, *para* $i = 1, \ldots, n$.

a) Sea

$$p_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

entonces el polinomio característico de la matriz A *es*

$$|A - \lambda I_n| = (-1)^n p_n(\lambda).$$

b) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *son autovalores, de multiplicidad* $n_1, \ldots, n_p$ *respectivamente, se verifica que*

$$\ker(A - \lambda_i I_n)^{n_i} = \langle v_1(\lambda_i), \ldots, v_{n_i}(\lambda_i)\rangle$$

con

$$v_j(\lambda) = \frac{1}{(j-1)!}\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Demostración. La prueba de a) puede hacerse por un procedimiento de inducción sobre n. Los primeros casos son elementales y pueden comprobarse. Supongamos que el resultado se verifica para n y veamos que se cumple para $n+1$. En efecto,

$$|A - \lambda I_{n+1}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n+1} & -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} - (-1)^{n+2} a_{n+1}$$
$$= -\lambda((-1)^n p_n(\lambda)) - (-1)^{n+2} a_{n+1} = (-1)^{n+1} p_{n+1}(\lambda).$$

La demostración del apartado b) es una consecuencia de las igualdades

$$Av_1(\lambda_i) = \lambda_i v_1(\lambda_i) \tag{9.1}$$

y

$$Av_j(\lambda_i) = \lambda_i v_j(\lambda_i) + v_{j-1}(\lambda_i) \tag{9.2}$$

para $j = 2, \dots, n_i$. De este hecho deducimos que $v_1(\lambda_i) \in \ker(A - \lambda_i I_n)$ y $v_j(\lambda_i) \in \ker(A - \lambda_i I_n)^j \setminus \ker(A - \lambda_i I_n)^{j-1}$, para $j = 2, \dots, n_i$; luego en particular los vectores $\{v_j(\lambda_i)\}_{j=1,\dots,n_i}$ pertenecen a $\ker(A - \lambda_i I_n)^{n_i}$. Usando que son linealmente independientes y que la dimensión de $\ker(A - \lambda_i I_n)^{n_i}$ es, como máximo, n_i concluimos.

Probemos (9.1) y (9.2). Para la primera de ellas se tiene que

$$Av_1(\lambda_i) = \lambda_i v_1(\lambda_i) \iff (A - \lambda_i I_n) v_1(\lambda_i) = 0$$

y esto es obvio ya que

$$\begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \lambda_i^3 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -p_n(\lambda_i) \end{pmatrix} = \overline{0}_n$$

por ser λ_i un valor propio. Para probar (9.2) basta chequear que, para $j \geq 2$,

$$\frac{1}{(j-1)!} \left(-\lambda \frac{d^{j-1}\lambda^k}{d\lambda^{j-1}} + \frac{d^{j-1}\lambda^{k+1}}{d\lambda^{j-1}} \right) = \frac{1}{(j-2)!} \frac{d^{j-2}\lambda^k}{d\lambda^{j-2}}.$$

Con esto tendremos inmediatamente que

$$(A - \lambda_i I_n) v_j(\lambda_i) = v_{j-1}(\lambda_i) - \frac{1}{(j-1)!} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_n^{(j-1)}(\lambda_i) \end{pmatrix} = v_{j-1}(\lambda_i),$$

para $j = 2, \dots, n_i$, puesto que λ_i es raíz de los polinomios $\{p_n^{(k)}(\lambda)\}_{k=0,\dots,n_i-1}$ ya que es un cero de multiplicidad n_i. □

Nota 19. El polinomio p_n que aparece en la proposición anterior se denomina polinomio característico asociado con la ecuación

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = 0.$$

La ecuación $p_n(\lambda) = 0$ se conoce como ecuación característica.

Ahora estamos en condiciones de describir las soluciones de una ecuación lineal de orden n homogénea de coeficientes constantes.

Teorema 43. *Consideramos la ecuación*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = 0,$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, n$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ las raíces de la ecuación característica asociada a la ecuación dada con multiplicidades respectivas $n_1, \ldots, n_p$. Entonces las funciones

$$\{t^j e^{t\lambda_i} : i = 1, \ldots, p, \quad j = 0, 1, \ldots, n_i - 1\}$$

forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación.

La demostración queda como ejercicio ya que es una aplicación de la proposición anterior y del método descrito en la sección previa.

Nota 20. a) Cualquier solución de una ecuación lineal de orden n homogénea con coeficientes constantes puede escribirse como

$$x(t) = \sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i t}(c_{i,0} + c_{i,1}t + \cdots + c_{i,n_i-1}t^{n_i-1}).$$

b) Si λ_i y $\overline{\lambda}_i$ son raíces de la ecuación característica podemos sustituir las soluciones

$$\{t^j e^{\lambda_i t}, t^j e^{\overline{\lambda}_i t} : j = 1, \ldots, n_i - 1\}$$

por

$$\{t^j e^{\operatorname{Re}\lambda_i t}\cos(\operatorname{Im}\lambda_i t), t^j e^{\operatorname{Re}\lambda_i t}\operatorname{sen}(\operatorname{Im}\lambda_i t) : j = 1, \ldots, n_i - 1\}.$$

***Ejemplo* 46.** La solución general de la ecución $x'' + w^2 x = 0$ ya se obtuvo usando un método de reducción de orden. Sin embargo, resulta mucho más sencillo obtener la solución ahora. Consideramos la ecuación característica asociada con la ecuación: $\lambda^2 + w^2 = 0$. Las soluciones son $\lambda = \pm iw$, luego las soluciones fundamentales serían $\{e^{iwt}, e^{-iwt}\}$ que, como ya hemos comentado, pueden sustituirse por $\{\operatorname{sen}(wt), \cos(wt)\}$. Así cualquier solución puede escribirse como $x(t) = A\operatorname{sen}(wt) + B\cos(wt)$. $\triangleleft$

***Ejemplo* 47.** Obtener la solución general de la ecuación

$$x'' + 2x' + x = -e^{-t}\log t.$$

Cualquier solución será de la forma $x(t) = x_p(t) + Ax_1(t) + Bx_2(t)$, con x_p una solución particular de la ecuación y x_1, x_2 soluciones fundamentales de la ecuación homogénea asociada. La ecuación homogénea asociada es una lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Para encontra las soluciones fundamentales consideramos la ecuación característica $\lambda^2+2\lambda+1=0$ que tiene a $\lambda = -1$ como única raíz doble. Luego las soluciones fundamentales de la ecuación homogénea son $\{e^{-t}, te^{-t}\}$.

Suponemos ahora una solución particular de la forma $x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$, con $x_1(t) = e^{-t}$ y $x_2(t) = te^{-t}$. Las funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ vendrán determinadas por el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-t}\log t \end{pmatrix},$$

cuyas soluciones son

$$c_1(t) = \frac{t^2}{4}(2\log t - 1) + k_1 \qquad \text{y} \qquad c_2(t) = -t(\log t - 1) + k_2.$$

Con esto

$$x(t) = \frac{t^2}{4}e^{-t}(3 - 2\log t) + e^{-t}(A + Bt).$$

En la figura 9.3 hemos trazado en verde la solución particular y tonos rojizos otra soluciones de la ecuación. Debemos observar que para valores grandes de t todas las soluciones tienden a comportarse como la solución. Este fenómeno se debe a que los términos correspondientes a la solución general son cada vez más pequeños. $\triangleleft$

9.2.1. La ecuación de Euler

La ecuación

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + a_2 t^{n-2} x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} t x' + a_n x = 0$$

se denomina ecuación de Euler o ecuación equidimensional de Euler. Esta ecuación no es lineal pero se convierte en una lineal de orden n con coeficientes constantes mediante el cambio de variable $t = e^s$. Para ello basta observar que

$$t^n x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} b_{n,k} \frac{d^k x}{ds^k},$$

para ciertos coeficientes $b_{n,k}$. Para $n = 1$ tenemos que

$$tx' = t\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds}$$

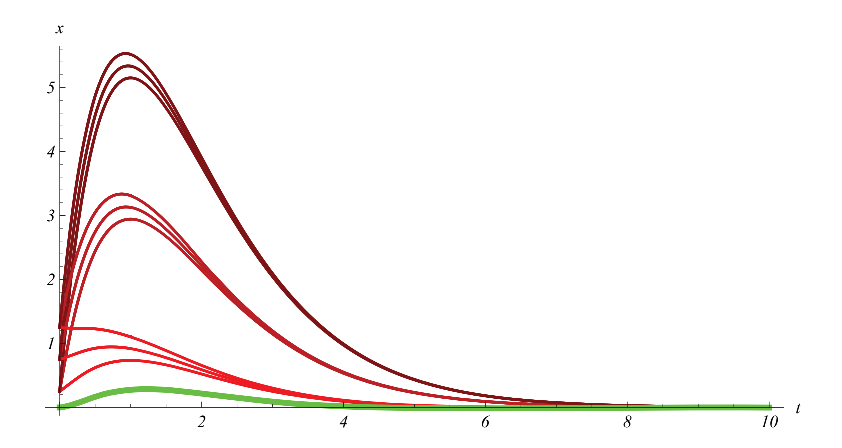


Figura 9.3: En verde la solución particular del Ejemplo 46 y en tonos rojizos otras curvas solución, las del igual color se corresponden con un mismo valor del parámetro B. Observad como a largo plazo todas las soluciones tienden hacia la solución particular.

ya que $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}$. Supuesto que se cumple para n, se tiene que

$$\begin{aligned} t^{n+1}x^{(n+1)} &= t^{n+1}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^n}\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\frac{d^kx}{ds^k}\right) = t^{n+1}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{t^n}\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\frac{d^kx}{ds^k}\right)\frac{ds}{dt} \\ &= t^n\left(-\frac{n}{t^{n+1}}\frac{dt}{ds}\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\frac{d^kx}{ds^k} + \frac{1}{t^n}\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\frac{d^{k+1}x}{ds^{k+1}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(-nb_{n,k} + b_{n,k-1})\frac{d^kx}{ds^k} = \sum_{k=1}^{n+1} b_{n+1,k}\frac{d^kx}{ds^k}. \end{aligned}$$

Se puede considerar una versión un poco más general de la ecuación de Euler:

$$(pt+q)^n x^{(n)} + a_1(pt+q)^{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(pt+q)x' + a_n x = 0,$$

para ciertas constante p y q. Esta versión más general se reduce a una ecuación lineal de orden n con coeficientes constantes con el cambio de variable $pt+q = e^s$.

9.3. Obtención de soluciones particulares para sistemas y ecuaciones lineales con coeficientes constantes

En el Ejemplo 47 que hemos analizado en la sección anterior hemos obtenido una solución particular para una ecuación lineal de orden n con coeficientes constantes no homogénea usando el método de variación de las constantes. Este

método es efectivo pero laborioso. Veamos que en el caso de ecuaciones y sistemas lineales de coeficientes constantes es posible obtener soluciones particulares de una manera más sencilla si el término independiente tiene una forma específica. Este procedimiento se denomina *método de los coeficientes indeterminados.*

Proposición 44. *Consideramos el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes constantes $x' = Ax + b(t)$ donde*

$$b(t) = e^{\alpha t} r_m(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} r_{m,1}(t) \\ r_{m,2}(t) \\ \vdots \\ r_{m,n}(t) \end{pmatrix}$$

siendo $r_{m,i}(t)$, para $i = 1, \ldots, n$, polinomios de grado m. Entonces

a) Si α no es un valor propio de la matriz A, existe una solución particular del sistema $x' = Ax + b(t)$ de la forma

$$x_p(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \phi_{m,1}(t) \\ \phi_{m,2}(t) \\ \vdots \\ \phi_{m,n}(t) \end{pmatrix}$$

donde los $\phi_{m,i}(t)$, para $i = 1, \ldots, n$, son polinomios de grado m.

b) Si α es un valor propio de la matriz A de multiplicidad q en el polinomio mínimo, existe una solución particular del sistema $x' = Ax + b(t)$ de la forma

$$x_p(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \phi_{m+q,1}(t) \\ \phi_{m+q,2}(t) \\ \vdots \\ \phi_{m+q,n}(t) \end{pmatrix}$$

donde los $\phi_{m+q,i}(t)$, para $i = 1, \ldots, n$, son polinomios de grado $m + q$.

Posponemos la demostración de este hecho para otro momento y veamos la forma de trabajar con esta proposición mediante unos ejemplos.

***Ejemplo* 48.** Determinar la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema homogéneo correspondiente se analizó, en un contexto más general, en el Ejemplo 44 de este capítulo. Así, sabemos que posee tres autovalores distintos $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ y $\lambda_3 = -5$; y $\ker A = \langle (4, 0, 3) \rangle$, $\ker(A - 5I_3) =$

$\langle(-3,5,4)\rangle$ y $\ker(A+5I_3) = \langle(-3,-5,4)\rangle$. Luego la solución general del sistema será $x(t) = x_p(t) + c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + c_3\phi_3(t)$, donde $x_p(t)$ es una solución particular y $\phi_1(t) = (4,0,3)$, $\phi_2(t) = e^{5t}(-3,5,4)$ y $\phi_3(t) = e^{-5t}(-3,-5,4)$. Para obtener la solución particular comenzaremos observando que

$$b(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, usando el principio de superposición de soluciones, para obtenerla buscaremos una solución particular del tipo

$$x_{p,1}(t) = e^t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

para el sistema

$$x' = Ax + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ya que uno no es valor propio de A, y otra del tipo

$$x_{p,2}(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{pmatrix}$$

para el sistema

$$x' = Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

puesto que cero es valor propio de multiplicidad mínima uno. En el primer caso derivando y sustituyendo se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 1, \\ 3\alpha + \beta - 4\gamma = 0, \\ -4\beta + \gamma = 0, \end{cases}$$

cuya solución es $\alpha = 5/8$, $\beta = 1/8$ y $\gamma = 1/2$. Para el segundo obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a = -3ct - 3d, \\ c = (4e - 3a)t + 4f - 3b, \\ e = 4ct + 4d + 1, \end{cases}$$

con solución $a = 12/25$, $c = 0$, $d = -4/25$, $e = 9/25$ y las variables b y f relacionadas por $3b = 4f$, en particular podemos tomarlas nulas. Así, la solución particular es

$$x_p(t) = x_{p,1}(t) + x_{p,2}(t) = \left(e^t\frac{5}{8} + \frac{12}{25}t, e^t\frac{1}{8} - \frac{4}{25}, e^t\frac{1}{2} + \frac{9}{25}t\right).$$

$\triangleleft$

***Ejemplo* 49.** Encontrar la solución general del sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} x + e^{ct} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

en función del parámetro real c.

En el Ejemplo 42 ya vimos que los valores propios asociados con la matriz del sistema son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + 2i$ y $\lambda_3 = 1 - 2i$ y que $\ker(A - I_3) = \langle(2, -2, 3)\rangle$, $\ker(A-(1+2i)I_3) = \langle(0, 1, i)\rangle$ y $\ker(A-(1-2i)I_3) = \langle(0, 1, -i)\rangle$. Con esto un sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo será $\phi_1(t) = e^t(2, -2, 3)$,

$$\phi_2(t) = \frac{1}{2}(e^{(1+2i)t}(0, 1, i) + e^{(1-2i)t}(0, 1, -i)) = e^t(0, \cos(2t), -\operatorname{sen}(2t))$$

y

$$\phi_3(t) = \frac{i}{2}(e^{(1+2i)t}(0, 1, i) - e^{(1-2i)t}(0, 1, -i)) = e^t(0, -\operatorname{sen}(2t), -\cos(2t)).$$

Para obtener la solución general necesitaremos una solución particular. La buscaremos por el método de los coeficientes indeterminados teniendo en cuenta dos casos:

a) *Caso* $c \neq 1$. Puesto que c no es un valor propio de A tantearemos con una solución particular de la forma

$$x_{p,c}(t) = e^{ct} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Derivando y sustituyendo obtenemos el sistema

$$\begin{cases} (c-1)\alpha = 1, \\ -3\alpha + (c-1)\beta + 2\gamma = 0, \\ -2\alpha - 2\beta + (c-1)\gamma = 1, \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$\alpha = \frac{1}{c-1}, \quad \beta = \frac{c-5}{(c-1)(c^2-2c+5)} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{c^2+5}{(c-1)(c^2-2c+5)}.$$

b) *Caso* $c = 1$. Puesto que $c = 1$ es un valor propio de A tantearemos con una solución particular de la forma

$$x_{p,1}(t) = e^t \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{pmatrix}.$$

Nuevamente, derivando (observar que ahora es un producto) y sustituyendo llegamos a las ecuaciones

$$\begin{cases} a = 1, \\ -3(at+b) + 2(et+f) + c = 0, \\ -2(at+b) - 2(ct+d) + e = 1, \end{cases}$$

de las que deducimos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a = 1, \\ -3a + 2e = 0, \\ -3b + 2f + c = 0, \\ -2a - 2c = 0, \\ -2a - 2d + e = 1, \end{cases}$$

cuya solucion es $a = 1$, $c = -1$, $d = -\frac{3}{4}$, $e = \frac{3}{2}$ y $f = \frac{1}{2} + \frac{3b}{2}$, que tomando $b = 0$ da $f = \frac{1}{2}$.

Luego la solución general será

$$x(t) = e^t(2k_1, -2k_1 + k_2\cos(2t) - k_3\operatorname{sen}(2t), 3k_1 - k_2\operatorname{sen}(2t) - k_3\cos(2t)) + \begin{cases} e^{ct}\left(\frac{1}{c-1}, \frac{c-5}{(c-1)(c^2-2c+5)}, \frac{c^2+5}{(c-1)(c^2-2c+5)}\right), & \text{si } c \neq 1, \\ e^t\left(t, -t - \frac{3}{4}, \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\right), & \text{si } c = 1. \end{cases}$$

◁

Nota 21. Si $b(t) = e^{\alpha t}(\operatorname{sen}(\beta t)r_m(t) + \cos(\beta t)p_m(t))$, podemos tener en cuenta las relaciones

$$e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t) = \frac{1}{2i}(e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{-(\alpha+i\beta)t})$$

y

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t) = \frac{1}{2}(e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{-(\alpha+i\beta)t})$$

y usar el principio de superposición de soluciones. Este procedimiento nos dará lugar a dos soluciones posiblemente complejas y que deberemos manipular para eliminar la parte imaginaria puesto que la solución particular deberá ser una función real. Para evitar ese procedimiento en estos casos se suele tantear con soluciones de la forma

$$x_p(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\phi_m(t) + \operatorname{sen}(\beta t)\psi_m(t))$$

si $\alpha + i\beta$ no es un valor propio de la matriz A, y de la forma

$$x_p(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\phi_{m+q}(t) + \operatorname{sen}(\beta t)\psi_{m+q}(t))$$

si $\alpha + i\beta$ es un valor propio de la matriz A de multiplicidad q en el polinomio mínimo. La existencia de soluciones particulares de esta forma se puede probar sin dificultad.

***Ejemplo* 50.** Obtener la solución general del sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

En este caso, teniendo en cuenta que el único valor propio de la matriz del sistema (denotado por A como es usual) es $\lambda = 2$ con multiplicidad dos y que

$$\mathbb{R}^2 = \ker(A - 2I_2)^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle,$$

la solución general del sistema homogéneo es

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{2t}((1,0) + t(1,1)) + c_2 e^{2t}((0,1) + t(-1,-1)) \\ &= e^{2t}(c_1 + (c_1 - c_2)t, c_2 + (c_1 - c_2)t). \end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} = \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y que i no es valor propio de la matriz A, tantearemos con una solución particular de la forma

$$x_p(t) = \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en el sistema de ecuaciones obtendremos las relaciones

$$\begin{cases} a \cos t - c \operatorname{sen} t = (3a - b) \operatorname{sen} t + (3c - d) \cos t + \operatorname{sen} t, \\ b \cos t - d \operatorname{sen} t = (a + b) \operatorname{sen} t + (c + d) \cos t + \cos t, \end{cases}$$

que dan lugar al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a - 3c + d = 0, \\ -3a + b - c = 1, \\ b - c - d = 1, \\ a + b + d = 0, \end{cases}$$

cuya solución es $a = -\frac{3}{25}$, $b = \frac{12}{25}$, $c = -\frac{4}{25}$ y $d = \frac{-9}{25}$. Por tanto la solución general del sistema será

$$x(t) = e^{2t}(c_1 + (c_1 - c_2)t, c_2 + (c_1 - c_2)t) + \frac{1}{25}(-3 \operatorname{sen} t - 4 \cos t, 12 \operatorname{sen} t - 9 \cos t).$$

En la figura 9.4 se han trazado algunas curvas solución del sistema para valores de t en el intervalo $[-4\pi, 1]$, al tomar valores muy pequeños de t las curvas se van aproximando a la elipse determinada por la solución particular. $\triangleleft$

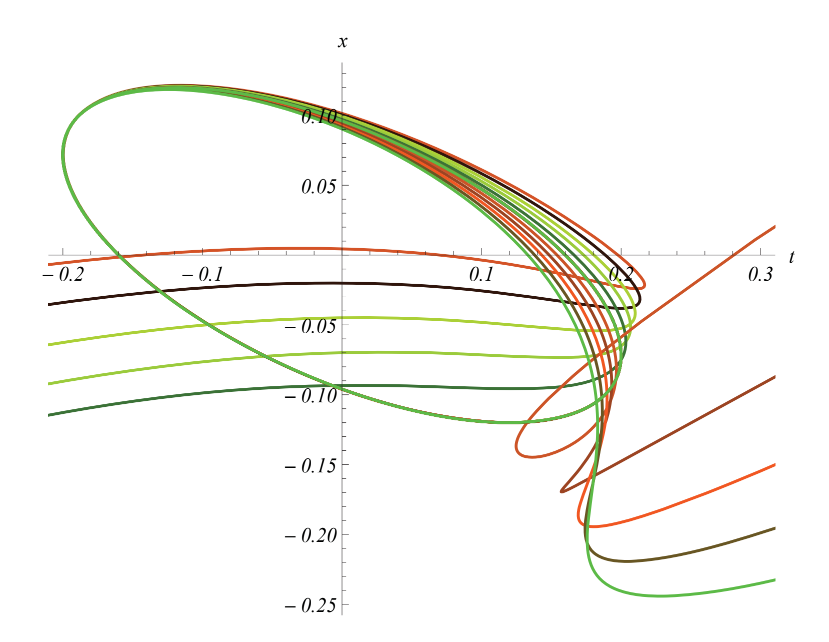


Figura 9.4: Diversas curvas solución del sistema del Ejemplo 50 para distintos valores de los parámetros c_1 y c_2 trazadas para $t \in [-4\pi, 1]$.

En el caso de las ecuaciones lineales de orden n tenemos el siguiente análogo del método de los coeficientes indeterminados.

Proposición 45. *Consideramos la ecuación lineal de orden* n

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = c(t)$$

donde $c(t) = e^{\alpha t} r_m(t)$*, siendo* $r_m(t)$ *un polinomio de grado* m*. Entonces*

a) Si α *no es raíz de la ecuación característica asociada con la ecuación lineal homogénea existe una solución particular de la forma*

$$x_p(t) = e^{\alpha t}\phi_m(t)$$

donde $\phi_m(t)$ *es un polinomio de grado* m*.*

b) Si α *es raíz de la ecuación característica asociada con la ecuación lineal homogénea con multiplicidad* q *existe una solución particular de la forma*

$$x_p(t) = e^{\alpha t} t^q \phi_m(t)$$

donde $\phi_m(t)$ *es un polinomio de grado* m*.*

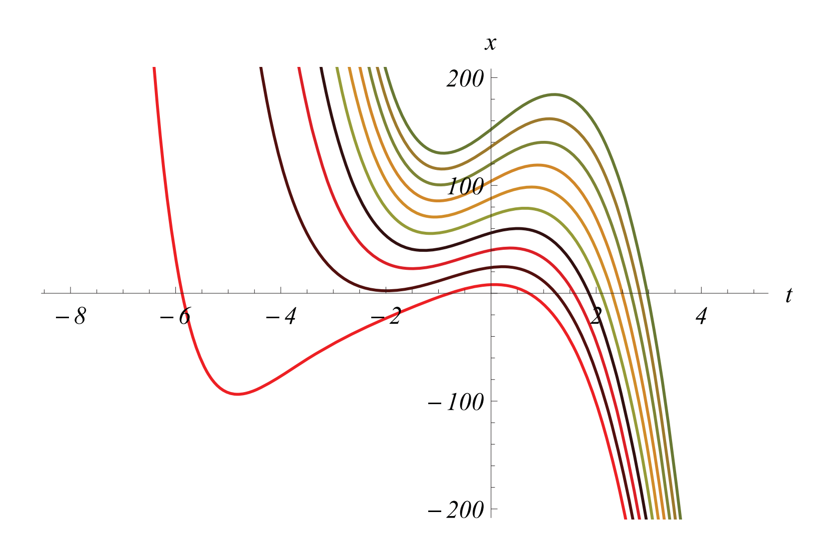


Figura 9.5: Diversas curvas solución de la ecuación del Ejemplo 51.

***Ejemplo* 51.** Encontrar la solución general de la ecuación

$$x''' + x'' = -12t^2 - 54t - 60.$$

La ecuación característica asociada con la ecuación homogénea es $\lambda^3+\lambda^2 = 0$ y sus raíces son $\lambda = 0$ doble y $\lambda = -1$. Luego una base de soluciones de la ecuación homogénea será $\{1, t, e^{-t}\}$. Para obtener una solución particular probaremos con $x_p(t) = t^2(At^2 + Bt + C)$ ya que 0 es una raíz doble de la ecuación característica. Tras derivar y sustituir llegamos a

$$12At^2 + 6(4A + B)t + 2(3B + C) = -12t^2 - 54t - 60,$$

de donde concluimos que $A = -1$, $B = -5$ y $C = -15$. Por tanto la solución general es

$$x(t) = a + bt + ce^{-t} - t^2(t^2 + 5t + 15).$$

En la figura 9.5 se muestran algunas curvas solución de la ecuación. ◁

Nota 22. De manera análoga a como ocurría con los sistemas, si $c(t) = e^{\alpha t}(\operatorname{sen}(\beta t)r_m(t) + \cos(\beta t)p_m(t))$ se debe tantear con soluciones de la forma

$$x_p(t) = e^{\alpha t}(\operatorname{sen}(\beta t)\phi_m(t) + \cos(\beta t)\psi_m(t))$$

si $\alpha + i\beta$ no es solución de la ecuación característica, y de la forma

$$x_p(t) = e^{\alpha t}t^q(\operatorname{sen}(\beta t)\phi_m(t) + \cos(\beta t)\psi_m(t))$$

si $\alpha + i\beta$ es solución de multiplicidad q de la ecuación característica.

***Ejemplo* 52.** Determinar la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x''' - x'' + x' - x = 2\operatorname{sen} t - \cos t, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0. \end{cases}$$

La ecuación característica asociada con la ecuación homogénea es $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$ y sus raíces son $\lambda = 1, i, -i$. Con esto una base de soluciones para la ecuación homogénea es $\{e^t, \operatorname{sen} t, \cos t\}$.

Teniendo en cuenta que $c(t) = 2\operatorname{sen} t - \cos t$, para determinar la solución particular debemos tantear con la solución $x_p(t) = t(A\operatorname{sen} t + B\cos t)$ en la ecuación. Al sustituir obtenemos la relación

$$2(-A + B)\operatorname{sen} t - 2(A + B)\cos t = 2\operatorname{sen} t - \cos t$$

de donde deducimos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -A + B = 1, \\ 2(A + B) = 1, \end{cases}$$

y la solución es $A = -\frac{1}{4}$ y $B = \frac{3}{4}$. Así, la solución general de la ecuación es $x(t) = c_1 e^t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos t + \frac{t}{4}(3\cos t - \operatorname{sen} t)$. Imponiendo las condiciones iniciales llegamos a que $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = -1$ y $c_3 = -\frac{1}{4}$ y la solución buscada es

$$x(t) = \frac{1}{4}(e^t - (4 + t)\operatorname{sen} t + (3t - 1)\cos t).$$

◁

9.4. Problemas

Problema 228. Resolver los siguientes sistemas diferenciales homogéneos de coeficientes constantes:

$$\text{a)} \begin{cases} x' = 3x - y + z, \\ y' = -x + 5y - z, \\ z' = x - y + 3z, \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x' = y + z. \\ y' = z + x, \\ z' = x + y, \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x' = 2x + y - 2z, \\ y' = 1 - x, \\ z' = x + y - z, \end{cases} \quad \text{d)} \begin{cases} x' = 8y, \\ y' = -2z, \\ z' = 2x + 8y - 2z, \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4y - x. \end{cases}$$

Problema 229. Encontrar la solución general de los siguientes sistemas diferenciales lineales:

a) $\begin{cases} x' + 2x + 4y = 1 + 4t, \\ y' - x - y = \frac{3t^2}{2}, \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x' = 6x - y - 6t^2 - t + 3, \\ y' = 2y - 2t - 1, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' + 2y' + x + 7y = e^t + 2, \\ y' - 2x + 3y = e^t - 1, \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' + 2y' - 3x + 4y = 2\operatorname{sen} t, \\ 2x' + y' + 2x - y = \cos t, \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' - x + y' + 2y = 1 + e^t, \\ y' + 2y + z' + z = 2 + e^t, \\ x' - x + z' + z = 3 + e^t, \end{cases}$ f) $\begin{cases} x' = 2x + y - 2z - t + 2, \\ y' = 1 - x, \\ z' = x + y - z - t + 1. \end{cases}$

Problema 230. Resolver los siguientes problemas de Cauchy:

$$\text{a)} \begin{cases} x' + 3x + y = 0, & x(0) = 1, \\ y' - x + y = 0, & y(0) = 1, \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x' + y - 2x = 0, & x(0) = 9, \\ y' + x - 2y = -5e^t \operatorname{sen} t, & y(0) = 3, \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x' = 3x, & x(0) = 1, \\ y' = y + 5z + 1, & y(0) = 0, \\ z' = -5y + z + \operatorname{sen}(5t), & z(0) = 1. \end{cases}$$

Problema 231. Hallar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\text{a)} \begin{cases} x'' = -y' + 4x - 12 \\ y'' = 10x' + y - 7 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} y'' = z \\ z'' = y. \end{cases}$$

Problema 232. Encontrar la solución general del sistema diferencial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Problema 233. Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -b & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

con las condiciones iniciales $x_k(0) = 1 = -y_k(0)$, para $k = 1, \dots, n$.

Problema 234. Determinar la solución general del sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 2a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

en función de los valores del parámetro a.

Problema 235. Encontrar la solución general del sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = 3x + z, \\ y' = 2x + y + (1 - a^2)z, \\ z' = -x + y + z, \end{cases}$$

siendo $a \in \mathbb{R}$.

Problema 236. La posición de una partícula en movimiento en el espacio en función del tiempo viene dada como la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinar las ecuaciones de la trayectoria.

b) Probar que la partícula siempre se mueve sobre un plano.

c) Probar que si la partícula parte de un punto de la forma (c, c, c), con $c \neq 0$, la trayectoria que sigue es una recta.

Problema 237. Consideremos la matriz

$$A(a) = \begin{pmatrix} 3a-1 & 2a-1 & 1-a \\ 1 & a+1 & -1 \\ 2a & 2a & 0 \end{pmatrix},$$

donde a es un cierto parámetro real.

a) Obtener la solución general del sistema de ecuaciones $x' = A(a)x$.

b) Si $b^t(t) = e^{2t}(\alpha, \beta, \beta)$, resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = A(1)x + b(t), \\ x(0) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Problema 238. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes:

a) $x''' - 2x'' - 3x' = 0$,

b) $x''' + 4x'' + x' = 0$,

c) $x''' + 4x'' + 13x' = 0$,

d) $x^{(5)} - 2x^{(4)} + 2x''' - 4x'' + x' - 2x = 0$,

e) $x^{(4)} - x' = 0$,

f) $x^{(4)} + 4x''' + 8x'' + 8x' + 4x = 0$.

Problema 239. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

a) $x''' - x'' + x' - x = t^2 + t$,
b) $x'' - 6x' + 9x = 25e^t \operatorname{sen} t$,
c) $x''' - x'' = 12t^2 + 6t$,
d) $x'' + 4x = \operatorname{sen}(2t)$,
e) $x'' - 7x' = (t-1)^2$,
f) $x'' - 10x' + 2x = e^{5t}$,
g) $x'' - x' - 2x = e^t + e^{-2t}$,
h) $4x'' + 8x' + 2x = t \operatorname{sen} t$,
i) $x'' + x' = t^2 \operatorname{sen} t$,
j) $x^{(4)} - 2x'' + x = \cos t$,
k) $x'' + x' + x + 1 = \operatorname{sen} t + t + t^2$,
l) $x'' + 2x + 1 = 3 \operatorname{sen}(2t) + \cos t$,
m) $x'' + 2x' + x = -2$,
n) $x'' + 8x' = 8t$,
o) $x^{(4)} - 2x''' + 2x'' - 2x' + x = e^t$,
p) $x''' - 2x'' + 4x = t^4 + 3t^2 - 5t$,
q) $x'' + 3x' + 2x = t \operatorname{sen}(2t)$,
r) $x'' - 2x' + 2x = e^t \operatorname{sen}\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

Problema 240. Discutir la solución general de la ecuación

$$x'' + ax' + bx = 0,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Estudiar el comportamiento, en función de a y b, de la solución general cuando $t \to \infty$.

Problema 241. Resolver las siguientes ecuaciones de Euler:

a) $t^2x'' + 2tx' - 6x = 0$,
b) $t^2x'' - tx' + 2x = t \log t$,
c) $t^2x'' + 4tx' + \dfrac{5}{2}x = \dfrac{25}{14}\log^2 t + 17t^5$,
d) $t^3x''' + 3t^2x'' - 2tx' + 2x = 0$,
e) $t^2x'' - tx' + 4x = \cos(\log t) + t \operatorname{sen}(\log t)$,
f) $(t+2)^2x'' - (t+2)x' - 35x = 3t^2 + 4t + 1$,
g) $(t+1)^2x'' + (t+1)x' + x = 2\log(t+1) + t - 1$,
h) $t^3x''' + tx' - x = 3t^4$,
i) $t^2x'' - 2tx' + 2x = \log^2 t + 2\log t$.

Problema 242. Consideremos la ecuación $t^3x'' + 2t^2 = (tx' - x)^2$.

a) Transformar la ecuación dada en una ecuación de Euler mediante un cambio del tipo $x = -tf(v)$, donde $v = v(t)$ será la nueva función y f es una función a determinar.

b) Obtener la solución general de la ecuación inicial.

Problema 243. Resolver, por el método de variación de las constantes, las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes:

a) $x''' + x' = \operatorname{cosec} t$, b) $x'' - 6x' + 9x = \dfrac{e^{3t}}{t^2}$,

c) $x'' + x = \operatorname{cosec} t$, d) $x'' + 4x = 4\sec^2(2t)$,

e) $x'' - 4x' + 3x = \dfrac{e^t}{e^t + 1}$, f) $x'' - x = e^{-t} \operatorname{sen} e^{-t} + \cos e^{-t}$.

Problema 244. Consideramos la ecuación

$$x'' + f(t)x' + g(t)x = h(t).$$

Probar que si

$$g(t) - \frac{f'(t)}{2} - \frac{f^2(t)}{4} = \begin{cases} k \\ \text{ó} \\ \frac{k}{t^2} \end{cases}$$

y si $u(t)$ es tal que

$$2u'(t) + f(t)u(t) = 0,$$

entonces el cambio $x = u(t)v$ reduce la ecuación dada a una coeficientes constantes o a una de tipo de Euler en v y t.

Problema 245. Definimos el producto de convolución de dos funciones, f y g, como

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds.$$

Vamos a probar que la solución al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' + x = g(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$$

puede expresarse como un producto de convolución de una función apropiada con la función g.

a) Demostrar que la solución general de la ecuación

$$x'' + x = g(t)$$

es

$$x(t) = \left(c_1 - \int_\alpha^t g(s) \operatorname{sen} s\,ds\right) \cos t + \left(c_2 + \int_\beta^t g(s) \cos s\,ds\right) \operatorname{sen} t,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias y, α y β son puntos convenientemente elegidos.

b) Usando el apartado anterior probar que la condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = 0$ se verifican si

$$c_1 = \int_\alpha^0 g(s) \operatorname{sen} s \, ds, \qquad c_2 = -\int_\beta^0 g(s) \cos s \, ds.$$

Concluir que para cualquier función g se tiene que la solución del problema de valores iniciales dado es

$$x(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t-s) g(s) \, ds.$$

c) Por último, probar que la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' + x = g(t), \\ x(0) = x_0, \; x'(0) = x_0', \end{cases}$$

es

$$x(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t-s) g(s) \, ds + x_0 \cos t + x_0' \operatorname{sen} t.$$

Problema 246. Consideremos la ecuación $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$.

a) Determinar las condiciones que deben verificar p, q y ϕ para que el cambio de variable $t = \phi(u)$ transforme la ecuación dada en una ecuación de coeficientes constantes.

b) Usando el cambio de variable $t = \tanh u$ transformar la ecuación

$$(1-t^2)^2 x'' - (a+b+2t)(1-t^2)x' + abx = 0,$$

donde a y b son números reales cualesquiera. Obtener la solución general de la ecuación dada.

c) Sea b un número real no nulo. Probar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} (1-t^2)^2 x'' - 2t(1-t^2)x' - b^2 x = f(t)(1-t^2), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$$

admite una única solución definida para $t \in (-1,1)$ para cada función f continua en $(-1,1)$. Determinar una expresión integral para esta solución.

Problema 247. Dado el problema de Cauchy

$$(P) \begin{cases} t^2 x'' - 2x = t^3 e^t, \\ x(1) = 0, x'(1) = 1. \end{cases}$$

a) Resolver el problema (P) indicando claramente donde es válida la solución.

b) Considerando un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea dada en el problema (P) calcular su wronskiano, comprobando que es constante. ¿Era este hecho previsible? Escribir la forma general de una ecuación lineal de grado n tal que el wronskiano de cualquier sistema fundamental sea constante.

Problema 248. Consideramos la ecuación $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$.

a) Determinar qué condición debe verificarse para que el cambio de variable $t = \phi(s)$ transforme la ecuación en otra en la que no aparezca $\frac{dx}{ds}$.

b) Efectuando el cambio de variable $t = \log(s^2)$ obtener la solución general de la ecuación

$$x'' - \frac{1}{2}x' - e^t x = 0.$$

c) Obtener la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' - \frac{1}{2}x' - e^t x = e^t, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

Problema 249. Consideramos la ecuación

$$p(t)\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{p'(t)}{2}\frac{dx}{dt} + q(t)x = f(t).$$

a) Supongamos que en la ecuación propuesta efectuamos un cambio de variable de la forma $t = \phi(s)$. Determinar una relación entre $\phi'(s)$ y $p(\phi(s))$ que nos permita asegurar que después de realizar el cambio de variable no va a aparecer $\frac{dx}{ds}$ en la nueva ecuación.

b) Realizando el cambio de variable $t = \tan s$, obtener la solución general de la ecuación propuesta con $p(t) = (1 + t^2)^2$, $q(t) = 1$ y $f(t) = 1/t$.

Problema 250. Sean p y q dos valores reales tales que $p \geq |q|$. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x'' = y, \\ y'' = -q^2 x - 2py, \end{cases}$$

sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = \alpha$, $x'(0) = \beta$, $y(0) = \gamma$ e $y'(0) = \varepsilon$.

a) Probar que x e y satisfacen, respectivamente, los problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} x^{(iv)} + 2px'' + q^2 x = 0, \\ x(0) = \alpha, x'(0) = \beta, x''(0) = \gamma, x'''(0) = \varepsilon, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y^{(iv)} + 2py'' + q^2 y = 0, \\ y(0) = \gamma, y'(0) = \varepsilon, y''(0) = -q^2\alpha - 2p\gamma, y'''(0) = -q^2\beta - 2p\varepsilon. \end{cases}$$

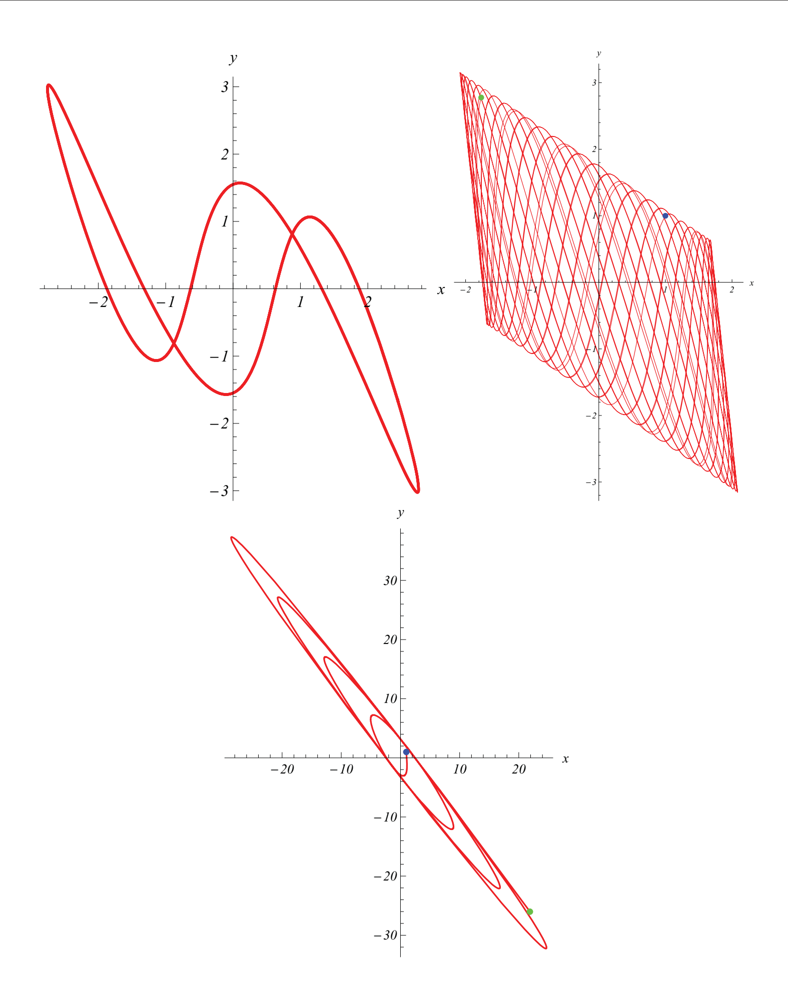


Figura 9.6: Tres soluciones del sistema homogéneo dado en el Problema 250. En todos los casos se ha tomado $\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = 1$. En la primera curva se ha usado $p = 5/2$ y $q = 3/2$ (observar que se trata de una curva cerrada), en la segunda $p = 5$ y $q = 5/2$ (en este caso la curva no se cierra y hemos marcado los extremos con puntos de colores) y en la tercera $p = q = 1.3$. Es interesante observar que en los dos primeros casos la curva está confinada a una región finita del plano y en el tercero la curva se va a expandiendo indefinidamente.

b) Obtener la solución del sistema de ecuaciones inicial. En la figura 9.6 se muestran tres soluciones del sistema.

c) Para $k \neq p$, obtener la solución general del sistema

$$\begin{cases} x'' = y + \operatorname{sen}(\sqrt{k}t), \\ y'' = -q^2 x - 2py. \end{cases}$$

¿Qué forma debería tener una solución particular de tanteo para el sistema si $k = p$? Algunas soluciones de este sistema no homogéneo se muestran en la figura 9.7.

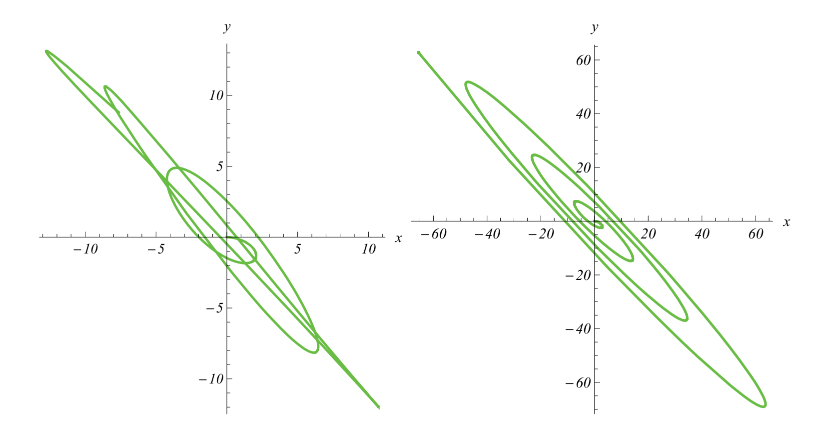


Figura 9.7: Dos soluciones del sistema del apartado c) del Problema 250. En los dos casos se ha tomado $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$. En la primera curva se ha usado $p = 1.1$ y $k = 2.1$ y en la segunda $p = k = 1.1$.

Problema 251. La trayectoria de una partícula en el plano está dada por la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m^2+n^2)x'' = -2n^2x' + 2nmy' - (10n^2+4m^2)x + 6nmy, \\ (m^2+n^2)y'' = 2nmx' - 2m^2y' + 6nmx - (10m^2+4n^2)y, \end{cases}$$

sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = \cos\alpha$ e $y'(0) = \operatorname{sen}\alpha$. Suponemos que $n, m \in \mathbb{R}$, $m^2 + n^2 \neq 0$ y $\alpha \in (0, \pi)$.

a) Probar que tomando como nuevas funciones $u = mx+ny$ y $v = -nx+my$, el sistema anterior se transforma en

$$\begin{cases} u'' = -4u, \\ v'' = -2v' - 10v, \end{cases}$$

sujeto a las condiciones iniciales $u(0) = v(0) = 0$, $u'(0) = m\cos\alpha + n\operatorname{sen}\alpha$ y $v'(0) = -n\cos\alpha + m\operatorname{sen}\alpha$.

b) Determinar las ecuaciones de la trayectoria de la partícula.

c) Probar que para valores grandes del tiempo la partícula tiende a desplazarse sobre la recta $my = nx$.

La figura 9.8 muestra la trayectoria de la partícula para $m = n = 1$ y $\alpha = 4\pi/4$ (curva roja) y para $m = 1$, $n = -1/2$ y $\alpha = \pi/2$ (curva verde).

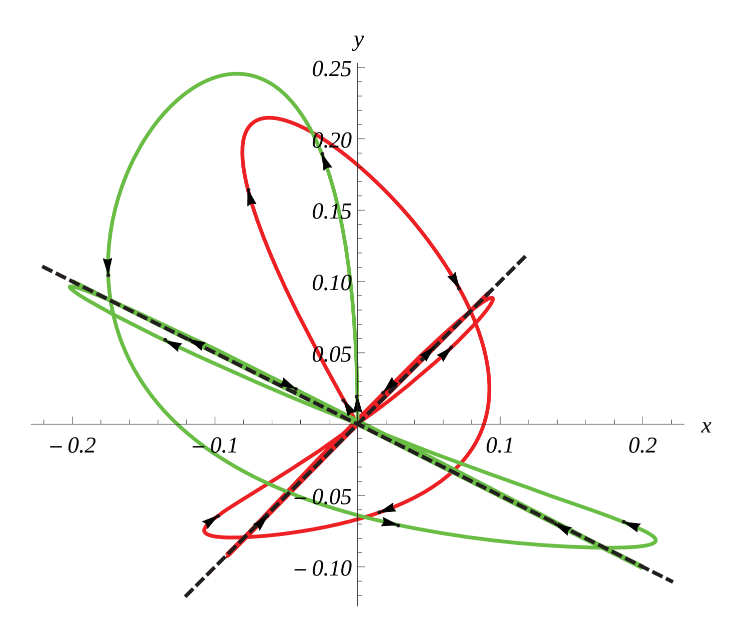


Figura 9.8: Trayectoria de la partícula del Problema 251 para ciertos valores de los parámetros y las rectas a las que se van aproximando.

Problema 252. La trayectoria de una partícula en el plano está dada por la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x'' = -a(x' - y') - 3a^2x + 2a^2y, \\ y'' = a(x' - y') + 2a^2x - 3a^2y, \end{cases}$$

sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = \cos\alpha$ e $y'(0) = \operatorname{sen}\alpha$. Suponemos que $a \in (0, \infty)$ y $\alpha \in (0, \pi)$.

a) Probar que tomando como nuevas funciones $u = x + y$ y $v = x - y$, el sistema anterior se transforma en

$$\begin{cases} u'' = -a^2u, \\ v'' = -2av' - 5a^2v, \end{cases}$$

sujeto a las condiciones iniciales $u(0) = v(0) = 0$, $u'(0) = \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$ y $v'(0) = \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha$.

b) Determinar las ecuaciones de la trayectoria de la partícula.

c) Probar que para valores grandes del tiempo la partícula tiende a desplazarse sobre la recta $y = x$.

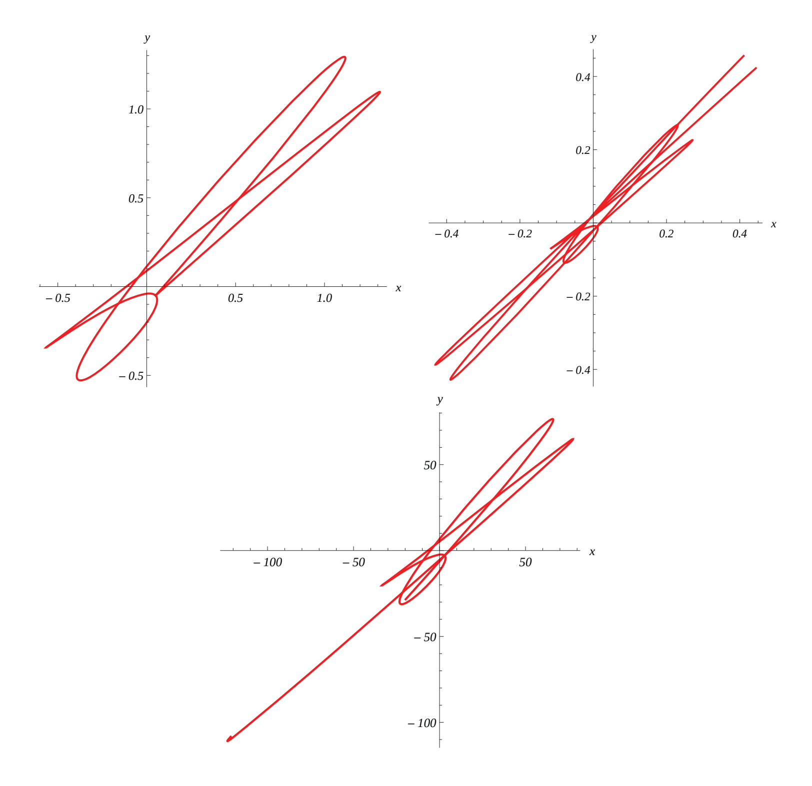


Figura 9.9: Algunas trayectorias de la partícula del apartado d) del Problema 252 para distintos valores de a.

Si la trayectoria de la partícula se ve modificada por una fuerza externa periódica y una variación en las condiciones iniciales, el sistema de ecuaciones que la gobierna se convierte en

$$\begin{cases} x'' = -a(x' - y') - 3a^2x + 2a^2y + \operatorname{sen}(at) + \cos(at), \\ y'' = a(x' - y') + 2a^2x - 3a^2y + \operatorname{sen}(at) - \cos(at), \end{cases}$$

sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = \frac{1}{5a^2}$, $y(0) = -\frac{1}{5a^2}$, $x'(0) = \frac{1}{10a}$ e $y'(0) = -\frac{1}{10a}$.

d) Determinar las nuevas ecuaciones de la trayectoria de la partícula. La trayectoria de la partícula en este caso se muestra en la figura 9.9 para diversos valores de a.

Capítulo 10

Modelizando con sistemas y ecuaciones lineales

10.1. ¿Qué cuesta más tiempo: subir o bajar?

A partir de las ecuaciones del tiro parabólico de Galileo, se deduce que el tiempo que emplea un proyectil en alcanzar su máximo y el tiempo que emplea en alcanzar el suelo es el mismo. En efecto, la trayectoria de un objeto lanzado con una velocidad v_0 y formando un ángulo α con la horizontal son

$$x = tv_0 \cos\alpha \qquad \text{e} \qquad y = tv_0 \operatorname{sen}\alpha - g\frac{t^2}{2}$$

y el máximo de la trayectoria, correspondiente al valor para el que $\frac{dy}{dt} = 0$, se alcanza para $t_m = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$. El proyectil alcanza el suelo, se trata de la raíz no nula de $y(t) = 0$, para $t_f = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$ y obviamente el tiempo de ascenso es igual al de descenso.

Este fenómeno ocurre si consideramos un medio sin resistencia del aire, lo que no es realista. Ya en el siglo XVII, con la teoría del tiro parabólico recién desarrollada por Galileo, se conocía que este hecho no era cierto. De hecho, en 1644 Marin Mersenne, realizando diversos experimentos con lanzamientos de arco, había comprobado que el tiempo de ascenso de un proyectil era menor que el de descenso y que la diferencia entre ambos se incrementaba con la velocidad inicial. Nuestro objetivo en este comentario es probar este hecho para un medio en el que suponemos que la fierza de rozamiento es proporcional a la velocidad, actuando en dirección contraria al movimiento. El contenido de esta seccción está esencialmente tomado del artículo “Timing is everything: the French connection” de G. W. Groetsch aparecido en el año 2003 en la revista *The American Mathematical Monthly*, págs. 950–955.



Una imagen de M. Mersenne (1588–1648), monje francés de la orden de los Mínimos, fundada por San Francisco de Paula. A pesar de su condición de monje, Mersenne fue un activo científico que trabajo en cuestiones de física, geometría (fue el primero en describir la cicloide como la curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda), combinatoria, armonía y teoría de números. Bien conocidos son los denominados primos de Mersenne, de la forma $2^p - 1$ con p primo.

Las trayectoria de un proyectil de masa unitaria lanzado con una velocidad v_0, formando un ángulo α con la horizontal y sujeto a una fuerza de rozamiento

proporcional a la velocidad viene dada como la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' = -kx', \\ y'' = -ky' - g, \\ x(0) = y(0) = 0, \\ x'(0) = v_0 \cos\alpha, y'(0) = v_0 \operatorname{sen}\alpha. \end{cases}$$

Las ecuaciones que aparecen son ambas lineales de segundo orden y de coeficientes constantes, en ambos casos la ecuación homogéneas es la misma y tiene ecuación característica $\lambda^2 + k\lambda = 0$. Usando que la raíces son $\lambda = 0$ y $\lambda = -k$, una base de soluciones será $\{1, e^{-kt}\}$. Para la componente x, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, tendremos que

$$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{k} \left(1 - e^{-kt}\right).$$

Para la componente y deberemos determinar una solución particular y, puesto que $\lambda = 0$ es solución de la ecuación característica, probaremos con $y_p(t) = at$. Tras la correspondiente sustitución se llega a que $a = -g/k$ y, con las condiciones iniciales se concluye que

$$y(t) = \frac{gc}{k^2} \left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{gt}{k},$$

donde por brevedad hemos denotado $c = 1 + \frac{v_0 k \operatorname{sen}\alpha}{g}$.

Para analizar la cuestión que nos interesa debemos determinar, en primer lugar, el tiempo requerido por el proyectil para alcanzar el máximo. Este valor, t_m, se corresponde con la raíz de $y'(t) = 0$; es decir

$$\frac{g}{k} \left(ce^{-kt} - 1\right) = 0 \iff t_m = \frac{\log c}{k}.$$

Por otra parte, el tiempo total que emplea el proyectil en alcanzar el suelo (la raíz no nula de $y(t) = 0$) está dado implícitamente por la ecuación

$$t_f = \frac{c}{k} \left(1 - e^{-kt_f}\right). \tag{10.1}$$

Para comprobar que el tiempo de descenso, que se corresponde con $t_f - t_m$, es mayor que el de descenso basta probar que $t_f > 2t_m$. En el estudio de nuestra desigualdad será fundamental la siguiente

Proposición 46. *Para cada $c > 1$, la ecuación*

$$p = 1 - e^{-cp}$$

posee una única raíz positiva p_0. Además, $s > p_0$ si y solo si $s > 1 - e^{-cs}$.

Demostración. La imagen de la figura 10.1, en la que se muestran la recta $y = s$ y las curvas $y = 1 - e^{-cs}$ para diversos valores de c, pone de manifiesto

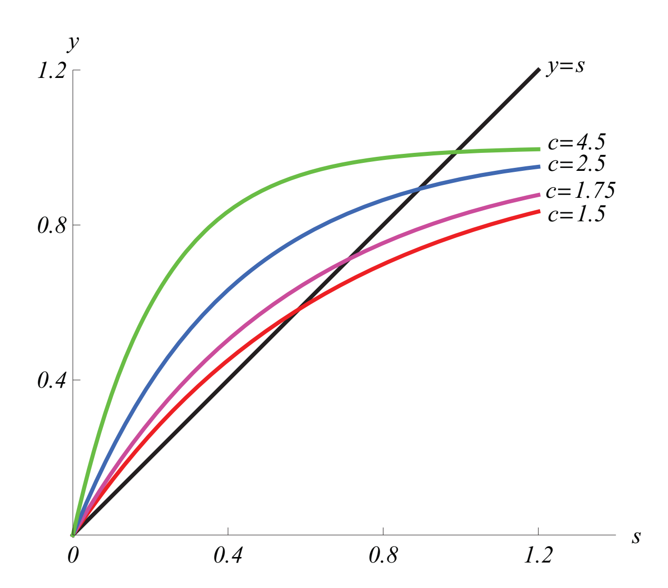


Figura 10.1: La imagen muestra la recta $y = s$ (en negro) y las curvas $y = 1-e^{-cs}$ para diversos valores de c (en colores) y evidencia el resultado de la Proposición 46.

la veracidad del resultado que queremos probar. Sin embargo, la imagen en sí misma no es una demostración de la proposición. Para hacer una prueba rigurosa consideremos la función $f(s) = 1 - e^{-cs} - s$. Es claro que $f(0) = 0$, $\lim_{s\to+\infty} f(s) = -\infty$ y

$$f\left(\frac{\log c}{c}\right) = 1 - \frac{1}{c} - \frac{\log c}{c} = \frac{c - 1 - \log c}{c} > 0.$$

Por tanto es claro que en el intervalo $\left(\frac{\log c}{c}, +\infty\right)$ la función f posee al menos una raíz p_0. Si tuviese más de una raíz positiva entonces f' tendría al menos dos raíces pero

$$f'(s) = ce^{-cs} - 1 = 0 \iff s = \frac{\log c}{c}.$$

De una modo análogo, se puede probar que $f(s) > 0$ si $s \in (0, p_0)$ y $f(s) < 0$ si $s \in (p_0, \infty)$. □

La desigualdad que queremos probar $t_f > 2t_m$ es equivalente a $\frac{k}{c}t_f > \frac{2}{c}\log c$. Ahora usando que t_f es solución de la ecuación (10.1) y la proposición anterior, esta desigualdad se cumplirá si y solo si

$$1 - e^{-2\log c} > \frac{2}{c}\log c,$$

que teniendo en cuenta la relación $c = e^{kt_m}$, se transforma en $\operatorname{senh}(kt_m) > kt_m$, que es obviamente cierta por ser $kt_m > 0$.

Hasta ahora hemos probado que el tiempo de subida es mayor que el de bajada y esto es únicamente la primera parte de la afirmación de Mersenne. En la segunda parte aseguraba que la variación entre los tiempos se incrementaba con la velocidad inicial. Para probar este hecho es suficiente verificar que

$$\frac{d(t_f - 2t_m)}{dv_0} > 0. \tag{10.2}$$

La dependencia de t_f y t_m de v_0 es únicamente a través de c y, por tanto,

$$\frac{d(t_f - 2t_m)}{dv_0} = \frac{d(t_f - 2t_m)}{dc}\frac{dc}{dv_0} = \frac{d(t_f - 2t_m)}{dc}\frac{k \operatorname{sen}\alpha}{g}.$$

Luego (10.2) se verificará si $\frac{d(t_f - 2t_m)}{dc} > 0$. Resulta sencillo comprobar que

$$\frac{2t_m}{dc} = \frac{2}{kc}$$

y de la relación (10.1) deducimos que (la derivabilidad de t_f respecto a c viene asegurada por el teorema de la función implicita)

$$\frac{dt_f}{dc} = \frac{1}{k}\left(1 - e^{-kt_f}\right) + ce^{-kt_f}\frac{dt_f}{dc};$$

es decir,

$$\frac{dt_f}{dc} = \frac{1 - e^{-kt_f}}{k(1 - ce^{-kt_f})}.$$

Por tanto, usando (10.1),

$$\begin{aligned} \frac{d(t_f - 2t_m)}{dc} > 0 &\iff \frac{1 - e^{-kt_f}}{1 - ce^{-kt_f}} > \frac{2}{c} \\ &\iff \frac{\frac{kt_f}{c}}{1 - c\left(1 - \frac{kt_f}{c}\right)} > \frac{2}{c} \\ &\iff \frac{2(c-1)}{c} > \frac{kt_f}{c} \\ &\iff \frac{2(c-1)}{c} > 1 - e^{-2(c-1)}, \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado la Proposición 46. Finalmente, tomando $c - 1 = d > 0$, la última desigualdad anterior se transforma en

$$\frac{1-d}{1+d} < e^{-2d},$$

que es equivalente a $\tanh d < d$ y cierta puesto que $d > 0$.

Para concluir esta sección hagamos una pequeña observación sobre las trayectorias de los proyectiles analizados. En el caso del tiro parabólico todas las trayectorias quedaban encerradas por una parábola, que denominamos parábola

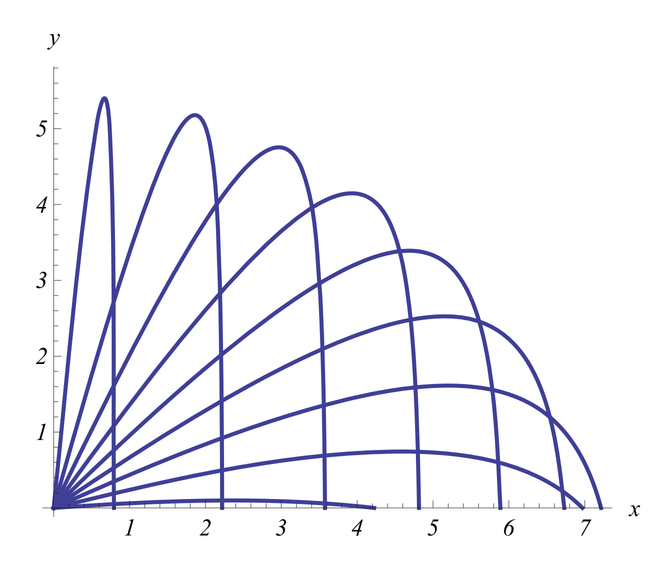


Figura 10.2: Algunas trayectorias de los proyectiles con rozamiento trazadas para $v_0 = 20.8$ y $k = 5.5$. Observar que las curvas están lejos de ser parábolas, lo que se debe al efecto del rozamiento.

de seguridad, fuera de la cual no era posible que ningún objeto fuese alcanzado por los proyectiles. En este caso ocurre algo análogo, existe una curva de seguridad que encierra a todas las trayectorias. En primer lugar conviene observar, podemos verlo en la figura 10.2, que las trayectorias en esta situación están lejos de ser parábolas debido al efecto del rozamiento. La curva de seguridad de esta familia de curvas será su envolvente. Para obtenerla comenzamos eliminando el parámetro t de las ecuaciones parámetricas de la trayectoria y obtenemos que

$$y = \frac{v_0 k \operatorname{sen} \alpha + g}{v_0 k \cos \alpha} + \frac{g}{k^2} \log \left(1 - \frac{kx}{v_0 \cos \alpha} \right) := f(x, \alpha).$$

Ahora, para encontrar una ecuación implícita para la envolvente deberíamos intentar eliminar α usando las ecuaciones

$$\begin{cases} y = f(x, \alpha), \\ \dfrac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

Este hecho resulta imposible y parece mucho más sensato intentar determinar unas coordenadas paramétricas para la envolvente tomando, precisamente, α como parámetro. Haciendo esto se obtiene que

$$x = \frac{v_0^2 \cos \alpha}{v_0 k + g \operatorname{sen} \alpha} \quad \text{e} \quad y = \frac{v_0}{k} \frac{g + v_0 k \operatorname{sen} \alpha}{v_0 k + g \operatorname{sen} \alpha} - \frac{g}{k^2} \log \left(1 + \frac{v_0 k}{g \operatorname{sen} \alpha} \right)$$

son las coordenadas buscadas para la curva de seguridad. En la figura 10.3 se han trazado algunas trayectorias (en azul) y su envolvente (en rojo).

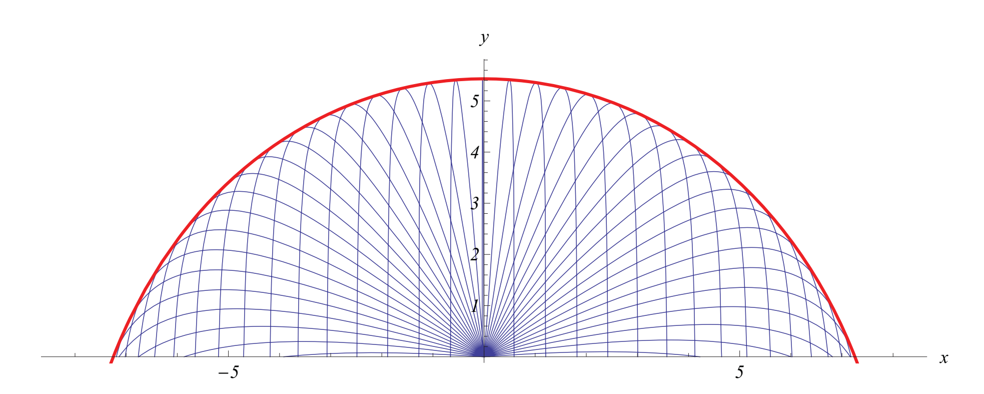


Figura 10.3: Algunas trayectorias de los proyectiles con rozamiento (en azul) y su curva de seguridad (en rojo).

10.2. Sobre vibraciones mecánicas

Consideremos un objeto de masa m sujeto a un resorte (muelle) como el que se muestra en la figura 10.4. Consideramos el desplazamiento x positivo a la derecha del cuerpo y tomamos como origen O el punto en el que el cuerpo está en equilibrio. Teniendo en cuenta que la fuerza del peso está compensada por la fuerza de reacción del plano, el cuerpo está sujeto a tres fuerzas:

a) La fuerza de restauración del muelle que, por la ley de Hooke, es proporcional al desplazamiento y actua para devolver el resorte a su estado de equilibrio: $-k_1 x$.

b) La denominada *fuerza de amortiguamiento viscoso* que es proporcional a la velocidad y actua en dirección opuesta a la del movimiento: $-k_2 v = -k_2 \frac{dx}{dt}$.

c) Una fuerza externa $F(t)$.

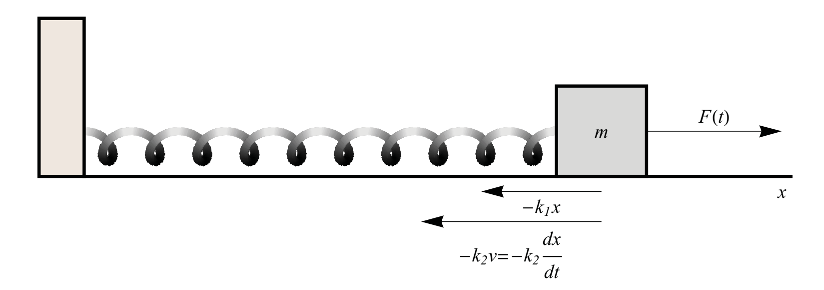


Figura 10.4: Objeto de masa m sobre el que actúa la fuerza de restauración del resorte al que está sujeto, una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad y una fuerza externa $F(t)$.

Así, la ecuación que modeliza el moviente del cuerpo es, según la segunda Ley de Newton,

$$x'' + \frac{k_2}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k_1}{m}x = \frac{1}{m}F(t), \tag{10.3}$$

donde se supone que las constantes k_1 y k_2 son positivas. Veamos algunos casos particulares de esta ecuación.

Si consideramos $F(t) = k_2 = 0$, estaremos ante un caso que ya hemos analizado. Tomando $w = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$, las soluciones de la ecuación serán

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(wt) + B\cos(wt),$$

que si consideramos que el cuerpo parte del reposo, $v(0) = 0$, desde una posición a que suponemos positiva, aunque no es necesario, $x(0) = a$, se convierte en la función $x(t) = a\cos(wt)$. Esta función tiene una amplitud[1] a, un periodo[2] $T = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}$ y una frecuencia[3] $f = \frac{1}{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$. En este caso el movimiento continuaría indefinidamente oscilando entre $-a$ y a. Esta situación es, obviamente, irreal y se corrige introduciendo una fuerza de amortiguación.

Si tomamos $F(t) = 0$, nos encontraremos frente a lo que se denominan *vibraciones amortiguadas* (aparece el efecto de la amortiguación viscosa). Denotando $w = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ y $\gamma = \frac{k_2}{2m}$, tendremos la ecuación lineal de segundo orden

$$x'' + 2\gamma x' + w^2 x = 0,$$

cuya ecuación característica es $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + w^2 = 0$ y que tiene por raíces

$$m_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - w^2} \quad \text{y} \quad m_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - w^2}.$$

Según los valores γ y w nos encontramos ante tres casos distintos

a) Vibración sobreamortiguada $\gamma > w$: en este caso ambas soluciones son reales y negativas. La solución general de la ecuación será

$$x(t) = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t},$$

que imponiendo las condiciones $x(0) = a$ y $x'(0) = 0$ se convierte en

$$x(t) = \frac{a}{m_2 - m_1}(m_2 e^{m_1 t} - m_1 e^{m_2 t}).$$

Por ser los exponentes negativos no habrá ningún tipo de oscilación y el cuerpo, desde su posición inicial a, tenderá a la posición de equilibrio, es por esto que se denominan vibraciones sobreamortiguadas.

[1]Lo que quiere decir que oscila entre los valores a y $-a$.

[2]El tiempo necesario para volver a una posición determinada tras haber recorrido un ciclo completo; es decir, tras haber pasado por todas las posibles posiciones en el intervalo $[-a, a]$.

[3]La frecuencia es el número de ciclos que se recorren por unidad de tiempo; es decir, es el inverso del periodo.

b) Vibración críticamente amortiguada $\gamma = w$: en esta situación ambas raíces son iguales, $m_1 = m_2 = \gamma$, y la solución general tendrá la forma

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A + tB),$$

que con las condiciones iniciales anteriores se convierte en

$$x(t) = ae^{-\gamma t}(1 + \gamma t).$$

En este caso el comportamiento es igual al del caso anterior y no hay oscilaciones, el cuerpo vuelve a su posición de equilibrio. La denominación *críticamente amortiguado* obedece al hecho de que a partir de esta situación se van producir oscilaciones.

c) Vibraciones subamortiguadas $\gamma < w$: en este caso ya se van a producir vibraciones puesto que aparecen exponenciales complejas. En efecto, en esta situación se tiene que $m_1 = -\gamma + i\alpha$ y $m_2 = -\gamma - i\alpha$, con $\alpha = \sqrt{w^2 - \gamma^2}$, y así

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A\cos(\alpha t) + B\,\mathrm{sen}(\alpha t)).$$

Con las condiciones iniciales que estamos considerando tenemos la solución

$$x(t) = \frac{a}{\alpha}e^{-\gamma t}(\alpha\cos(\alpha t) + \gamma\,\mathrm{sen}(\alpha t)).$$

Tomando el ángulo $\theta = \arctan(\gamma/\alpha)$, la solución puede escribirse como

$$x(t) = \frac{a}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}e^{-\gamma t}\cos(\alpha t - \theta).$$

Esta solución oscila indefinidamente pero con una amplitud que decae controlada por las exponenciales $\pm e^{-\gamma t}$. En la figura 10.5 se muestran varias curvas solución en las que se ha modificado el valor de w y las exponenciales que marcan el decaimiento de la amplitud. La solución no es periódica en sentido estricto pero sin embargo cruza la posición de equilibrio a intervalos regulares. Si consideramos como su *periodo*, $\tilde{T}$, el tiempo necesario para recorrer un ciclo completo,[4] este vendrá dada por $\tilde{T} = \frac{2\pi}{\alpha}$ (el ángulo θ es un desplazamiento que no influye en la *periodicidad*); es decir

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{w^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_1}{m} - \frac{k_2^2}{4m^2}}}.$$

Si consideramos la *frecuencia*, $\tilde{f}$, como el inverso del *periodo* $\tilde{T}$ se satisface que

$$\tilde{f} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m} - \frac{k_2^2}{4m^2}}. \tag{10.4}$$

[4]Esencialmente es el tiempo necesario para volver a la posición de equilibrio tras haber pasado por un máximo y un mínimo consecutivos, que es lo que denominamos un ciclo completo.

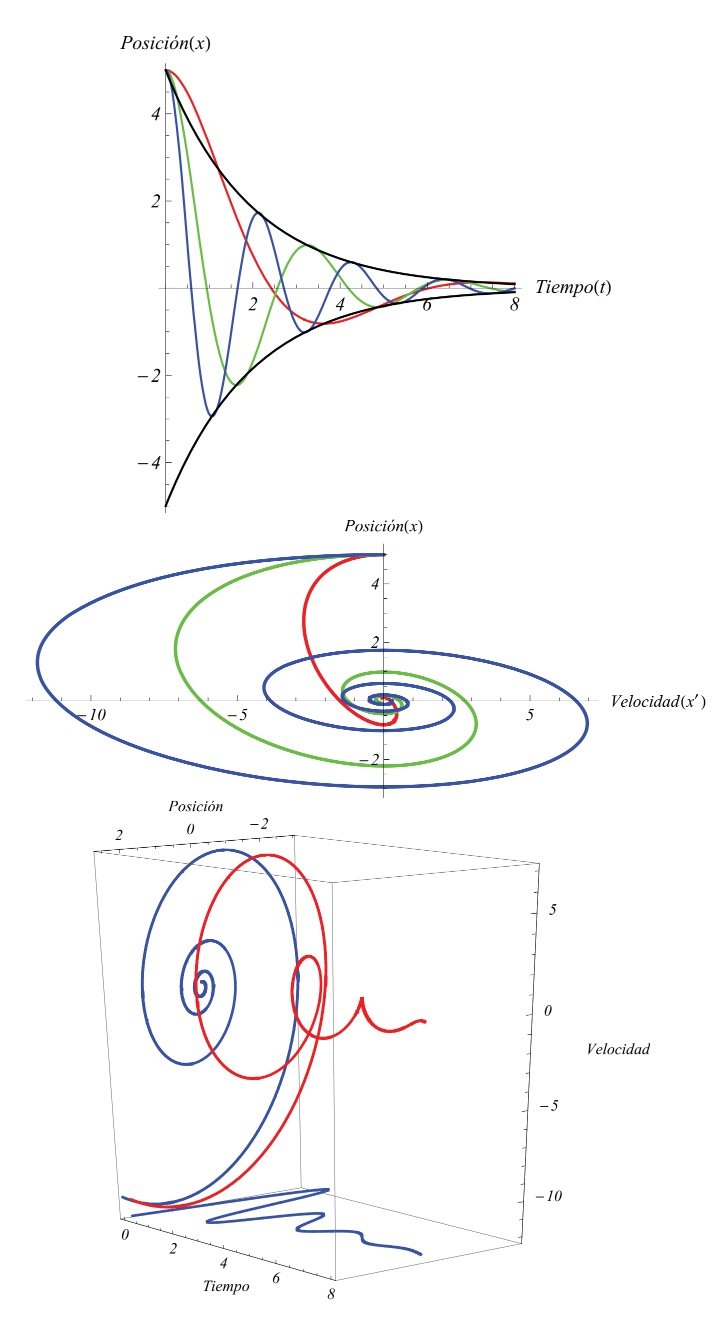


Figura 10.5: En la parte superior aparece representada la posición del cuerpo con respecto al tiempo para $\gamma = 1/2$, $a = 5$ y tres valores de w: en rojo $w^2 = 5$, en verde $w^2 = 10$ y en azul $w^2 = 15$. En negro aparecen las curvas $\pm 5e^{-t/2}$ que limitan el decaimiento de la solución. La gráfica intermedia muestra la velocidad como función de la posición para la misma elección de parámetros. En el figura de la parte inferior se muestra el tiempo, la posición y la velocidad para $w = 10$ con sus proyecciones sobre los planos tiempo-posición y posición-velocidad.

El valor $\sqrt{\frac{k_1}{m} - \frac{k_2^2}{4m^2}}$ se denomina *frecuencia natural del sistema*. Es interesante observar que cuando k_2 tiende a cero los valores $\tilde{T}$ y $\tilde{f}$ se aproximan al periodo y a la frecuencia del caso sin rozamiento.

Analicemos, finalmente, el caso general de la ecuación (10.3). Mantenemos la notación de los casos anteriores $w = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ y $\gamma = \frac{k_2}{2m}$. La situación más habitual consiste en considerar la fuerza externa $F(t) = mF_0 \cos(\beta t)$, para ciertas constantes F_0 y β. Para obtener la solución general de la ecuación en este caso debemos determinar una solución particular para la ecuación. Comencemos suponiendo que $\gamma \neq 0$ ($k_2 \neq 0$), buscaremos soluciones de la forma $x_p(t) = A\cos(\beta t) + B \operatorname{sen}(\beta t)$ para la ecuación

$$x'' + 2\gamma x' + w^2 x = F_0 \cos(\beta t),$$

que nos da

$$A = F_0 \frac{w^2 - \beta^2}{(w^2 - \beta^2)^2 + 4\gamma^2\beta^2} \qquad \text{y} \qquad B = F_0 \frac{2\gamma\beta}{(w^2 - \beta^2)^2 + 4\gamma^2\beta^2}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{(w^2 - \beta^2)^2 + 4\gamma^2\beta^2} \big((w^2 - \beta^2)\cos(\beta t) + 2\gamma\beta \operatorname{sen}(\beta t))\big) \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{(w^2 - \beta^2)^2 + 4\gamma^2\beta^2}} \cos(\beta t - \phi), \end{aligned}$$

con $\phi = \arctan\left(\frac{2\gamma\beta}{w^2 - \beta^2}\right)$. Supongamos que nos encontramos en un caso de vibraciones subamortiguadas (en el caso de vibraciones sobreamortiguadas o de vibraciones críticamente amortiguadas la situación es similar), entonces la solución general será de la forma

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A\cos(\alpha t) + B \operatorname{sen}(\alpha t)) + \frac{F_0}{\sqrt{(w^2 - \beta^2)^2 + 4\gamma^2\beta^2}} \cos(\beta t - \phi). \quad (10.5)$$

Sean como sean las condiciones iniciales el término inicial tiene un carácter *transitorio*, su efecto se disipa a lo largo del tiempo. Por tanto, para valores grandes del tiempo la solución tiende a comportarse como la solución particular que es lo que se denomina *estado estacionario.* Un estado estacionario es una solución conservando el periodo de la fuerza externa $F(t) = mF_0 \cos(\beta t)$ pero con distinta amplitud. Se puede probar que el estado estacionario de una ecuación es único; en concreto se tiene el siguiente resultado:

Proposición 47. *Sea la ecuación*

$$x'' + ax' + bx = f(t),$$

con $a, b > 0$ *y* $f(t + T) = f(t)$ *para un cierto* $T > 0$*. Entonces existe una única solución periódica de periodo* T *de la ecuación.*

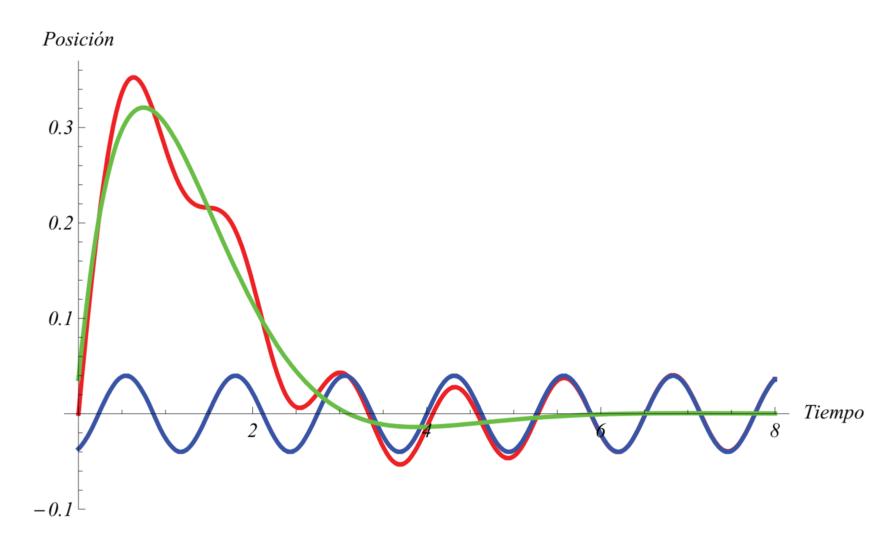


Figura 10.6: En rojo la solución del problema de valores iniciales $x'' + 2x' + 2x = \cos(5t)$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$, en azul el estado estacionario y en verde la parte transitoria de la solución.

La demostración de esta proposición está basada en suponer que existen dos soluciones con la propiedad propuesta y en probar que son iguales usando que la diferencia es solución de la ecuación homogénea asociada. Se deja como ejercicio.

La figura 10.6 muestra, en rojo, la solución de

$$\begin{cases} x'' + 2x' + 2x = \cos(5t), \\ x(0) = 0, x'(0) = 1, \end{cases}$$

y el estado estacionario en azul. La curva verde representa la parte transitoria de la solución. Esta gráfica permite observar claramente la tendencia de la solución a comportarse como el estado estacionario.

Si suponemos como solución de la ecuación únicamente el estado estacionario su amplitud vendrá dada por la expresión

$$A(\beta) = \frac{F_0}{\sqrt{(w^2 - \beta^2)^2 + 4\gamma^2\beta^2}} = \frac{F_0 m}{\sqrt{(k_1 - \beta^2 m)^2 + k_2^2\beta^2}}.$$

Esta expresión para la amplitud esconde multiples secretos. En la figura 10.7 se muestra el comportamiento de la amplitud como función del ángulo β para distintos valores del parámetro k_2, para $k_1 = 5$ y $F_0 = m = 1$. En concreto, de abajo a arriba, se toman los valores $k_2 = 2, 1, 0.5, 0.25, 0$. Para este último valor se aprecia un asíntota vertical para el valor $\beta = 5$. En general, el máximo de $A(\beta)$ se está alcanzando para el valor $\beta = \tilde{f}$, donde $\tilde{f}$ es el valor dado en (10.4) y que denominamos frecuencia natural del sistema. Esta situación se conoce como *resonancia*: la amplitud máxima se alcanza para la frecuencia natural

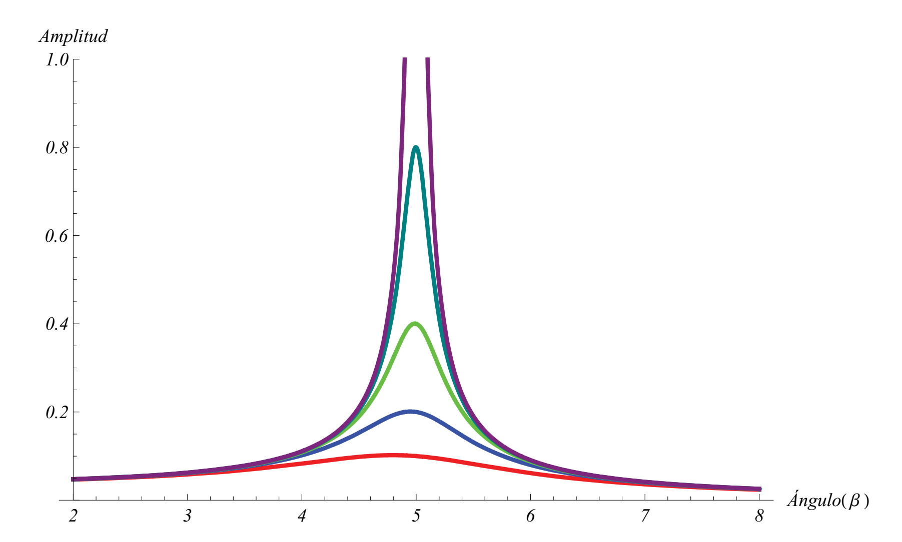


Figura 10.7: De abajo a arriba se muestra la función amplitud $A(\beta)$ para los valores $k_2 = 2, 1, 0.5, 0.25, 0$, con $k_1 = 5$ y $F_0 = m = 1$.

del sistema. Si $k_2 = 0$, estamos ante lo que se llama *resonancia pura*; en este caso cuando β toma el valor de la frecuencia natural, que corresponde a la del oscilador armónico $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}$, la amplitud es no acotada.

Analicemos más detenidamente el caso en el que $k_2 = 0$. En esta situación, tomando $F_0 = 1$, nos encontramos con la ecuación

$$x'' + w^2 x = \cos(\beta t),$$

donde, como antes, $w = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$, sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = 0$. Ahora, usando (10.5) (notad que $\gamma = 0$) y supuesto que $\beta \neq w$ tendremos la solución

$$x(t) = \frac{\cos(\beta t) - \cos(wt)}{w^2 - \beta^2},$$

que, mediante sencillas manipulaciones trigonométricas, puede reescribirse como

$$x(t) = \frac{2}{w^2 - \beta^2} \operatorname{sen}\left(\frac{w + \beta}{2} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{w - \beta}{2} t\right).$$

Se puede observar que la amplitud de la solución oscila entre las funciones

$$\pm \frac{2}{w^2 - \beta^2} \operatorname{sen}\left(\frac{w - \beta}{2} t\right).$$

La variación periódica de la amplitud de la curva solución se denomina *pulsación*. En la figura 10.8 se muestran la solución para $w = 1$ y $\beta = 0.8$ y las curvas que limitan la amplitud.

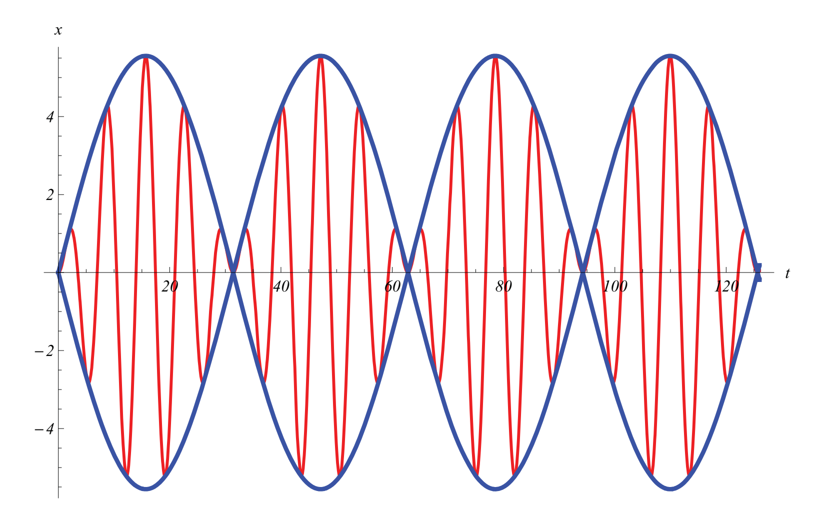


Figura 10.8: Se muestra (en rojo) la solución de la ecuación $x'' + x' = \cos(0.8t)$, con $x(0) = x'(0) = 0$. Se puede ver el fenómeno de pulsación, la amplitud de la solución oscila entre las funciones $\pm\frac{2}{0.36}\operatorname{sen}(0.1t)$ (en azul).

En el caso en que $\beta = w$ es cuando se presenta la resonancia pura. La solución puede obtenerse bien tomando el límite cuando $\beta \to w$ en el caso anterior o bien por el método de los coeficientes indeterminados, teniendo en cuenta que $\pm iw$ son las soluciones de la ecuación característica. De cualquiera de las dos maneras se obtendrá que la solución es

$$x(t) = \frac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt).$$

Como ya habíamos anunciado la amplitud de esta función va aumentando y se convierte en no acotada. En la figura 10.9 se muestra las soluciones de los problemas de valores iniciales $x'' + x = \cos(\beta t)$, con $x(0) = x'(0) = 0$, en los casos $\beta = \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, 1$ con las curvas que limitan sus amplitudes. En el caso $w = 1$ estamos ante la resonancia pura y las rectas $\pm t/2$, que son el límite cuando $\beta \to w$ de las $\pm\frac{2}{w^2-\beta^2}\operatorname{sen}\left(\frac{w-\beta}{2}t\right)$, limitan la amplitud de la curva solución.

El fenómeno de la resonancia es conocido desde hace largo tiempo y ha sido el causante de más de un desastre mecánico. El 14 de abril de 1831 el puente de Broughton (una localidad cercana a Manchester) sobre el río Irwell se derrumbó como consecuencia de un efecto de resonancia provocado por el paso marchando de un pelotón de soldados. La fuerza periódica que ejercieron al entrar marchando sobre el puente entró en resonancia con la frecuencia propia del puente y este colapsó. Desde ese momento se prohibió a los soldados cruzar un puente marchando.

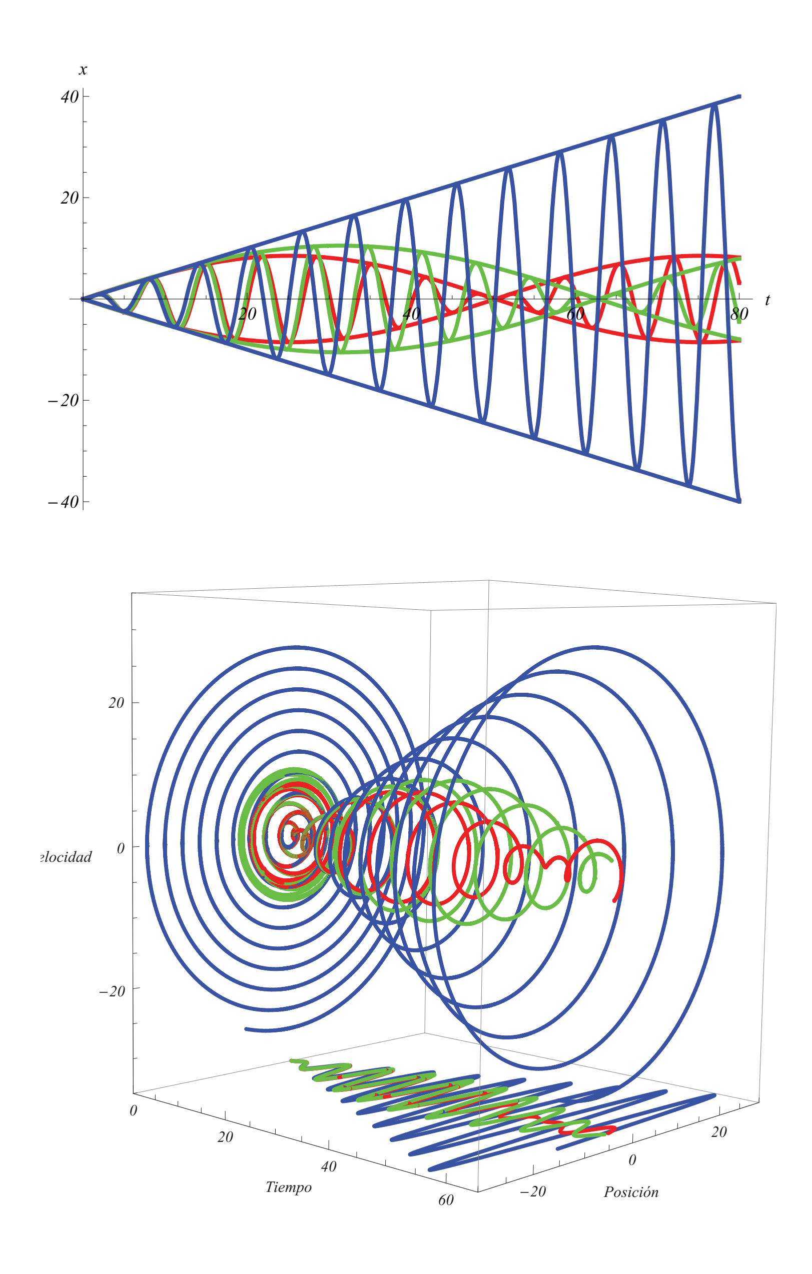


Figura 10.9: En la parte superior se muestran las soluciones a los problemas de valores iniciales $x'' + x = \cos(\beta t)$, con $x(0) = x'(0) = 0$, junto con las curvas que limitan sus amplitudes en los casos $\beta = \frac{7}{8}$ (en rojo), $\beta = \frac{9}{10}$ (en verde) y $\beta = 1$ (en azul). Para lo mismos casos, en la parte inferior, se trazan las curvas tiempo-posición-velocidad con sus proyecciones.

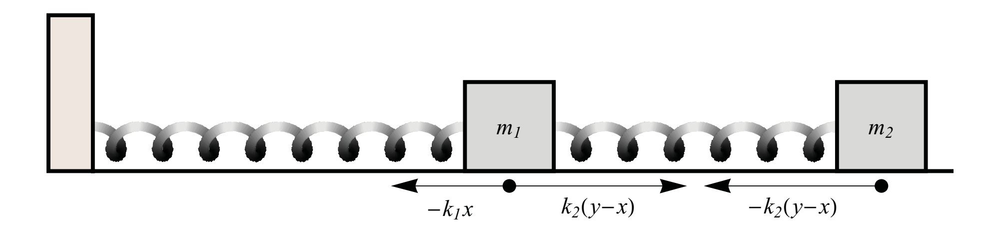


Figura 10.10: Objetos de masas m_1y m_2 unidos mediante resortes de constantes k_1 y k_2.

10.3. Resortes acoplados

En la figura 10.10 se muestran dos objetos de masas m_1 y m_2, respectivamente, unidas entre si mediante un muelle con constante de restauración k_2 y la de masa m_1 sujeta a un muro con un muelle de constante k_1. Como se muestra en la figura el muelle que une ambos objetos realiza una fuerza de restauración proporcional a su estiramiento $-k_2(y-x)$ [5] sobre el objeto de masa m_2 en dirección contraria al movimiento. Sobre el cuerpo de masa m_1 actúa la fuerza de restauración $-k_1x$ y por otra parte el muelle que une ambos cuerpos ejerce una fuerza de magnitud $k_2(y-x)$ sobre el cuerpo de masa m_1 por la tercera ley de Newton. De este modo, por la segunda ley de Newton, el movimiento de los cuerpos estará descrito por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} m_1x'' = -k_1x + k_2(y-x), \\ m_2y'' = -k_2(y-x). \end{cases}$$

Tomando las constantes $a = k_1/m_1$, $b = k_2/m_1$ y $c = k_2/m_2$ y usando las variables $z_1 = x$, $z_2 = x'$, $z_3 = y$ y $z_4 = y'$ tendremos el sistema

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(a+b) & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz del sistema es $\lambda^4+(a+b+c)\lambda^2+ac = 0$. En un primer momento es claro que

$$\lambda^2 = \frac{-(a+b+c) \pm \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ac}}{2} = -\frac{a+b+c}{2} \pm \frac{\sqrt{(a+b-c)^2 + 4bc}}{2},$$

[5]Notad que el estiramiento es la posición a la que llega el objeto de masa m_2, y, menos el desplazamiento que hace el objeto de masa m_1 por el estiramiento del primer muelle x.

de donde podemos asegurar que λ^2 es un valor real negativo. Por tanto, los valores propios de la matriz son $\lambda_1 = i\alpha$, $\lambda_2 = -\lambda_1$, $\lambda_3 = i\beta$ y $\lambda_4 = -\lambda_3$, con

$$\alpha = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} + \frac{\sqrt{(a+b-c)^2+4bc}}{2}}$$

y

$$\beta = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} - \frac{\sqrt{(a+b-c)^2+4bc}}{2}}.$$

Existirá un vector propio asociado con cada valor propio y será de la forma

$$v_i = (c+\lambda_i^2, \lambda_i(c+\lambda_i^2), c, c\lambda_i).$$

Teniendo en cuenta que estamos interesados únicamente en la primera y en la tercera componente de z tendremos las soluciones

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) &= \frac{1}{2}(e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t})(c-\alpha^2, c) = \cos(\alpha t)(c-\alpha^2, c),\\
\phi_2(t) &= \frac{i}{2}(e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t})(c-\alpha^2, c) = -\operatorname{sen}(\alpha t)(c-\alpha^2, c),\\
\phi_3(t) &= \frac{1}{2}(e^{i\beta t}+e^{-i\beta t})(c-\beta^2, c) = \cos(\beta t)(c-\beta^2, c)
\end{aligned}$$

y

$$\phi_4(t) = \frac{i}{2}(e^{i\beta t}-e^{-i\beta t})(c-\beta^2, c) = -\operatorname{sen}(\beta t)(c-\beta^2, c).$$

Con esto la solución puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= A\phi_1(t)+B\phi_2(t)+C\phi_3(t)+D\phi_4(t)\\
&= (c-\alpha^2, c)\sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha t-\delta_1)+(c-\beta^2, c)\sqrt{C^2+D^2}\cos(\beta t-\delta_2),
\end{aligned}$$

donde $\delta_1 = \arctan(-B/A)$ y $\delta_2 = \arctan(-D/C)$. Si imponemos las condiciones iniciales $x(0) = p$, $y(0) = q$, $x'(0) = r$ e $y'(0) = s$, obtenemos que

$$A = \frac{q(\beta^2-c)+cp}{c(\beta^2-\alpha^2)}, \qquad B = \frac{s(c-\beta^2)-cr}{c\alpha(\beta^2-\alpha^2)},$$

$$C = \frac{q(c-\alpha^2)-cp}{c(\beta^2-\alpha^2)}, \qquad D = \frac{s(\alpha^2-c)+cr}{c\beta(\beta^2-\alpha^2)},$$

con los ángulos

$$\delta_1 = \arctan\left(\frac{s(\beta^2-c)+cr}{\alpha(q(\beta^2-c)+cp)}\right) \quad \text{y} \quad \delta_2 = \arctan\left(\frac{s(\alpha^2-c)+cr}{\beta(q(\alpha^2-c)+cp)}\right),$$

si $\cos(-B/A) \geq 0$ y $\cos(-C/D) \geq 0$, y con las correspondientes modificaciones en otros casos.

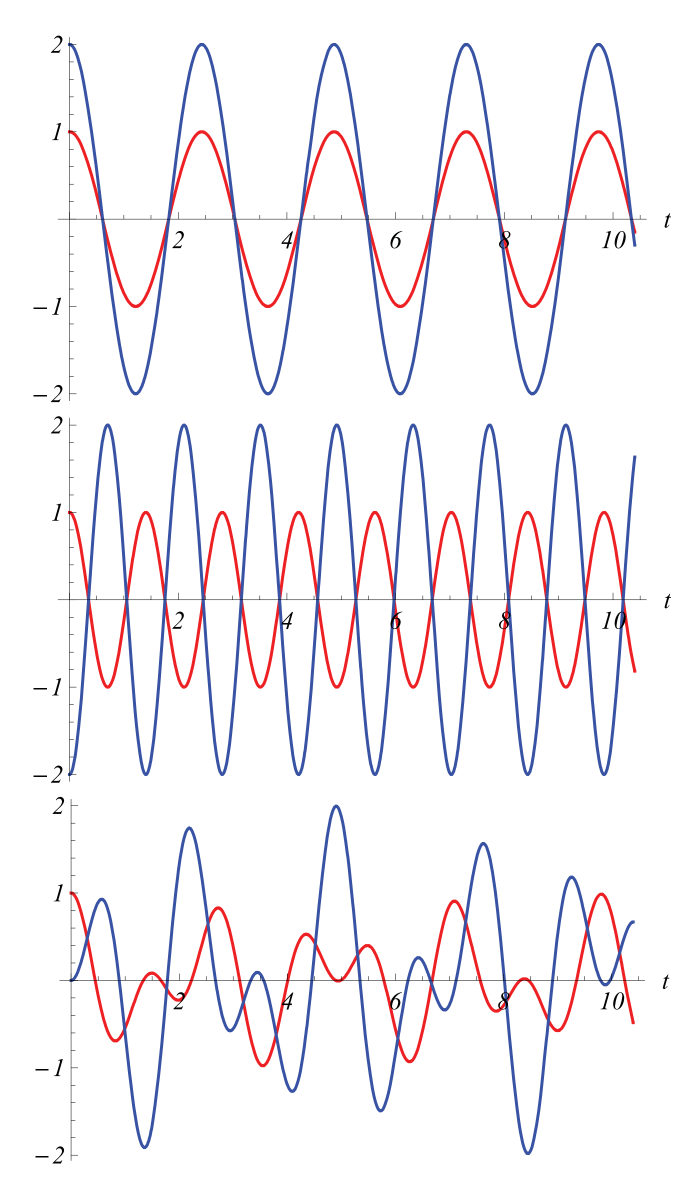


Figura 10.11: De arriba a abajo se muestran tres casos de condiciones iniciales para el sistema de muelles acoplados $x'' = -10x + \frac{10}{3}(y-x)$, $y'' = -\frac{40}{3}(y-x)$: a) $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $x'(0) = y'(0) = 0$, b) $x(0) = 1$, $y(0) = -2$, $x'(0) = y'(0) = 0$, c) $x(0) = 1$, $y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$. En rojo se traza la curva correspondiente a x y en azul la correspondiente a y.

Los vectores $(c-\alpha^2, c)$ y $(c-\beta^2, c)$ en el plano xy se denominan *vectores del modo normal*, los valores α y β se llaman *frecuencias circulares del modo normal* y las funciones $(c-\alpha^2, c)\cos(\alpha t-\delta_1)$ y $(c-\beta^2, c)\cos(\beta t-\delta_2)$ son las *oscilaciones de modo normal*. Cuando la solución del sistema queda reducido a una de las oscilaciones del modo normal [6] las trayectorias son periódicas. En otro caso las trayectorias son periódicas si el cociente de las dos frecuencias circulares del modo normal es un número racional. Si dicho cociente no es racional las soluciones no son periódicas y al representarlas en el plano xy describen lo que se llama una *curva de Lissajous*. Cuando se trazan en el plano xy las oscilaciones en modo normal su representación son rectas en la dirección de los vectores del modo normal. Una curva de Lissajous se mueve siempre en un rectángulo de lados paralelos a las rectas descritas por las oscilaciones en modo normal.

Tomando $m_1 = 4$, $m_2 = 1$, $k_1 = 40$ y $k_2 = 40/3$ tendremos $a = 40$, $b = 40/3$, $c = 10/3$ $\alpha = 2\sqrt{5}$ y $\beta = 2\sqrt{5/3}$. La figura 10.11 muestra tres casos del movimiento de los cuerpos con estos datos. En el primero de los casos se supone que ambos cuerpos son desplazados a la derecha ($x(0) = 1$ y $y(0) = 2$) y que parten del reposo. Como se ve ambos cuerpos se mueven de forma periódica y en el mismo sentido (se dice que están en *fase*). El segundo caso describe el movimiento cuando el cuerpo de masa m_2 es desplazado hacia la izquierda ($y(0) = -2$) y el de la masa m_1 hacia la derecha ($x(0) = 1$) partiendo ambos del reposo. En estas circunstancias el movimiento de ambos cuerpos también es periódico pero están fuera de fase (el movimiento de cada cuerpo va en sentido contrario al del otro). Estas dos primeras situaciones corresponden a las oscilaciones de modo normal para estos parámetros. Finalmente se considera el caso en el que el cuerpo de masa m_2 no se desplaza ($y(0) = 0$) y el de masa m_1 es movido hacia la derecha ($x(0) = 1$) y ambos están quietos. El movimiento en estas condiciones no es periódico. (En todos los casos la curva rojo representa el movimiento del cuerpo de masa m_1, es decir la posición x, y la curva azul traza el movimiento del cuerpo de masa m_2, la posición y.)

Para concluir mostramos la posición de una masa con respeto a la otro en los tres mismos casos anteriores en el plano xy. Esto se hace en la figura 10.12, en rojo y verde se presentan la curvas descritas por las oscilaciones en modo normal y en azul tenemos una curva de Lissajous.

10.4. Problemas

Problema 253. En una plantación se fumiga pesticida sobre los árboles de manera continua siguiendo una función continua $r(t)$. El pesticida se transfiere de los árboles a la tierra de manera proporcional a la cantidad presente en los árboles con una constante de proporcionalidad k_1. De la cantidad de pesticida en la tierra una parte es reabsorbida por la planta, a través de las raíces, de modo proporcional a la cantidad presente en la tierra con constante k_2. Otra parte del pesticida en la tierra, nuevamente de manera proporcional a la cantidad presente

[6] Esto ocurre cuando los vectores (p, q) y (r, s) son, ambos, perpendiculares a uno de los vectores del modo normal.

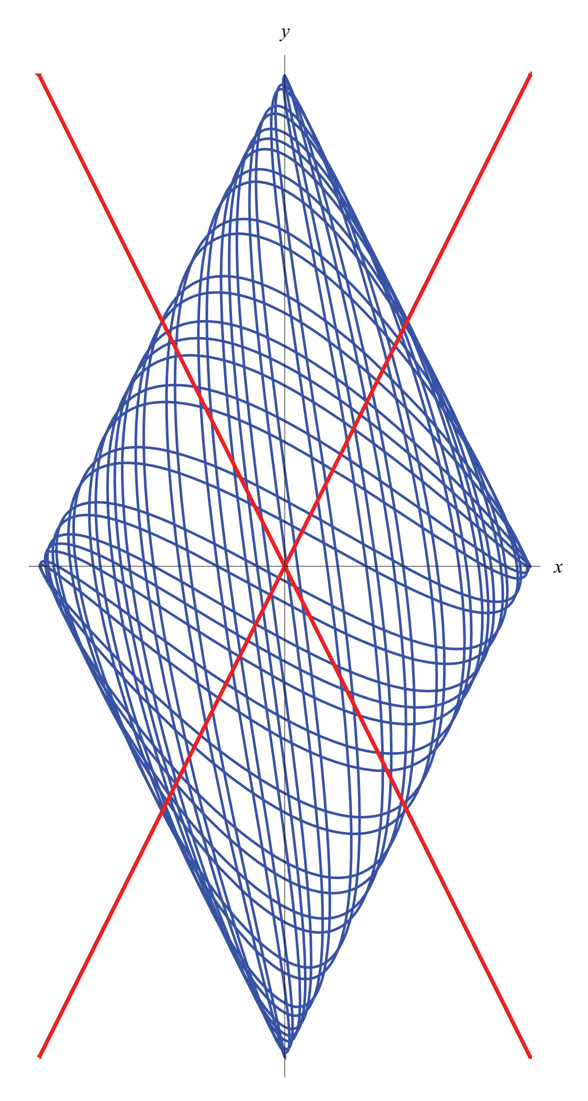


Figura 10.12: Se muestran la posición de una masa respecto a otra en tres casos de condiciones iniciales para el sistema de muelles acoplados $x'' = -10x + \frac{10}{3}(y - x)$, $y'' = -\frac{40}{3}(y - x)$: a) $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $x'(0) = y'(0) = 0$, (recta roja con pendiente positiva) b) $x(0) = 1$, $y(0) = -2$, $x'(0) = y'(0) = 0$, (recta roja con pendiente negativa) c) $x(0) = 1$, $y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$ (curva azul).

con una constante que llamaremos k_3, es eliminada mediante distintos procesos físicos o químicos. Un esquema de la situación aparece en la figura 10.13.

a) Determinar un sistema de ecuaciones diferenciales que describa la cantidad de pesticida en los árboles y en la tierra.

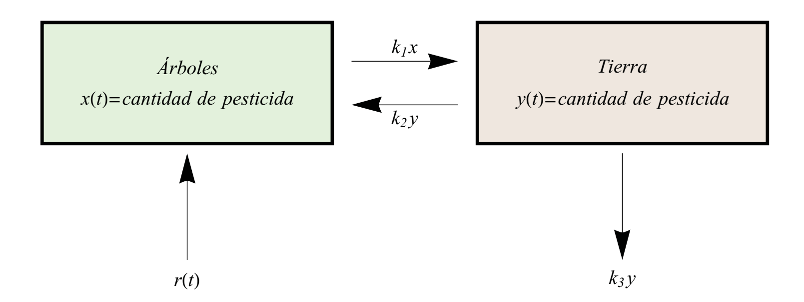


Figura 10.13: Esquema del Problema 253.

b) Obtener la solución general de dicho sistema si consideramos $k_1 = k_2 = 2$, $k_3 = 3$ y $r(t) = \alpha \tanh(t)$, donde α es una cierta constante positiva.

c) Si la cantidad inicial de pesticida en los árboles y en la tierra es nula, probar que a largo plazo el nivel de pesticida en ambos casos se estabiliza alrededor de ciertos valores dependientes de α.

Problema 254. En un trabajo reciente (A. Gutfraind, *Understanding terrorist organizations with a dynamic model, 2009*) se analiza una organización terrorista mediante un sencillo sistema de ecuaciones diferenciales. En el modelo se define la fortaleza de una organización terrorista, que indicaremos por F, como

$$F = mL + S,$$

donde L denota el número de líderes de la organización, S el número de soldados y m es un valor real mayor que uno que indica que los líderes tienen, por su *formación y experiencia*, un mayor peso específico dentro de la organización. La variación en el número de miembros de la organización viene dada por el esquema que se muestra en la figura 10.14. La tasa de abandono (por desmotivación, fatiga, deserción ...) para los líderes y los soldados se supone que es proporcional al número de miembros del colectivo correspondiente y se considera que en ambos casos la constante de proporcionalidad a es la misma. Las medidas antiterroristas producen una disminución constante por unidad de tiempo que afectan en una magnitud j_L y j_S al número de líderes y soldados respetivamente. El número de líderes aumenta de manera propocional, con constante p, a la cantidad de soldados. Finalmente, la captación se toma proporcional, con constante c, a la fortaleza de la organización.

a) Probar que el sistema de ecuaciones que modeliza la organización terrorista está dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = pS - aL - j_L, \\ \dfrac{dS}{dt} = cmL - (p + a - c)S - j_S. \end{cases}$$

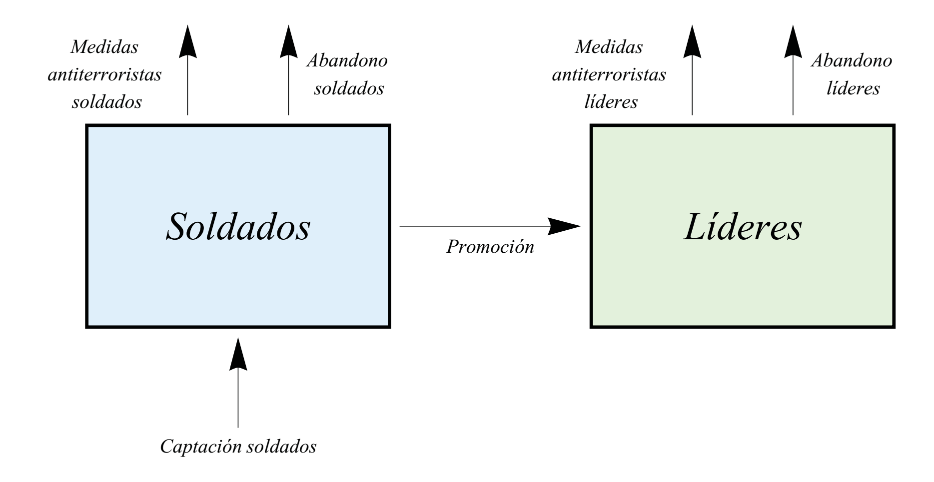


Figura 10.14: Esquema del Problema 254.

b) Obtener la solución general del sistema homogéneo en el caso $m = 16/9$ y $p = c = 1/4$.

c) A los parámetros del apartado anterior añadimos $a = 1/3$ y consideramos el sistema no homogéneo con $j_L = \alpha$ y $j_S = \alpha$, para α un valor real positivo. Determinar la solución del sistema sujeto a las condiciones iniciales $L(0) = 2\alpha$ y $S(0) = 4\alpha$. Estudiando la función de fortaleza, analizar las posibilidades de supervivencia de la organización terrorista dada por nuestro modelo.

Problema 255. Algunos isótopos radioactivos son usados como marcadores para el estudio de procesos involucrados en la síntesis de proteínas en seres vivos. Tras inyectar en conejos albúmina radioactiva, los bioquímicos miden la radioactividad presente en el plasma, en la orina y en las heces a lo largo de los días. La albúmina se acumula normalmente en el sistema vascular (plasma sanguíneo) y en el sistema extravascular (linfa y fluidos de los tejidos), produciéndose transferencia del sistema vascular al extravascular y viceversa. Además, la albúmina se degrada de manera continua dando lugar a productos de desecho y es excretada. Basándonos en este proceso, creamos un modelo con cuatro compartimentos como el que se muestra en la figura 10.15. Con $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, denotamos la fracción del total de la radioactividad presente en el compartimento C_i en un instante t. La variación de $x_i(t)$ es igual a la diferencia entre la radioactividad que recibe menos la que elimina. Suponemos que la transferencia de radioactividad de C_i a C_j es proporcional a la cantidad presente en C_i con constante de proporcionalidad k_{ji}.

a) Determinar un sistema de ecuaciones que modelice las variables $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

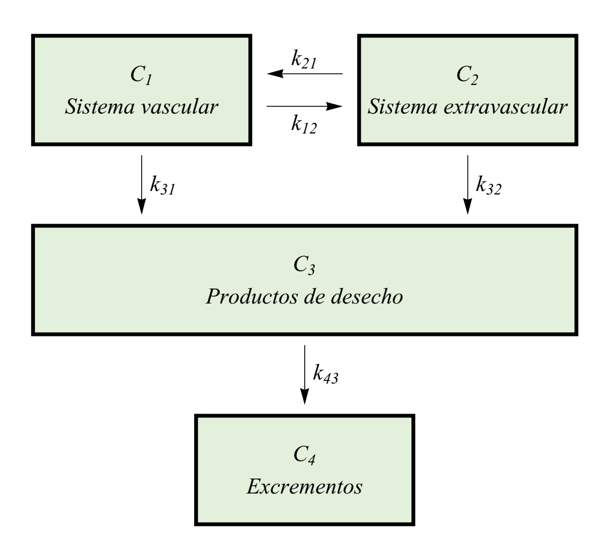


Figura 10.15: Diagrama compartimental aociado con el Problema 255.

b) Tomando $k_{12} = k_{21} = k_{31} = k_{32} = k_{43} = 1$ y $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$, determinar la solución del sistema del apartado anterior.

c) Si a lo largo del tiempo se inyecta una cantidad constante α de albúmina radioactiva en el sistema vascular, encontrar la solución del nuevo sistema tomando las constantes k_{ji} como en el apartado anterior y las condiciones iniciales $x_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, 4$.

Problema 256. Dos tanques, con volúmenes constantes V_1 y V_2, conectados mediante dos tuberías contienen una solución de una cierta sustancia química disuelta en agua, tal y como mostramos en el esquema de la figura 10.16. Sea $x_i(t)$, con $i = 1, 2$, la cantidad (en gramos) de la sustancia química en el *Tanque i* en el instante t. Una solución de concentración c_i entra en el *Tanque i* a razón de r_i litros/minuto. Asimismo, se produce un trasvase del *Tanque 1* al *Tanque 2* y otro en sentido inverso con unas velocidades respectivas de r_{12} y r_{21} litros/minuto. Finalmente, la solución fluye hacia el exterior a una velocidad de r_0 litros/minuto. Asumiendo que en cada tanque se produce una mezcla instantánea, podemos considerar que la concentración de los tanques es uniforme en cada instante. Supongamos, además, que la cantidad de agua en las tuberías de conexión es despreciable. Si la cantidad inicial de sustancia química en el *Tanque 1* es ρ gramos y la del *Tanque 2* es cero, el problemas de valores iniciales que describe el sistema es

$$\begin{cases} x_1' = -r_{12}\dfrac{x_1}{V_1} + r_{21}\dfrac{x_2}{V_2} + c_1 r_1, \\ x_2' = r_{12}\dfrac{x_1}{V_1} - (r_{21} + r_0)\dfrac{x_2}{V_2} + c_2 r_2, \\ x_1(0) = \rho, x_2(0) = 0. \end{cases}$$

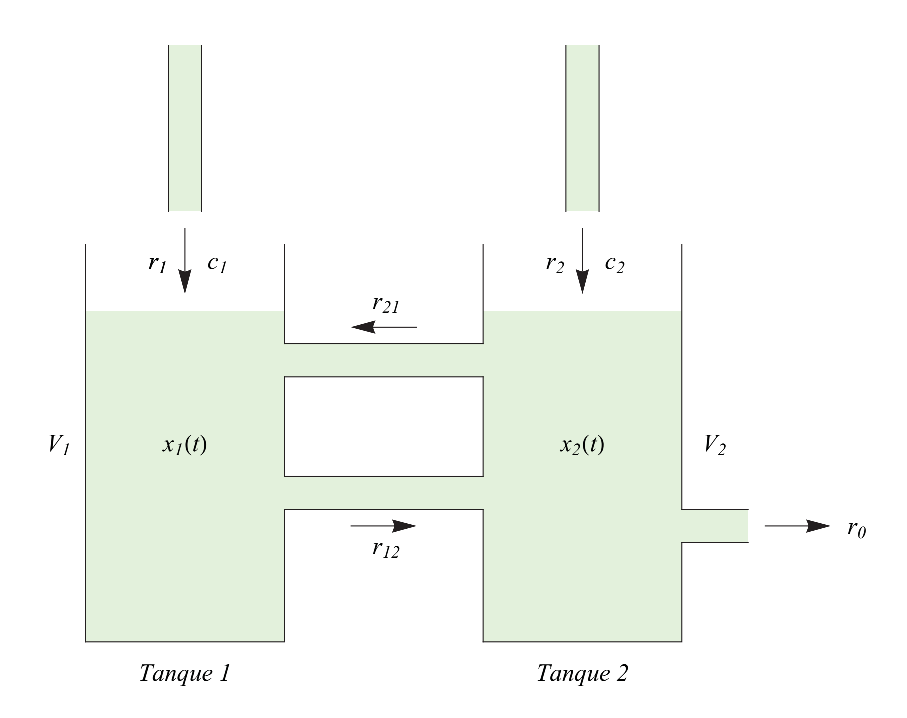


Figura 10.16: Esquema de los tanques del Problema 256.

Obviamente, para que los volúmenes de los tanques permanezcan constantes debe ocurrir que $r_1 + r_{21} = r_{12}$ y $r_2 + r_{12} = r_{21} + r_0$.

Deducir el problema de valores iniciales anterior y obtener su solución para el caso en el que $r_1 = r_2 = r_{21} = V_1 = V_2 = 1$ y $r_0 = r_{12} = 2$.

Problema 257. El movimiento de dos péndulos acoplados, para ángulos pequeños, está descrito por el sistema

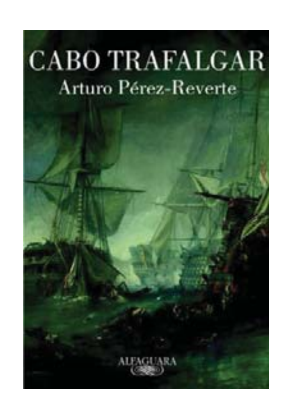
$$\begin{cases} x'' = \alpha^2 y - x, \\ y'' = x - y, \end{cases}$$

donde α es un parámetro real tal que $0 < \alpha < 1$, x representa la trayectoria del primer péndulo e y la del segundo.

a) Describir las trayectorias de los péndulos.

b) Para $\alpha = 1/4$ y considerando las condiciones iniciales $x(0) = a_1$, $y(0) = a_2$, $x'(0) = b_1$ e $y'(0) = b_2$; ¿qué relaciones entre los valores a_1, a_2, b_1 y b_2 aseguran la existencia de trayectorias periódicas para ambos péndulos?

Problema 258. La teoría de modelos de combate de Lanchester analiza el comportamiento de dos ejércitos enfrentados en una batalla. El modelo para



Lanchester utilizó su modelo del combate convencional para justificar la estrategia de Nelson en la batalla de Trafalgar (la imagen muestra la portada del libro que A. Pérez-Reverte ha publicado novelando esta batalla). Se ha comprobado que algunas batallas de la Segunda Guerra Mundial se ajustan asombrosamente bien a este modelo tan simple.

el combate convencional[7] establece que la variación del número de soldados de cada uno de los ejércitos enfrentados es proporcional al número de miembros del bando contrario más los refuerzos que se realicen. Si x e y denotan la cantidad de soldados de dos grupos en disputa, tendremos que el modelo puede describirse como

$$\frac{dx}{dt} = -ay + f(t) \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = -bx + g(t),$$

para ciertas funciones de refuerzo f y g y para ciertas constantes positivas a y b.

a) Consideremos $f(t) = g(t) = 0$ (es decir, un combate sin refuerzos) y las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$. Analizando $\frac{dy}{dx}$, probar que si $ay_0^2 > bx_0^2$ el ejército y gana el conflicto (por ganar el conflicto debemos entender la eliminación total del oponente).

b) Obtener la solución del sistema propuesto para una función f arbitraria, tomando $g(t) = 0$ y con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ e $y(0) = y_0$.

c) Para el sistema propuesto con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$, probar que para cualquier valor de t

$$a = \frac{x_0 + \int_0^t f(s)\,ds - x(t)}{\int_0^t y(s)\,ds} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{y_0 + \int_0^t g(s)\,ds - y(t)}{\int_0^t x(s)\,ds}.$$

Problema 259. Vamos a proceder a determinar la trayectoria de una partícula electrificada en un campo magnético de intensidad $\mathbf{E}$ e inducción magnética $\mathbf{B}$. El esquema de la figura 10.17 representa ambas fuerzas con respecto a un sistema ortonormal, la fuerza resultante es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

donde q es la carga eléctrica, $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula y "$\times$" indica el producto vectorial.

a) Usando la segunda ley de Newton, deducir que las ecuaciones del movimiento vienen dadas por

$$mx'' = qy'B, \qquad my'' = qE_y - qx'B, \qquad mz'' = qE_z.$$

b) Resolver el sistema de ecuaciones del apartado anterior sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $x'(0) = v_x$, $y'(0) = v_y$ y $z'(0) = v_z$.

Nota: Las proyección sobre el plano OXY de la trayectoria es una curva denominada *trocoide* y que mostramos en la figura 10.18.

[7] También existe un modelo para conflictos involucrando guerrillas.

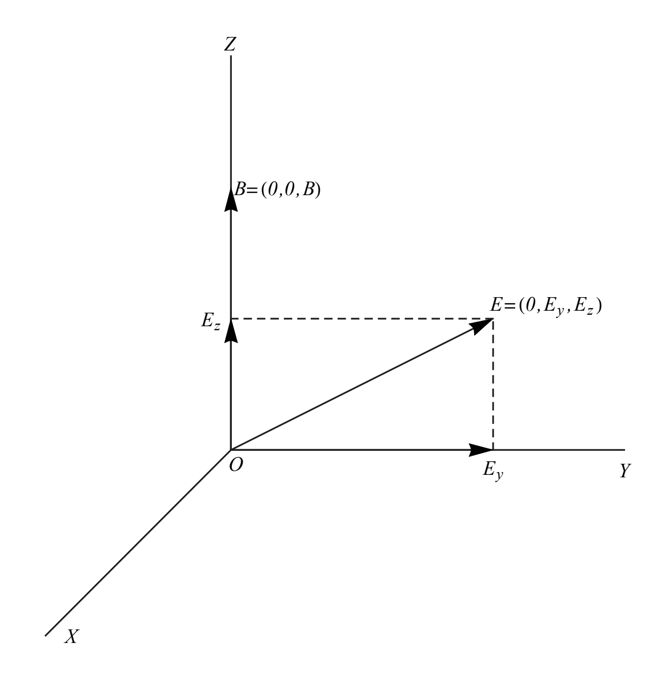


Figura 10.17: Esquema de las fuerzas en el Problema 259.

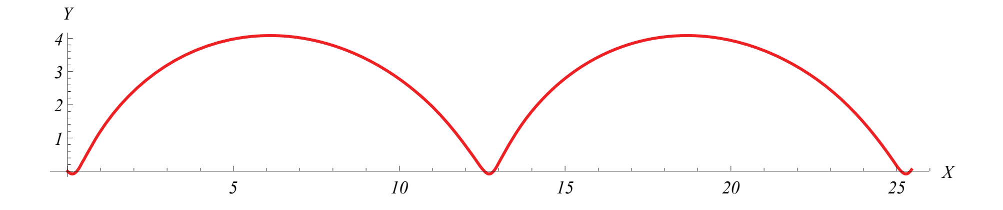


Figura 10.18: Proyección sobre el plano OXY de la trayectoria del Problema 259, la curva es una trocoide.

Problema 260. Las ecuaciones diferenciales que modelizan el movimiento del llamado *Péndulo de Foucault* son un caso particular del sistema

$$x'' - 2by' + \lambda x = 0 \qquad \text{e} \qquad y'' + 2bx' + \lambda y = 0,$$

sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = p$, $y(0) = r$, $x'(0) = q$ e $y'(0) = s$.

a) Probar que las funciones x e y son, respectivamente, solución de los problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} x^{iv} + 2(2b^2 + \lambda)x'' + \lambda^2 x = 0, \\ x(0) = p, x'(0) = q, x''(0) = 2bs - \lambda p, x'''(0) = -(4b^2 + \lambda)q - 2b\lambda r, \end{cases}$$



Imagen del péndulo de Foucault existente en la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia. Citando a la *Wikipedia*: "Un péndulo de Foucault es un péndulo esférico que puede oscilar libremente en cualquier plano vertical y capaz de oscilar durante mucho tiempo (horas). Se utiliza para demostrar la rotación de la Tierra y el efecto Coriolis. Se llama así en honor de su inventor, León Foucault." Foucault presentó públicamente su péndulo en 1851, bajo la cúpula del Panteón de París.

$$\begin{cases} y^{iv} + 2(2b^2+\lambda)y'' + \lambda^2 y = 0, \\ y(0) = r, y'(0) = s, y''(0) = -2bq - \lambda r, y'''(0) = -(4b^2+\lambda)s + 2b\lambda p. \end{cases}$$

b) Determina las trayectorias del péndulo de Foucault para el caso particular $\lambda = 3b^2$, $p = s = 4b$ y $q = r = 0$.

c) Obtén la solución general del sistema de ecuaciones

$$x'' - 2y' + 3x = 9\alpha t \qquad \text{e} \qquad y'' + 2x' + 3y = 9\beta t.$$

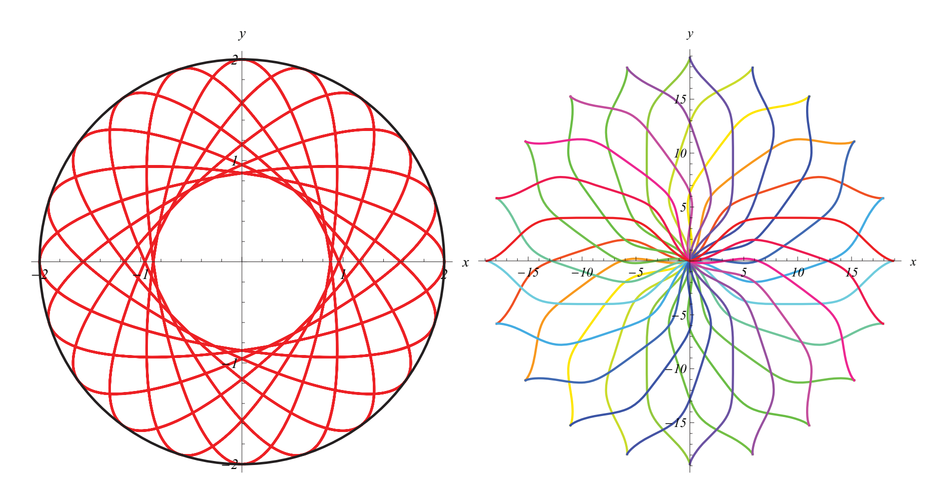


Figura 10.19: A la izquierda, la trayectoria de un péndulo de Foucault que, como se puede observar, se mantiene siempre dentro de un determinado círculo. A la derecha las soluciones de la ecuación del apartado c) del Problema 260 con las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$ y con $(\alpha, \beta) = (\cos a, \operatorname{sen} a)$, para $a \in [0, 2\pi)$.

Capítulo 11

Soluciones de sistemas y ecuaciones lineales con coeficientes analíticos

11.1. Resolución mediante serie de potencias de ecuaciones lineales con coeficientes analíticos

El objetivo de esta sección es determinar, cuando sea posible, soluciones de ecuaciones y sistemas diferenciales lineales mediante series de potencias. La técnica que desarrollaremos será de gran utilidad ya que en algunos casos nos permitirá resolver ecuaciones identificando la función que queda descrita por la serie de potencias. En los casos en los que la identificación no sea posible tendremos, al menos, una expresión para la solución. La condición que debemos exigir para la existencia de una solución desarrollable en serie de potencias de $t - t_0$ es que las funciones coeficientes involucradas sean desarrollables en serie de potencias de $t - t_0$ en un entorno de un punto t_0; es decir, que sean funciones analíticas en un entorno de t_0.[1] Si los coeficientes de una ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales lineales admiten un desarrollo en serie de potencias de $t - t_0$ diremos que el punto t_0 es regular. En caso contrario diremos que el punto es singular.

Para ver como funciona esta técnica vamos a proceder a obtener una nueva demostración de un resultado conocido: el desarrollo en serie de potencias para la función $(1 + t)^\alpha$.

[1]Si una función admite un desarrollo en serie de potencias de $t - t_0$ en un entorno de t_0 ($|t - t_0| < R$, para algún R) se dice que la función es analítica en un entorno de t_0. Normalmente usaremos la expresión *desarrollable en serie de potencias de* $t - t_0$ ya que la palabra *analítica en* t_0 resulta más apropiada en el contexto de las funciones de variable compleja.

Proposición 48. *(Serie binomial.) Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k,$$

para $|t| < 1$*, con* $\binom{\alpha}{0} = 1$ *y* $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ *si* $k \geq 1$*.*

Demostración. La función $x(t) = (1+t)^\alpha$ satisface el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = \alpha \dfrac{x}{1+t}, \\ x(0) = 1; \end{cases}$$

además, la solución es única para $|t| < 1$. Supongamos que la solución de este problema de valores iniciales posee un desarrollo en serie de potencias de t de la forma $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ convergente en $|t| < 1$(?).[2] Por tanto tendremos que

$$\begin{aligned} (1+t)x' = \alpha x &\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}t^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \\ &\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}((k+1)a_{k+1} + (k-\alpha)a_k)t^k = 0 \\ &\Rightarrow a_{k+1} = \frac{\alpha - k}{k+1} a_k. \end{aligned}$$

A partir de la condición inicial $x(0) = 1$ tendremos que $a_0 = 1 = \binom{\alpha}{0}$ y $a_k = \binom{\alpha}{k}$ si $k \geq 1$. Por la unicidad podremos concluir el resultado. □

Veamos el resultado que nos permite completar la demostración de la proposición anterior.

Teorema 49. *Consideramos el problema de valores iniciales*

$$(P) \qquad \begin{cases} x' = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde $A(t)$ *es una función matricial desarrollable en serie de potencias de* $t - t_0$*; es decir,*

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (t-t_0)^k, \ \text{para } |t-t_0| < R.$$

Entonces la solución del problema (P) *puede representarse de la forma*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (t-t_0)^k, \tag{11.1}$$

[2] Este punto es el que deberemos justificar para completar la demostración.

donde $C_k \in \mathbb{R}^n$ *viene dado por* $C_0 = x_0$ *y*

$$C_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} A_j C_{k-j}.$$

Además, el radio de convergencia de la serie (11.1) *es mayor o igual que* R.

La pieza fundamental para la prueba del teorema es el lema siguiente.

Lema 50. *Sea* $\{d_k\}_{k\geq 0}$ *una sucesión de números positivos y* M *una constante positiva tal que, para* $k = 0, 1, \ldots,$

$$d_{k+1} \leq \frac{M}{k+1} \sum_{j=0}^{k} d_j.$$

Entonces la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$ *tiene radio de convergencia mayor o igual que uno.*

Demostración del Teorema 49. Formalmente la serie satisface el problema de valores iniciales (P), es por esto que sólo debemos comprobar la convergencia de la serie. Por comodidad, suponemos $t_0 = 0$. Para $0 < L < R$, se verificará que la serie de potencias asociada con $A(L)$ será absolutamente convergente y $\|A_k\| \leq \frac{C}{L^k}$ para alguna constante C. De este hecho y usando la definición de los C_k, se sigue inmediatamente que

$$L^{k+1}|C_{k+1}| \leq \frac{L^{k+1}}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \|A_j\| \, |C_{k-j}| \leq \frac{LC}{k+1} \sum_{j=0}^{k} L^{k-j}|C_{k-j}|.$$

Por el lema anterior, aplicado a la sucesión $\{L^k|C_k|\}_{k\geq 0}$, obtendremos la convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} L^k|C_k|t^k$, para $|t| < 1$, e inmediatamente la convergencia de la serie para $x(t)$ con un radio de convergencia mayor o igual que R. □

Demostración del Lema 50. Sea la sucesión $\{\beta_k\}_{k\geq 0}$ definida por $\beta_0 = d_0$ y

$$\beta_{k+1} = \frac{M}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \beta_j,$$

para $k \geq 0$. Se comprueba por inducción que $\beta_k \geq d_k$, para cada $k \geq 0$, y por tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k |t|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k |t|^k.$$

Así, si probamos que la serie con coeficientes β_k tiene radio de convergencia uno la serie con coeficientes d_k tendrá radio mayor o igual que uno. Por el criterio del cociente, probando que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\beta_{k+1}}{\beta_k} = 1$$

habremos concluido. Pero esto es claro ya que

$$\begin{aligned}\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k} &= \frac{M}{(k+1)\beta_k}\sum_{j=0}^{k}\beta_j = \frac{M}{(k+1)\beta_k}\left(\beta_k + \sum_{j=0}^{k-1}\beta_j\right) \\ &= \frac{M}{k+1} + \frac{k}{(k+1)\beta_k}\frac{M}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j = \frac{M+k}{k+1}.\end{aligned}$$

□

Nota 23. a) En el caso de sistemas lineales no homogéneos existe un resultado similar de demostración análoga a la dada en el caso anterior. Si consideramos el problema de valores iniciales

$$(P) \qquad \begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

donde $A(t)$ es como en el teorema anterior y

$$b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (t-t_0)^k,$$

para $|t-t_0| < R$. Entonces la serie

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (t-t_0)^k,$$

donde $C_k \in \mathbb{R}^n$ viene dado por $C_0 = x_0$ y

$$C_{k+1} = \frac{1}{k+1}\left(b_k + \sum_{j=0}^{k} A_j C_{k-j}\right)$$

es solución de (P). Nuevamente, el radio de convergencia de la serie solución es mayor o igual que R.

b) Para la ecuación lineal de orden n

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0$$

donde las funciones $a_i(t)$ son desarrollables en serie de potencias de $t - t_0$, considerando

$$z_1 = x, \qquad z_2 = x', \ldots, z_n = x^{(n-1)},$$

obtendremos el sistema $z' = A(t)z$ con

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & -a_{n-3}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

De esta forma, por el teorema para sistemas homogéneos, podemos asegurar la existencia de solución desarrollable en serie de potencias. De manera análoga se procede para la ecuación lineal no homogénea de orden n

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = c(t).$$

En este caso obtendremos el sistema $z' = A(t)z + b(t)$ con $b(t) = (0, 0, \ldots, c(t))$.

c) Lo habitual al trabajar con ecuaciones lineales de orden n es suponer una solución de la forma $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t-t_0)^k$, sustituir en la ecuación y, desarrollando en serie de potencias de $(t - t_0)$ los coeficientes $a_i(t)$, obtener una relación de recurrencia para la sucesión c_k. Los coeficientes los determinaremos resolviendo la relación de recurrencia. Notad que habremos pasado de querer resolver una ecuación cuya incognita es una función a tratar de determinar una sucesión que verifica una cierta relación de recurrencia.

d) El resultado anterior afirma que existe una serie solución con un radio de convergencia al menos como el de los coeficientes. No obstante, es posible ver que dicho radio puede ser mucho mayor. Según el teorema anterior, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} (1+t^2)x'' - x' - t^2 x = 0, \\ x(0) = x'(0) = 1, \end{cases}$$

tendrá una solución convergente para $t \in (-1, 1)$. Para probar esto basta reescribir la ecuación como

$$x'' - \frac{1}{1+t^2}x' - \frac{t^2}{1+t^2} = 0$$

y observar que

$$-\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{2n} \quad \text{y} \quad -\frac{t^2}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{2(n+1)},$$

es decir, ambas funciones admiten un desarrollo en serie de potencias de convergente en $(-1, 1)$. Sin embargo, la solución del problema de valores iniciales es $x = e^t$ que admite un desarrollo en serie de potencias convergente en $\mathbb{R}$.

***Ejemplo* 53.** Determinar la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = t - x, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

La ecuación puede reescribirse como $x' + x = t$ y tanto el coeficiente 1 como el término independiente t son desarrollables en serie de potencias de t en $\mathbb{R}$, luego existe una solución en serie de potencias de t. Supongamos que dicha solución es $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$. Así,

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}t^k$$

y la ecuación dada se transforma en

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} t^k = t,$$

que implica $a_0 + a_1 = 0$, $a_1 + 2a_2 = 1$ y

$$a_k + (k+1)a_{k+1} = 0 \iff a_{k+1} = -\frac{a_k}{k+1},$$

para $k \geq 2$. Es fácil observar que $a_0 = 0$ (se deduce de la condición $x(0) = 0$), esto da $a_1 = 0$, $a_2 = 1/2$ y

$$a_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!},$$

para $k \geq 2$. Este último hecho puede verificarse por inducción. Veamos que se cumple para $k+1$, si la igualdad se cumple para k,

$$a_{k+2} = -\frac{a_{k+1}}{(k+2)} = -\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!(k+2)} = \frac{(-1)^{k+2}}{(k+2)}.$$

De esta forma

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k - 1 + t = e^{-t} - 1 + t.$$

Puede comprobarse que la solución es la correcta resolviendo la ecuación por otro procedimiento ya que se trata de una ecuación lineal de primer orden. $\lhd$

***Ejemplo* 54.** Obtener la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = tI_n x, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La matriz $A(t) = tI_n$ es claramente desarrollable en potencias de t, se verifica que $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k$, con $A_k = 0$, si $k \neq 1$, y $A_1 = I_n$. Tomando $x = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k$, por el Teorema 49 tendremos que

$$C_{k+1} = \frac{C_{k-1}}{k+1},$$

junto con las condiciones $C_0 = x_0$ y $C_1 = 0$. De este modo deducimos que

$$C_{2j+1} = 0 \quad \text{y} \quad C_{2j} = \frac{x_0}{2^j j!}$$

para $j \geq 0$. Otra vez la prueba se obtiene por un argumento de inducción. Con esto,

$$x = x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{2^j j!} = x_0 e^{t^2/2}$$

es la solución buscada. $\triangleleft$

***Ejemplo* 55.** Encontrar la solución general de la ecuación

$$(1+t^2)x'' + 2tx' - 2x = 0$$

en serie de potencias de t y expresar la solución en términos de funciones elementales.

La ecuación puede reescribirse como

$$x'' + \frac{2t}{1+t^2}x' - \frac{2}{1+t^2}x = 0.$$

Las funciones coeficientes son desarrollables en serie de potencias de t para $t \in (-1,1)$. En efecto, para $t \in (-1,1)$,

$$\frac{2t}{1+t^2} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k+1} \quad \text{y} \quad -\frac{2}{1+t^2} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}t^{2k}.$$

De este hecho podemos asegurar que existe una serie solución convergente en $(-1,1)$. Si suponemos $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ tendremos que

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \quad \text{y} \quad x'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}t^k.$$

Si sustituimos en la ecuación propuesta[3] tendremos

$$(1+t^2)x'' + 2tx' - 2x = 0 \iff$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}t^k + \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_k t^k + 2\sum_{k=1}^{\infty}k a_k t^k - 2\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k = 0$$
$$\iff 2(a_2 - a_0) + 6a_3 t + \sum_{k=2}^{\infty}(k+2)[(k+1)a_{k+2} + (k-1)a_k]t^k = 0.$$

De este modo $a_2 = a_0$, $a_3 = 0$ y

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + k(k-1)a_k + 2ka_k - 2a_k = 0 \iff a_{k+2} = -\frac{k-1}{k+1}a_k$$

[3]Es mejor sustituir en la ecuación propuesta que en la que hemos estudiado la desarrollabilidad de los coeficientes ya que nos ahorrará usar los desarrollos en potencias de t de los coeficientes.

para $k \geq 2$. De este hecho se deduce que $a_{2j+1} = 0$ para $j \geq 1$ y

$$a_{2j} = \frac{(-1)^{j+1}}{2j-1} a_0,$$

para $j \geq 0$. Así,

$$x = a_1 t + a_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2j-1} t^{2j} = a_1 t + a_0 (1 + t \arctan t).$$

que es la solución general de la ecuación propuesta. ◁

11.2. Otra cuestión de resortes

Como ya se ha comentado en varias ocasiones, la ecuación que modeliza el movimiento de un cuerpo de masa m sujeto a un resorte con una fuerza de restauración de la forma $-\kappa x$, donde x indica la posición del cuerpo medida desde su posición de equilibrio, es

$$m x'' + \kappa x = 0,$$

supuesto que no haya rozamiento ni se impriman al cuerpo fuerzas externas. Sin embargo, la fuerza de restauración de un muelle va degenerando con el tiempo y el uso. Este hecho se puede introducir en la ecuación anterior sustituyendo κ por una función que decae con el tiempo de forma exponencial como $\kappa e^{-\varepsilon t}$, con $\varepsilon > 0$. Así, la ecuación que describe el movimiento es

$$m x'' + \kappa e^{-\varepsilon t} x = 0.$$

Obviamente nos encontramos ante una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes desarrollables en potencias de t en $\mathbb{R}$ (tened en cuenta el desarrollo de Taylor $e^{-\varepsilon t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{k!} t^k$, para todo $t \in \mathbb{R}$) y admitirá una solución en serie de potencias de t convergente en $\mathbb{R}$. Si suponemos que $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ tendremos

$$\begin{aligned}
&m x'' + \kappa e^{-\varepsilon t} x = 0 \\
&\iff m \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} t^k + \kappa \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{k!} t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) = 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{\infty} \left(m(k+1)(k+2) a_{k+2} + \kappa \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} \frac{(-1)^j \varepsilon^j}{j!} \right) t^k = 0,
\end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$a_{k+2} = -\frac{\kappa}{m(k+1)(k+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} \frac{(-1)^j \varepsilon^j}{j!}.$$

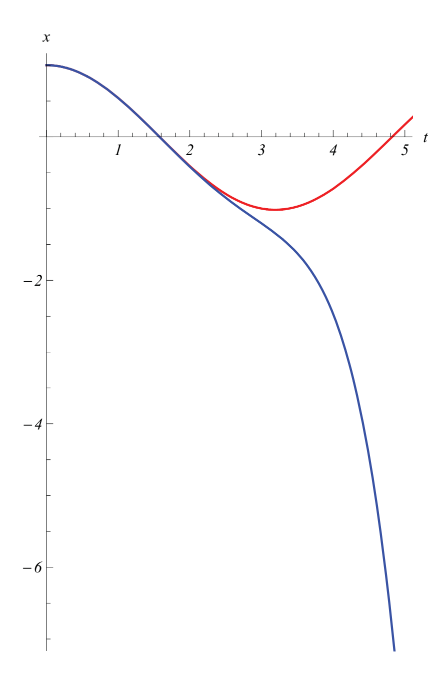


Figura 11.1: En rojo la solución de la ecuación $x'' + e^{-0.02t}x = 0$, con las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$ y en azul la aproximación de orden seis $p_6(t)$. La gráfica muestra que la aproximación es buena cerca del origen pero que va perdiendo su validez al alejarnos de este punto.

Obtener una expresión para a_k en este caso no es trivial. Sin embargo podemos obtener una aproximación a la solución calculando algunos términos de la sucesión. Si imponemos las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$ deducimos que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$ [4]. Tomando $\kappa = m$, tenemos

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{\varepsilon}{6}, \quad a_4 = \frac{1-\varepsilon^2}{24}, \quad a_5 = \frac{\varepsilon(\varepsilon^2-4)}{120} \text{ y } a_6 = -\frac{1-11\varepsilon^2+\varepsilon^4}{720},$$

que nos da la aproximación de orden seis de la solución

$$p_6(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{\varepsilon}{6}t^3 + \frac{1-\varepsilon^2}{24}t^4 + \frac{\varepsilon(\varepsilon^2-4)}{120}t^5 - \frac{1-11\varepsilon^2+\varepsilon^4}{720}t^6.$$

Como se muestra en la figura 11.1, $p_6(t)$ aproxima de una manera aceptable a la solución cerca del origen pero no para valores grandes del tiempo. Más adelante obtendremos una expresión apropiada para la solución.

[4] Notad que con estas condiciones si tomamos $\varepsilon = 0$, lo que reduce la ecuación a la del oscilador armónico clásico, se deduce que

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j}{(2j!)}\left(\frac{\kappa}{m}\right)^j \quad \text{y} \quad a_{2j+1} = 0.$$

y, por tanto, la solución es $x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right)$ como corresponde.

11.3. Una aplicación del teorema fundamental de curvas en $\mathbb{R}^3$

En el capítulo correspondiente a los teoremas de existencia y unicidad de solución para problemas de valores iniciales, presentamos como aplicación de los mismos una demostración del teorema fundamental de curvas en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, en aquel momento no estábamos en disposición de poder presentar ningún ejemplo de cierta relevancia. Esta sección pretende cubrir aquel déficit.

Supongamos que queremos determinar una curva parametrizada con respecto al parámetro arco para la que tanto la curvatura como la torsión sean proporcionales a dicho parámetro; es decir, se debe cumplir que

$$\kappa(s) = 2\alpha s \qquad \text{y} \qquad \tau(s) = 2\beta s.$$

Por simplicidad supondremos que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Consideremos además que el triedro de Frênet-Serret en $s = 0$ está dado por los vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ con

$$u_1 = (\alpha, 0, \beta), \qquad u_2 = (0, 1, 0) \qquad \text{y} \qquad u_3 = (-\beta, 0, \alpha).$$

Con este planteamiento, la curva buscada la obtendremos por integración del vector $\mathbf{T}(s)$ obtenido como solución del problema de valores iniciales

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{pmatrix} = 2s \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{T}(0) = u_1$, $\mathbf{N}(0) = u_2$ y $\mathbf{B}(0) = u_3$.

Observando que se trata de un sistema de ecuaciones de la forma $x' = A(s)x$, donde

$$A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k s^k,$$

con $A_k = 0$ si $k \neq 1$ y

$$A_1 = 2 \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

podemos asegurar la existencia de solución de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k s^k,$$

con los coeficientes C_k cumpliendo la relación

$$C_{k+1} = \frac{1}{k+1} A_1 C_{k-1}, \qquad k \geq 1,$$

y siendo $C_0 = (u_1, u_2, u_3)^t$ y $C_1 = (0, 0, 0)^t$. De manera sencilla podemos comprobar que $C_{2j+1} = (0, 0, 0)$ y

$$C_{2j} = \frac{A_1^j C_0}{2^j j!}, \qquad j \geq 1.$$

Resulta evidente que debemos analizar las potencias de las matriz A_1. Con un argumento de inducción puede comprobarse que, siendo

$$B = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & -\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha\beta & 0 & \beta^2 \end{pmatrix},$$

se verifican las relaciones

$$A_1^{2n} = 2^{2n}(-1)^n B \qquad \text{y} \qquad A_1^{2n+1} = 2^{2n+1}(-1)^n A_1.$$

De este modo llegamos a que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{pmatrix} &= BC_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} s^{4n} + AC_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} s^{4n+2} + (I - B)C_0 \\ &= BC_0 \cos(s^2) + AC_0 \operatorname{sen}(s^2) + (I - B)C_0. \end{aligned}$$

Finalmente, observando que

$$\begin{aligned} BC_0 &= (\alpha^2 u_1 - \alpha\beta u_3, u_2, -\alpha\beta u_1 + \beta^2 u_3), \\ AC_0 &= (\alpha u_2, -\alpha u_1 + \beta u_3, -\beta u_2) \end{aligned}$$

y

$$(I - B)C_0 = (\beta^2 u_1 + \alpha\beta u_3, 0, \alpha\beta u_1 + \alpha^2 u_3),$$

tenemos que el triedro de Frênet-Serret en cada punto de la curva viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= (\alpha \cos(s^2), \alpha \operatorname{sen}(s^2), \beta), \\ \mathbf{N}(s) &= (-\operatorname{sen}(s^2), \cos(s^2), 0) \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{B}(s) = (-\beta \cos(s^2), -\beta \operatorname{sen}(s^2), \alpha).$$

Para determinar la ecuación de nuestra curva, integraremos el vector tangente e impondremos que pase por el punto $(0, 0, 0)$, de este modo

$$r(s) = \left(\alpha \int_0^s \cos(t^2)\, dt, \alpha \int_0^s \operatorname{sen}(t^2)\, dt, \beta s \right).$$

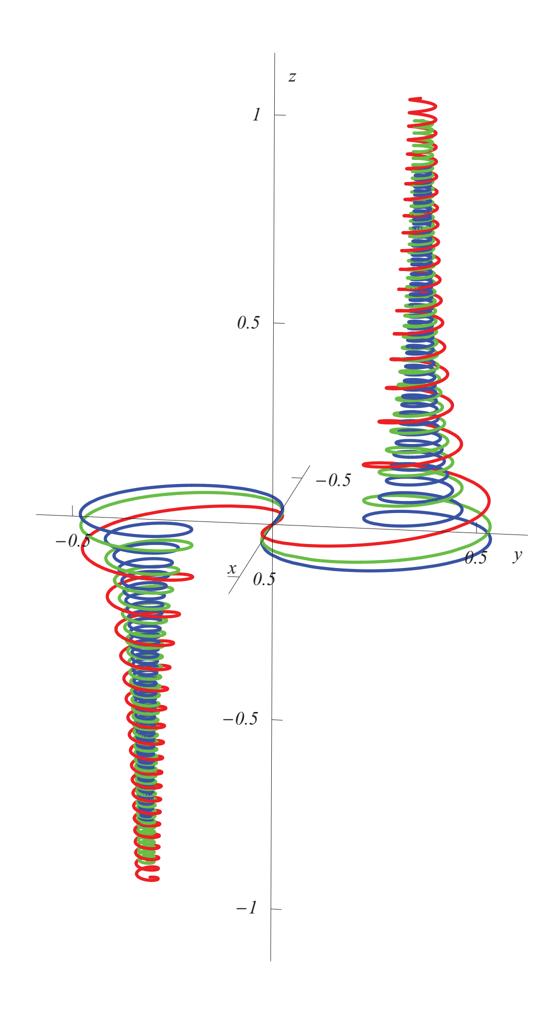


Figura 11.2: Tres *hélices de Cornu* trazadas para $(\alpha, \beta) = (\cos p, \operatorname{sen} p)$ con $p = \pi/20, \pi/30$ y $\pi/40$.

Resulta interesante observar que la curva en cuestión es una extensión helicoidal de una espiral de Cornu o clotoide. Recordemos que la clotoide podía definirse como la curva plana para la que su curvatura era proporcional al parámetro. Para la construcción de nuestra curva hemos supuesto que también la torsión es proporcional a dicho parámetro. En la figura 11.2 hemos representado la *hélice de Cornu* para tres valores de α y β.

11.4. La ecuación de Chebyshev y los polinomios de Chebyshev



Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894), matemático ruso. Aunque publicó resultados en muy diversas ramas de las matemáticas, sus aportaciones fundamentales son la demostración en 1850 del postulado de Bertrand (si $n > 3$, entre n y $2n$ hay al menos un número primo), la desigualdad de Chebyshev que data de 1867 (una estimación de la desviación de una variable aleatoria respecto a su media y que, a pesar de estar habitualmente relacionada con él, fue realmente descubierta por Bienaymé catorce años antes) y, por supuesto, los polinomios que llevan su nombre. Los polinomios aparecen por primera en un trabajo de 1854 y los utilizó fundamentalmente en teoría de la aproximación.

Sea μ un parámetro real constante, la ecuación de Chebyshev viene dada por

$$(1-t^2)x'' - tx' + \mu x = 0.$$

Dividiendo por $1-t^2$ se puede observar que se trata de una ecuación lineal de segundo orden cuyos coeficientes son desarrollables en potencias de t con radio de convergencia uno. En efecto,

$$-\frac{t}{1-t^2} = -\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k+1} \quad \text{y} \quad \frac{\mu}{1-t^2} = \mu\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}.$$

Por tanto, para $x(0) = a_0$ y $x'(0) = a_1$, podemos asegurar la existencia de solución desarrollable en serie de potencias de t convergente, al menos, para $|t| < 1$. Si suponemos que la solución tiene la forma $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, sustituyendo en la ecuación diferencial y reorganizando los términos llegamos a la relación de recurrencia

$$a_{k+2} = -\frac{\mu - k^2}{(k+2)(k+1)} a_k,$$

para $k \geq 0$. De la relación de recurrencia deducimos que la solución buscada es de la forma

$$x(t) = a_0\phi_{0,\mu}(t) + a_1\phi_{1,\mu}(t),$$

donde

$$\phi_{0,\mu}(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu-4)(\mu-16)\ldots(\mu-(2j-2)^2)}{2j!}(-1)^j t^{2j}$$

y

$$\phi_{1,\mu}(t) = t + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)\ldots(\mu-(2j-1)^2)}{(2j+1)!}(-1)^j t^{2j+1}.$$

Es sencillo observar que si $\mu = n^2$ existe una solución polinomial de la ecuación de Chebyshev (notar que si n es par la serie para $\phi_{0,\mu}$ es finita y lo mismo ocurre para $\phi_{1,\mu}$ si n es impar). Estas son, salvo constantes multiplicativas, las únicas soluciones polinómicas de la ecuación. Si el coeficiente director es 2^{n-1} se denotan por T_n y se denominan polinomios de Chebyshev de primera especie, aunque al referirnos a ellos hablaremos de polinomios de Chebyshev simplemente. Con esto tenemos que

$$T_{2k}(t) = (-1)^k\phi_{0,(2k)^2}(t) \quad \text{y} \quad T_{2k+1}(t) = (-1)^k\phi_{1,(2k+1)^2}(t),$$

que, de un modo compacto, pueden escribirse como

$$T_n(t) = \frac{n}{2}\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j \frac{(n-j-1)!}{j!(n-2j)!}(2t)^{n-2j}.$$

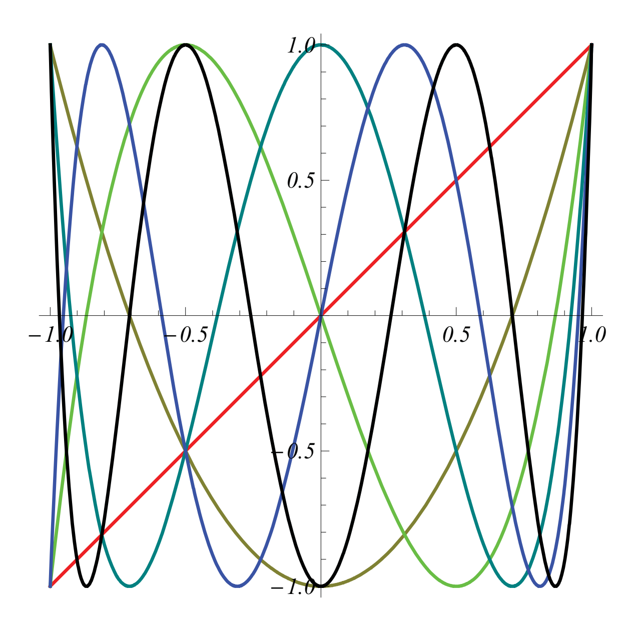


Figura 11.3: Los polinomios de Chebyshev $T_n(t)$, para $n = 1, \dots, 6$.

En la figura 11.3 se muestran los polinomios $T_n(t)$, para $n = 1, \dots, 6$, para identificar cada uno de ellos basta con contar sus raíces.

11.4.1. Propiedades de los polinomios de Chebyshev

Expresión trigonométrica. Para $|t| < 1$ se verifica que

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t).$$

Con el cambio de variable $t = \cos\theta$ la ecuación de Chebyshev se transforma en

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \mu x = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación para $\mu = n^2$ son $x_1(\theta) = \cos(n\theta)$ y $x_2(\theta) = \operatorname{sen}(n\theta)$. Deshaciendo el cambio de variable sólo la primera de estas da lugar a polinomios. Observando que el coeficiente director de $\cos(n \arccos t)$ es 2^{n-1} concluimos el resultado.

De la identidad $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, deducimos que los polinomios de Chebyshev son los que aparecen al expresar $\cos(n\theta)$ en potencias de $\cos\theta$ mediante la fórmula de *de Moivre*.

Fórmula de recurrencia a tres términos. Si $n \geq 2$

$$T_n(t) + T_{n-2}(t) = 2tT_{n-1}(t),$$

con $T_0(t) = 1$ y $T_1(t) = t$. Para verla basta aplicar la expresión trigonométrica anterior o usar la definición de los polinomios.

La propiedad minimax. Un problema de gran interés en Teoría de la Aproximación consiste en intentar aproximar t^n mediante polinomios de grado menor que n en el intervalo $[-1,1]$. Este problema es equivalente a determinar el polinomio mónico que minimiza el valor

$$\max\{|P_n(t)| : t \in [-1,1]\}.$$

Proposición 51. *Sea P_n un polinomio mónico de grado $n > 0$. Entonces*

$$\max\{|P_n(t)| : t \in [-1,1]\} \geq \max\{|2^{1-n}T_n(t)| : t \in [-1,1]\} = 2^{1-n}.$$

Demostración. En primer lugar es claro que

$$\max\{|T_n(t)| : t \in [-1,1]\} = \max\{|\cos(n\theta)| : \theta \in [0,\pi]\} = 1.$$

Supongamos que $\max\{|P_n(t)| : t \in [-1,1]\} < 2^{1-n}$ y lleguemos a una contradicción. El polinomio $2^{1-n}T_n(t)$ va tomando los valores $\pm 2^{1-n}$ en lo valores $t_k = \cos(k\pi/n)$ con $k = 0, \ldots, n$. Considerando ahora el polinomio $Q(t) = 2^{1-n}T_n(t) - P_n(t)$, a partir de nuestra suposición, observamos que este tiene el mismo signo que $2^{1-n}T_n(t)$ en los valores t_k y por tanto tiene n ceros en $[-1,1]$. Este hecho es una contradicción ya que Q es un polinomio no nulo de grado $n-1$. □

Ortogonalidad para los polinomios Chebyshev. Sean n y m enteros no negativos. Entonces

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \delta_{n,m} c_n, \tag{11.2}$$

donde $c_0 = \pi$ y $c_n = \frac{\pi}{2}$ si $n \geq 1$.

La identidad (11.2) nos indica que los polinomios de Chebyshev $\{T_n\}_{n\geq 0}$ son ortogonales en el intervalo con respecto a la función peso $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.[5]

Usando la expresión trigonométrica para los polinomios de Chebyshev y el cambio de variable $t = \cos\theta$ tenemos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\, d\theta.$$

Ahora, si $n \neq m$, usando la identidad $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$, concluimos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta))\, d\theta = 0$$

Para $n = m$, si $n = 0$ es obvio y para $n \geq 1$ debe usarse la identidad $2\cos^2 a = 1 + \cos(2a)$.

[5] Entenderemos que una familia de funciones $\{\phi_n(t)\}_{n\geq 0}$ es ortogonal en un intervalo $[a,b]$ con respecto a una función peso $w(t) > 0$, si satisface que

$$\int_a^b \phi_n(t)\phi_m(t)w(t)\, dt = C_n \delta_{n,m}$$

para ciertas constantes C_n y donde $\delta_{n,m}$ denota la función delta de Kronecker (recordad que $\delta_{n,m} = 0$, si $n \neq m$, y $\delta_{n,n} = 1$).

11.5. La ecuación de Hermite y los polinomios de Hermite



Charles Hermite (1822–1901), matemático francés. Aparte de otras aportaciones a las matemáticas, entre ellas los polinomios que llevan su nombre, Hermite es conocido por su demostración de la trascendencia del número e. Como curiosidad, cabe señalar que fue el suegro de E. Picard, que ya ha aparecido previamente en este trabajo.

Sea ν un parámetro constante, la ecuación de Hermite viene dada por

$$x'' - 2tx' + 2\nu x = 0.$$

Obviamente se trata de una ecuación lineal de segundo orden cuyos coeficientes ($-2t$ y 2ν) son polinomios. Por tanto, para $x(0) = a_0$ y $x'(0) = a_1$, podemos asegurar la existencia de solución desarrollable en serie de potencias de t convergente para todo $t \in \mathbb{R}$. Si suponemos que la solución tiene la forma $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, sustituyendo en la ecuación diferencial y reorganizando los términos llegamos a la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = -\frac{2(\nu - n)}{(n+2)(n+1)} a_n$$

de donde deducimos que la solución buscada es de la forma

$$x(t) = a_0 \psi_{0,\nu}(t) + a_1 \psi_{1,\nu}(t),$$

con

$$\psi_{0,\nu}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \nu(\nu-2)(\nu-4)\ldots(\nu-(2k-2))}{2k!}(-1)^k t^{2k}$$

y

$$\psi_{1,\nu}(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (\nu-1)(\nu-3)(\nu-5)\ldots(\nu-(2k-1))}{(2k+1)!}(-1)^k t^{2k+1}.$$

Para $\nu = n$ se verifica que existe una solución polinomial de la ecuación de Hermite (notar que si n es par la serie para $\psi_{0,\nu}$ es finita y lo mismo ocurre para $\psi_{1,\nu}$ si n es impar). Estas son, salvo constantes multiplicativas, las únicas soluciones polinómicas de la ecuación de Hermite. Si el coeficiente director es 2^n se denotan por H_n y se denominan polinomios de Hermite. Así tenemos que

$$H_{2k}(t) = (-1)^k \psi_{0,2k}(t) \quad \text{y} \quad H_{2k+1}(t) = (-1)^k \psi_{1,2k+1}(t)$$

que, de manera compacta, se expresan como

$$H_n(t) = n! \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j}{j!(n-2j)!}(2t)^{n-2j}.$$

Las funciones

$$\mathcal{H}_n(t) = e^{-t^2/2} H_n(t), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

se denominan funciones de Hermite y juegan un papel central en el estudio de la mecánica cuántica. En la figura 11.4 se muestran las funciones de Hermite para $n = 4, 5, 6$ y 7 que pueden distinguirse por su número de ceros.

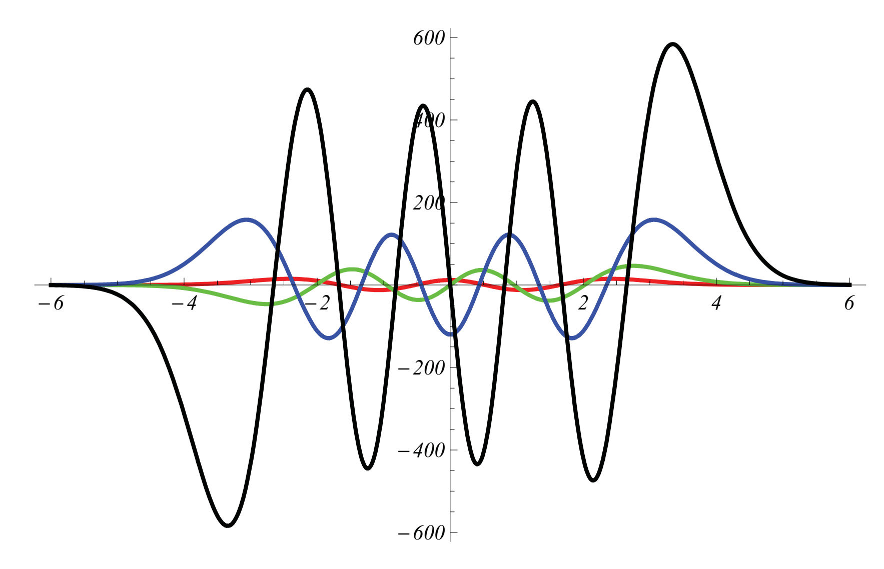


Figura 11.4: Representación de las funciones de Hermite $\mathcal{H}_n$ para $n = 4, 5, 6$ y 7.

11.5.1. Propiedades de los polinomios de Hermite

Fórmula de recurrencia a tres términos. Tomando $H_0(x) = 1$ y $H_1(x) = 2x$, se verifica que

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t),$$

para $n \geq 2$. La fórmula puede deducirse de la expresión para los polinomios de Hermite.

Función generatriz exponencial.[6] La función generatriz exponencial de los polinomios de Hermite es e^{2tz-z^2}; es decir,

$$e^{2tz-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} z^n.$$

Para probar esta expresión usaremos la identidad

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{2m} \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_j b_{n-2j} \right) z^n,$$

[6]Dada una sucesión $\{a_n\}$ se define su función generatriz exponencial como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

que es una consecuencia del producto de Cauchy de dos series.[7] Así,

$$\begin{aligned} e^{2tz-z^2} &= e^{-z^2} e^{2tz} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} z^{2m} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2t)^m}{m!} z^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{(2t)^{n-2j}}{(n-2j)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} z^n, \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos multiplicado y dividido por $n!$ y hemos usado la definición de los polinomios de Hermite.

Fórmula de Rodrigues. Para $|t| < 1$ se verifica que

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}.$$

Usando la fución generatriz es claro que

$$\left.\frac{\partial^n}{\partial z^n} e^{2tz-z^2}\right|_{z=0} = H_n(t).$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} e^{2tz-z^2} = e^{t^2} \frac{\partial^n}{\partial z^n} e^{-(t-z)^2}$$

y usando el cambio de variable $r = t - z$ (notar que $\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{d}{dr}$) obtenemos que

$$\left.\frac{\partial^n}{\partial z^n} e^{2tz-z^2}\right|_{z=0} = (-1)^n e^{t^2} \left.\frac{d^n}{dr^n} e^{-r^2}\right|_{r=t} = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$$

con lo que concluimos.

Ortogonalidad para los polinomios Hermite. Sean n y m enteros no negativos. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(t) H_m(t) e^{-t^2}\, dt = \delta_{n,m} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Es decir los polinomios de Hermite son ortogonales en $\mathbb{R}$ con respecto al peso e^{-t^2}.

[7] En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{2m} \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{2m} \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} z^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} z^{2m+1} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j b_{2(m-j)} \right) z^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j b_{2(m-j)+1} \right) z^{2m+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_j b_{n-2j} \right) z^n. \end{aligned}$$

En primer lugar es claro que la función $\mathcal{H}_n(t) = e^{-t^2/2}H_n(t)$ satisface la ecuación $\mathcal{H}_n'' + (2n+1-x^2)\mathcal{H}_n = 0$. Ahora obtenemos que

$$\begin{cases} \mathcal{H}_m(\mathcal{H}_n'' + (2n+1-x^2)\mathcal{H}_n) = 0 \\ \mathcal{H}_n(\mathcal{H}_m'' + (2m+1-x^2)\mathcal{H}_m) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{H}_n'\mathcal{H}_m - \mathcal{H}_m'\mathcal{H}_n)' + 2(n-m)\mathcal{H}_n\mathcal{H}_m = 0.$$

Observando que $\int_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_n'\mathcal{H}_m - \mathcal{H}_m'\mathcal{H}_n)' = 0$, llegamos a que, para $n \neq m$,

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(t)H_m(t)e^{-t^2}\,dt = 2(n-m)\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_n(t)\mathcal{H}_m(t)\,dt = 0.$$

En el caso $n = m$, usando la fórmula de Rodrigues para expresar uno de los H_n e integrando por partes n veces, tendremos que

$$\int_{\mathbb{R}} (H_n(t))^2 e^{-t^2}\,dt = \int_{\mathbb{R}} H_n^{(n)}(t)e^{-t^2}\,dt.$$

Por último usando que $H_n^{(n)}(t) = 2^n n!$ y la función Gamma finalizamos que

$$\int_{\mathbb{R}} (H_n(t))^2 e^{-t^2}\,dt = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

11.6. Desarrollos entorno a puntos singulares regulares y el método de Fröbenius

El método que acabamos de desarrollar puede resultar muy útil en muchos casos ya que permite obtener soluciones de ecuaciones diferenciales mediante series de potencias reconocibles. En caso contrario nos permite obtener expresiones para funciones cuya existencia podemos asegurar pero que no nos es posible identificar. Desafortunadamente la situación que se ha descrito no siempre ocurre. Es muy frecuente que los coeficientes de ecuaciones diferenciales no sean funciones desarrollables en serie de potencias.

Por simplicidad en el planteamiento, a lo largo de esta sección consideraremos únicamente ecuaciones lineales de segundo orden

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0.$$

Un ejemplo que ya ha aparecido de ecuación lineal con coeficientes no desarrollables en serie de potencias positivas de t es la ecuación de Euler. La ecuación de Euler de segundo orden es de la forma

$$t^2x'' + atx' + bx = 0,$$

con a y b valores reales. Esta ecuación podemos reescribirla como

$$x'' + \frac{a}{t}x' + \frac{b}{t^2}x = 0.$$

Es claro que los coeficientes $P(t) = \frac{a}{t}$ y $Q(t) = \frac{b}{t^2}$ no son funciones desarrollables en serie de t. Usando el cambio de variable $t = e^s$, que implícitamente nos está indicando que resolvemos la ecuación para $t > 0$ (para $t < 0$ efectuaremos en primer lugar el cambio de variable $t = -r$), vimos que la ecuación se transformaba en la ecuación lineal de coeficientes constantes

$$\frac{d^2x}{ds^2} + (a-1)\frac{dx}{ds} + bx = 0.$$

Luego si m_1 y m_2 son soluciones de la ecuación $m^2 + (a-1)m + b = 0$, deshaciendo el cambio de variable, obtendremos que las soluciones fundamentales de la ecuación de Euler son

$$\{t^{m_1}, t^{m_2}\}, \qquad \text{si } m_1 \neq m_2,$$

y

$$\{t^{m_1}, t^{m_1}\log t\}, \qquad \text{si } m_1 = m_2.$$

En estos casos hemos supuesto que las raíces m_1 y m_2 son valores reales, si fuesen raíces complejas se deberían realizar las modificaciones oportunas.[8] La idea que motiva el método de Fröbenius que vamos a desarrollar a continuación es que si en una ecuación lineal de segundo orden los coeficientes $P(t)$ y $Q(t)$ son tales que

$$P(t) = \frac{p_0}{t} + p_1 + p_2 t + p_3 t^2 + p_4 t^3 \dots$$

y

$$Q(t) = \frac{q_0}{t^2} + \frac{q_1}{t} + q_2 + q_3 t + q_4 t^2 + \dots$$

tal vez sea posible determinar soluciones mediante series de la forma

$$t^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

[8]En el caso de que m_1 y m_2 sean valores complejos distintos tendremos que $m_2 = \overline{m_1}$ (recordad que $a, b \in \mathbb{R}$); es decir, se tendrá que $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$. De este modo

$$t^{m_1} = e^{m_1 \log t} = t^\alpha e^{i\beta \log t} = t^\alpha(\cos(\beta \log t) + i \operatorname{sen}(\beta \log t))$$

y

$$t^{m_2} = e^{\overline{m_1} \log t} = t^\alpha e^{-i\beta \log t} = t^\alpha(\cos(\beta \log t) - i \operatorname{sen}(\beta \log t))$$

y podemos considerar la base de soluciones

$$\{t^\alpha \cos(\beta \log t), t^\alpha \operatorname{sen}(\beta \log t)\}.$$

que denominaremos *series de Fröbenius*, o modificaciones de estas incorporando términos logarítmicos

$$t^m \log t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

En primer lugar veamos una definición que describe el comportamiento del punto $t = 0$ en la ecuación de Euler pero en un contexto más general.

Definición 8. Diremos que el punto $t = t_0$ es un punto singular para la ecuación $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$ si al menos una de las funciones coeficientes $P(t)$ y $Q(t)$ no es desarrollable en serie de potencias de $t - t_0$.

Diremos que $t = t_0$ es un punto singular regular para la ecuación $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$ si es un punto singular pero $(t - t_0)P(t)$ y $(t - t_0)^2 Q(t)$ son desarrollables en potencias de $t - t_0$.

Veamos algunos ejemplos

a) Consideremos la ecuación

$$x'' + \frac{p}{t^a}x' + \frac{q}{t^b}x = 0$$

con p y q valores reales no nulos y a y b enteros positivos. Es claro que $t = 0$ es siempre un punto singular de la ecuación dada, ya que $P(t) = \frac{p}{t^a}$ y $Q(t) = \frac{q}{t^b}$ no son desarrollables en serie de potencias de t. Además resulta sencillo observar que $t = 0$ es un punto singular regular si y sólo si $a = 1$ y $b \leq 2$.[9]

b) En la ecuación de Chebyshev

$$(1 - t^2)x'' - tx' + \mu x = 0,$$

donde μ es un parámetro real, que puede reescribirse como

$$x'' - \frac{t}{1 - t^2}x' + \frac{\mu}{1 - t^2}x = 0,$$

los puntos $t_0 = \pm 1$ son puntos singulares regulares ya que

$$P(t) = \frac{-t}{1 - t^2} \qquad \text{y} \qquad Q(t) = \frac{\mu}{1 - t^2}$$

no son desarrollables en potencias de $t \pm 1$ y sin embargo $(t \pm 1)P(t)$ y $(t \pm 1)Q(t)$ si los son.

[9] En el caso $a = 2$ y $b = 3$, tomando $p = 1$ y $q = -1$, se puede comprobar que $x = t$ es una solución. Además, usando el método de reducción de orden, es posible localizar la segunda solución $x = te^{1/t}$. Es interesante observar que esta segunda solución no es expresable como una serie de Fröbenius.

c) La *ecuación de Bessel*

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - \alpha^2)x = 0,$$

donde α es un parámetro real, que puede tomar la forma

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \frac{t^2 - \alpha^2}{t^2}x = 0,$$

tiene en $t_0 = 0$ un punto singular regular puesto que las funciones

$$P(t) = \frac{1}{t} \qquad \text{y} \qquad Q(t) = \frac{t^2 - \alpha^2}{t^2}$$

no son desarrollables en potencias de t y sin embargo $tP(t)$ y $t^2Q(t)$ si lo son.

Con objeto de simplificar la notación supondremos que el punto singular regular es $t_0 = 0$; si se trata de un $t_0 \neq 0$ bastará hacer la traslación $t - t_0 = r$. En nuestro intento de obtener soluciones para ecuaciones lineales de segundo orden en las próximidades del punto singular regular $t = 0$, consideraremos que dicha solución viene dada en forma de serie de Fröbenius

$$x(t) = t^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+m}$$

con $a_0 \neq 0$.[10] Igual que en para la ecuación de Euler supondremos que $t > 0$ (si $t < 0$ se hace el cambio $t = -r$ y se procede del mismo modo). Para obtener la solución deberemos verificar que valores de m que son admisibles y una vez establecidos estos buscaremos, para cada uno de ellos, la relación de recurrencia ssatisfecha por los coeficientes a_n. Ahora es claro que

$$x'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+m)t^{n+m-1}$$

y

$$x''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+m)(n+m-1)t^{n+m-2}.$$

Teniendo en cuenta que por hipótesis

$$tP(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \qquad \text{y} \qquad t^2Q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n,$$

[10]Esta suposición va a ser fundamental en uestro planteamiento pero no supone ninguna restricción. Notad que si $a_0 = 0$ podríamos sacar factor común t^k, donde k sería el mínimo valor tal que $a_k \neq 0$, y obtendríamos una serie de Fröbenius con el exponente $m + k$ en lugar de m.

tendremos que

$$\begin{aligned} P(t)x'(t) &= \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+m)t^{n+m-1} \\ &= t^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}a_k(m+k)\right)t^n \\ &= t^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k}a_k(m+k) + p_0 a_n(m+n)\right)t^n \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Q(t)x(t) &= \frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+m} \\ &= t^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k\right)t^n \\ &= t^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k}a_k + q_0 a_n\right)t^n. \end{aligned}$$

De este modo, sustituyendo en la ecuación y simplificando llegamos a que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(a_n[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0] \\ + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}]\Bigg)t^n = 0$$

e igualando a cero el coeficiente de t^n, se tiene la fórmula de recurrencia para los coeficientes a_n

$$a_n[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}] = 0.$$

Para $n = 0$ y teniendo en cuenta que $a_0 \neq 0$, esta relación de recurrencia se reduce a

$$f(m) := m(m-1) + mp_0 + q_0 = 0.$$

Esta ecuación se denomina *ecuación indicial* y sus raíces m_1 y m_2 son los posibles exponentes en la serie de Fröbenius. Para cada uno de estos valores de m se determinarán los coeficientes a_n en función de a_0 a menos que exista un n tal que $f(m+n) = 0$, en cuyo caso, el proceso no puede concluirse. Así, si $m_1 = m_2 + n$ para algún entero $n \geq 1$, la elección $m = m_1$ dará una solución formal en forma de serie de Fröbenius; pero, en general, no ocurre lo mismo para $m = m_2$, ya que $f(m_2 + n) = f(m_1) = 0$. Si $m_1 = m_2$, también se obtiene una única solución formal. En los demás casos en los que m_1 y m_2 sean

números reales obtendremos dos soluciones independientes. Aunque m_1 y m_2 pueden ser números complejos conjugados no trataremos ese caso ya que un estudio apropiado de esta situación necesitaría de un conocimiento profundo del análisis complejo.

Todo lo anterior se denomina *método de Fröbenius* de resolución de ecuaciones diferenciales y se recoge en el siguiente

Teorema 52. *Supongamos que $t_0 = 0$ es un punto singular regular para la ecuación $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$ con*

$$tP(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \qquad y \qquad t^2 Q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n,$$

para $|t| < R$. Si m_1 y m_2 son soluciones de la ecuación indicial

$$m(m-1) + p_0 m + q_0 = 0$$

con $m_2 < m_1$, entonces

$$x_1(t) = t^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_1) t^n, \quad a_0 \neq 0,$$

con los coeficientes a_n dados por la fórmula de recurrencia

$$a_n(m_1) f(m_1 + n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(m_1)[(m_1 + k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0,$$

será una solución de la ecuación dada en $0 < t < R$ y la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_1) t^n$ será convergente en $|t| < R$.

Además, si $m_1 - m_2 \notin \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ existirá una segunda solución independiente y válida en el mismo intervalo de la forma

$$x_2(t) = t^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2) t^n, \quad a_0 \neq 0,$$

donde los coeficientes a_n vendrán dados por la fórmula de recurrencia anterior con m_1 sustituido por m_2 y, de nuevo, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2) t^n$ será convergente para $|t| < R$.

Demostración. A la vista del trabajo realizado previamente (que aseguran que las series de Fröbenius propuestas satisfacen formalmente la ecuación diferencial), bastará probar la convergencia de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m) t^n$ en $|t| < R$ para $m = m_1$ y para $m = m_2$ con $m_1 - m_2 \notin \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

La función f puede descomponerse usando las raíces m_1 y m_2; de hecho,

$$f(m) = (m - m_1)(m - m_2).$$

De aquí obtenemos que

$$f(m_1+n) = n(n+m_1-m_2) \qquad \text{y} \qquad f(m_2+n) = n(n+m_2-m_1)$$

y, en consecuencia, se verifican las desigualdades

$$|f(m_1+n)| \geq n(n-|m_1-m_2|) \qquad \text{y} \qquad |f(m_2+n)| \geq n(n-|m_2-m_1|). \quad (11.3)$$

Teniendo en cuenta que la relación de recurrencia para los coeficientes a_n puede escribirse, para cada m, en términos de la función f como

$$f(m+n)a_n(m) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k(m)[(m+k)p_{n-k} + q_{n-k}],$$

y usando la primera desigualdad en (11.3) tendremos que, para $m = m_1$,

$$n(n-|m_1-m_2|) \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k(m_1)|[(|m_1|+k)|p_{n-k}| + |q_{n-k}|].$$

Si r es un valor positivo tal que $r < R$, la convergencia de las series $tP(t)$ y $t^2Q(t)$ implica que existe un M tal que $|p_n|r^n \leq M$ y $|q_n|r^n \leq M$, para todos los n. Entonces de la desigualdad anterior deducimos que

$$n(n-|m_1-m_2|) \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k(m_1)|}{r^{n-k}}(|m_1|+k+1).$$

Definimos ahora la sucesión $\{b_n\}_{n\geq 0}$ como $b_n = |a_n(m_1)|$, para $0 \leq n \leq |m_1-m_2|$, y

$$b_n = \frac{M}{n(n-|m_1-m_2|)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{r^{n-k}}(|m_1|+k+1),$$

para $n > |m_1 - m - 2|$. Evidentemente $0 \leq |a_n(m_1)| \leq b_n$ para todo n. Así, probando que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ converge para $|t| < r$, para cualquier $r < R$, tendremos la convergencia de la serie, asociada con $m = m_1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_1)t^n$ para $|t| < R$. De la definición de la sucesión b_n, se deduce fácilmente que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n(n-|m_1-m_2|) + M(|m_1|+n+1)}{r(n+1)(n+1-|m_1-m_2|)} \to \frac{1}{r},$$

cuando $n \to \infty$, y de aquí la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ se tiene para $|t| < r$.

En el caso en que $m = m_2$ y que $m_1 - m_2 \notin \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ (para asegurar la existencia de los coeficientes en la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2)t^n$) el procedimiento será análogo pero se deberá usar la segunda desigualdad en (11.3). □

11.6.1. Caso en el que las raíces de la ecuación indicial se diferencian en un entero

El método de Fröbenius descrito en el teorema anterior presenta su mayor debilidad en la determinación de una segunda solución en el caso en el que las raíces de la ecuación indicial difieren en un entero. Veamos algunas formas de obtener dicha solución.

La forma más sencilla de intentar calcular uns segunda solución es mediante una reducción de orden. Efectuando el cambio de función $x(t) = x_1(t)w(t)$, donde x_1 es la solución que podemos construir por el método de Fröbenius y w será la nueva función incógnita. Con este cambio de función obtendremos una ecuación lineal de primer orden en w'. Desafortunadamente este camino sólo resulta apropiado cuando conocemos una expresión explícita para la solución x_1.

En el caso $m_1 = m_2$ no será posible nunca encontrar una segunda solución linealmente independiente de x_1 mediante una serie de Fröbenius. Si $m_1 - m_2 = \ell \in \mathbb{Z}^+$ se verifica que $f(m_2+\ell) = f(m_1)$ y en un principio no se puede continuar con la construcción de los coeficientes de la serie de Frobenius. Sin embargo si, por casualidad, se verificase también que

$$\sum_{k=0}^{\ell-1} a_k(m_2)[(m_2+k)p_{\ell-k} + q_{\ell-k}] = 0$$

el coeficiente $a_\ell(m_2)$ podría tomar cualquier valor y continuar con el cálculo de los coeficientes restantes. En esta situación suele considerarse, por comodidad, $a_\ell(m_2) = 0$.

Teniendo en cuenta que los casos anteriores ocurren en situaciones muy puntuales, sería deseable disponer de una herramienta que nos permitiese determinar de un modo razonable una segunda solución en los casos en que $m_1 - m_2 = \ell \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Pendientes de una demostración, lo que podemos afirmar es que considerando los coeficientes

$$b_n(m) = \frac{\partial a_n(m)}{\partial m},$$

se cumple que

a) si $m_1 = m_2$, una segunda solución será del tipo

$$x_2(t) = x_1(t)\log t + t^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(m_1)t^n,$$

b) y si $m_1 - m_2 = \ell \in \mathbb{Z}^+$, una segunda solución admite una expresión de la forma

$$x_2(t) = \alpha x_1(t)\log t + t^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(m_2)t^n,$$

para alguna constante α que puede ser nula.

11.7. La ecuación de Bessel y las funciones de Bessel

Como ya comentamos, el punto $t_0 = 0$ es un punto singular regular para la ecuación de Bessel

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - \alpha^2)x = 0$$

donde α es un parámetro real positivo.

La ecuación indicial viene dada en este caso por

$$m^2 - \alpha^2 = 0,$$

cuyas raíces son $m_1 = \alpha$ y $m_2 = -\alpha$. El *método de Fröbenius* nos asegura la existencia de una solución en forma de serie de Fröbenius para $m_1 = \alpha$. Ensayando con soluciones de la forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+m}$$

obtendremos la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+m+2+\alpha)(n+m+2-\alpha)}.$$

Para $m_1 = \alpha$, teniendo en cuenta que $a_0 \neq 0$ y que $a_1 = 0$ llegamos a que $a_{2k+1} = 0$ y que

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k\Gamma(\alpha+1)a_0}{2^{2k}k!\,\Gamma(\alpha+k+1)},$$

luego

$$x_1(t) = t^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\alpha+1)a_0}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

Eligiendo $a_0 = \frac{1}{2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}$ llegamos a lo que se define como función de Bessel de primera especie de orden α

$$J_{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha}.$$

Sobre la segunda solución de la ecuación de Bessel. Si $\alpha \notin \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, existe una segunda solución de la ecuación de Bessel que puede obtenerse a partir de la fórmula de recurrencia con $m = -\alpha$. Esta función se denota por $J_{-\alpha}$ y que viene dada por

$$J_{-\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-\alpha+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\alpha}.$$

De esta forma, en estos casos, la solución de la ecuación de Bessel viene dada por $x(t) = aJ_{\alpha}(t) + bJ_{-\alpha}(t)$.



F. Wilhem Bessel (1784–1846), astrónomo alemán. La actividad científica de Bessel se centró fundamentalmente en el estudio del movimiento de objetos astronómicos. En un trabajo de 1817, en el que estudia un problema de Kepler sobre la determinación del movimiento de tres cuerpos con atracción mutua, es donde hacen su aparición por primera vez las funciones de Bessel.

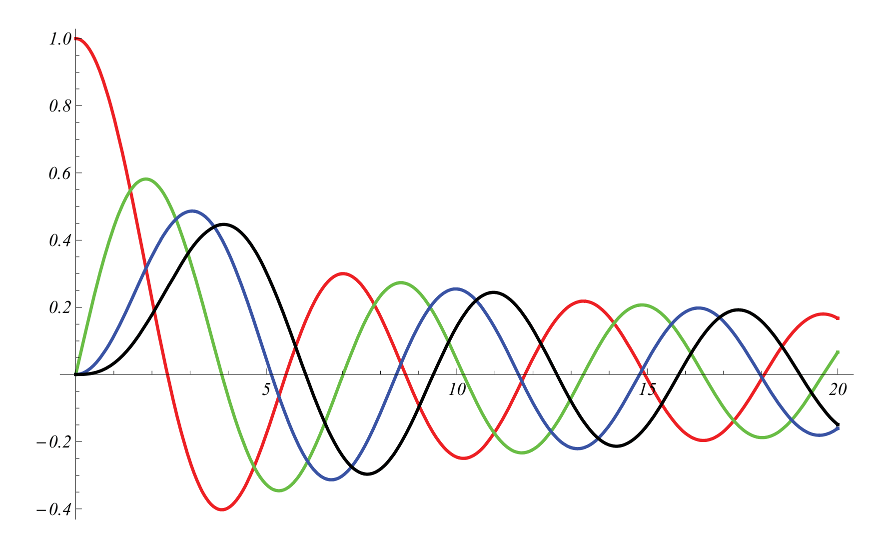


Figura 11.5: Representación de algunas funciones de Bessel de primera especie: de rojo J_0, de verde J_1, de azul J_2 y de negro J_e.

Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, entonces se verifica que $m_1 - m_2 = 2n$ y nos encontramos en los casos críticos del *método de Fröbenius* y se pueden aplicar cualesquiera de los procedimientos descritos. Sin embargo lo mas común suele ser introducir lo que se denomina funciones de Bessel de segunda especie de orden α que denotaremos por $Y_\alpha(t)$. Si $\alpha \notin \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ se definen por

$$Y_\alpha(t) = \frac{\cos(\alpha\pi) J_\alpha(t) - J_{-\alpha}(t)}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)},$$

y si $\alpha = n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ vienen dadas por

$$Y_n(t) = \lim_{\alpha \to n} Y_\alpha(t).$$

De esta forma la solución general de la ecuación de Bessel en cualquier caso se puede expresar como $x(t) = aJ_\alpha(t) + bY_\alpha(t)$.

11.7.1. Propiedades de las funciones de Bessel

Identidades relevantes. En primer lugar podemos probar que

$$\frac{d}{dt}(t^\alpha J_\alpha(t)) = t^\alpha J_{\alpha-1}(t) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}(t^{-\alpha} J_\alpha(t)) = -t^{-\alpha} J_{\alpha+1}(t).$$

En efecto la segunda de estas fórmulas puede probarse del siguiente modo:

$$\frac{d}{dt}(t^{-\alpha} J_\alpha(t)) = \frac{1}{2^\alpha} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$$

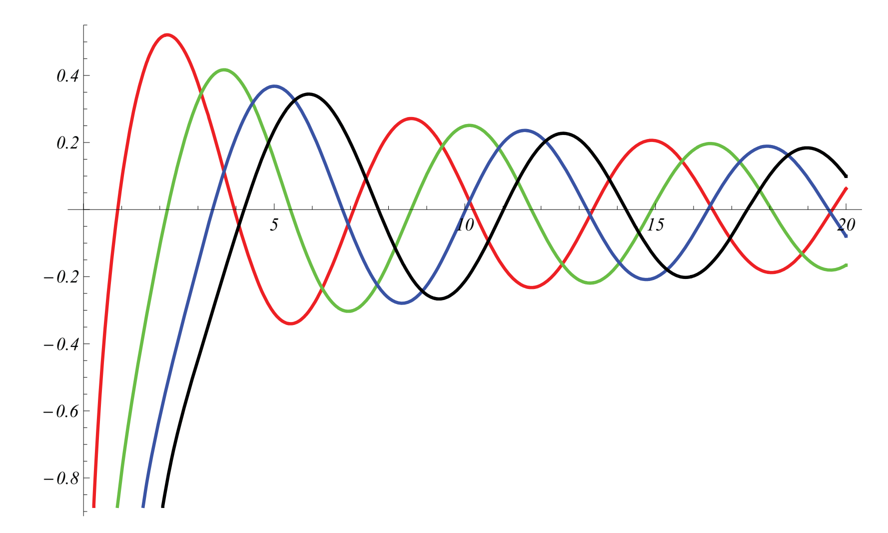


Figura 11.6: Representación de algunas funciones de Bessel de segunda especie: de rojo Y_0, de verde Y_1, de azul Y_2 y de negro Y_e.

$$= \frac{1}{2^\alpha}\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-1} =$$
$$= -\frac{1}{2^\alpha}\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+1+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+1} = -t^{-\alpha}J_{\alpha+1}(t).$$

La prueba restante se realiza de la misma manera. Una sencilla manipulación de las expresiones anteriores nos proporciona las identidades

$$J'_\alpha(t) + \frac{\alpha}{t}J_\alpha(t) = J_{\alpha-1}(t) \quad \text{y} \quad J'_\alpha(t) - \frac{\alpha}{t}J_\alpha(t) = -J_{\alpha+1}(t),$$

o las equivalentes

$$2J'_\alpha(t) = J_{\alpha-1}(t) - J_{\alpha+1}(t) \quad \text{y} \quad \frac{2\alpha}{t}J_\alpha(t) = J_{\alpha-1}(t) + J_{\alpha+1}(t).$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\mathrm{sen}(t) \quad \text{y} \quad J_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos(t),$$

obtenemos que, para $m \in \mathbb{Z}$,

$$J_{m+\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sum_{j=0}^{m}\begin{Bmatrix}\mathrm{sen}\\ \cos\end{Bmatrix}(t)\frac{a_{j,m}}{t^j}.$$

Sobre los ceros y la ortogonalidad de las funciones de Bessel. El comportamiento y cantidad de los ceros de las funciones de Bessel tiene un gran interés

en algunas aplicaciones físicas. El siguiente resultado nos permitirá establecer que las funciones J_α tienen infinitos ceros positivos.

Teorema 53. *Sea $u(t)$ una solución no trivial de la ecuación $u'' + q(t)u = 0$ con $q(t) > 0$ para $t > 0$. Si*

$$\int_1^\infty q(s)\,ds = +\infty \tag{11.4}$$

entonces $u(t)$ tiene un número infinito de ceros positivos.

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que $u(t)$ posee un número finito de ceros en el intervalo $(0, \infty)$. De ese modo podremos asegurar la existencia de un valor t_0 de modo que $u(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_0$. Sin perdida de generalidad se puede suponer que $u(t) > 0$, para $t \geq t_0$ (en caso contrario podemos tomar $-u(t)$). Probando que $u'(t)$ es negativa para algún valor mayor que t_0 podemos deducir inmediatamente que $u(t)$ tiene un cero a la derecha de t_0 lo cual sería una contradicción.[11]

Para probar que $u'(t) < 0$ para algún valor mayor que t_0 consideramos, para $t \geq t_0$, la función

$$v(t) = -\frac{u'(t)}{u(t)}.$$

Entonces

$$v'(t) = -\frac{u''(t)}{u(t)} + \left(\frac{u'(t)}{u(t)}\right)^2 = q(t) + v^2(t).$$

Integrando esta identidad en el intervalo $[t_0, t]$, tenemos que

$$v(t) - v(t_0) = \int_t^{t_0} q(s)\,ds + \int_t^{t_0} v^2(s)\,ds.$$

De la condición (11.4) se deduce inmediatemente que $v(t)$ es positivo para valores de t suficientemente grandes. Esto implica que $u'(t)$ y $u(t)$ tiene signos distintos para estos valores de t y, por tanto, $u'(t)$ es negativa por ser $u(t) > 0$. $\square$

Teniendo en cuenta que la función $u(t) = \sqrt{t}J_\alpha(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4t^2}\right)u = 0$$

se deduce inmediatamente la existencia de infinitos ceros positivos para J_α.[12] Si los suponemos como una sucesión ordenada de manera creciente suelen denotarse

[11] Esta afirmación necesita alguna aclaración. Notad que, puesto que $q(t) > 0$, se tendrá que $u''(t) = -q(t)u(t)$ es negativa, de modo que la pendiente $u'(t)$ es decreciente. Si esta pendiente se hace alguna vez negativa, la curva cruzará el eje horizontal en algún punto a la derecha y, por tanto, $u(t)$ será igual a cero.

[12] En los casos en los que $0 \leq |\alpha| \leq 1/2$ se puede aplicar el teorema directamente. En otro caso es necesario realizar el cambio de variable $t = s + \frac{\sqrt{4p^2-1}}{2}$ y aplicar el teorema a la ecuación resultante.

por $\lambda_{n,\alpha}$, $n = 1, 2, \ldots$. Usando los ceros de las funciones de Bessel es posible construir un familia de funciones ortogonales en el intervalo $[0, 1]$. En efecto, si consideramos las funciones

$$\phi_n(t) = \sqrt{t} J_\alpha(\lambda_{n,\alpha} t), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

para cada $\alpha > -1$, se verifica que

$$\int_0^1 \phi_n(t)\phi_m(t) = \frac{\delta_{n,m}}{2} J'_\alpha(\lambda_{n,\alpha});$$

es decir, son ortogonales en el intervalo $[0, 1]$ con respecto al peso constante $w(t) = 1$. Este resultado es una aplicación inmediata del siguiente resultado.

Proposición 54. *Sean $\alpha > -1$ y a y b dos valores reales positivos. Entonces*

$$\int_0^1 t J_\alpha(at) J_\alpha(bt)\, dt = \frac{a J'_\alpha(a) J_\alpha(b) - b J'_\alpha(b) J_\alpha(a)}{b^2 - a^2}$$

y

$$\int_0^1 t (J_\alpha(at))^2\, dt = \frac{1}{2}(J'_\alpha(a))^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)(J_\alpha(a))^2.$$

Demostración. La restricción $\alpha > -1$ viene impuesta para asegurar la convergencia de la integral. En efecto, si tenemos en cuenta que $|J_\alpha(t)| \le C x^{-\alpha}$ para valores proximos al origen[13] la integral será convergente para cada $\alpha > -1$.

Es sencillo comprobar que la función $u_a(t) = J_\alpha(at)$ satisface la ecuación $u''_a + \frac{u'_a}{t} + \left(a^2 - \frac{\alpha^2}{t^2}\right) u_a = 0$. Entonces,

$$\begin{cases} u_b\left(u''_a + \frac{u'_a}{t} + \left(a^2 - \frac{\alpha^2}{t^2}\right) u_a\right) = 0 \\ u_a\left(u''_b + \frac{u'_b}{t} + \left(b^2 - \frac{\alpha^2}{t^2}\right) u_b\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (u'_a u_b - u_a u'_b)' + \frac{1}{t}(u'_a u_b - u_a u'_b) = (b^2 - a^2) u_a u_b$$
$$\Rightarrow (t(u'_a u_b - u_a u'_b))' = (b^2 - a^2) t u_a u_b.$$

Por tanto, para $a \neq b$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 t J_\alpha(at) J_\alpha(bt)\, dt &= \int_0^1 t u_a u_b\, dt \\ &= \frac{1}{b^2 - a^2} \int_0^1 (t(u'_a u_b - u_a u'_b))'\, dt \\ &= \frac{a J'_\alpha(a) J_\alpha(b) - b J'_\alpha(b) J_\alpha(a)}{b^2 - a^2}. \end{aligned}$$

[13] Esta estimación se sigue inmediatamente de la serie que define a la función de Bessel.

Por último, aplicando la identidad $J'_\alpha(t) - \frac{\alpha}{t} J_\alpha(t) = -J_{\alpha+1}(t)$ y usando la regla de L'Hopital obtenemos que

$$\int_0^1 t(J_\alpha(at))^2\,dt = \lim_{b\to a} \frac{aJ_\alpha(a)J_{\alpha+1}(b) - bJ_\alpha(b)J_{\alpha+1}(a)}{b^2 - a^2}$$
$$= \frac{1}{2}(J'_\alpha(a))^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)(J_\alpha(a))^2.$$

□

11.8. Una última cuestión relativa a resortes mecánicos

Recordemos que la ecuación que modelizaba el desplazamiento de un resorte envejecido venía dada por

$$mx'' + \kappa e^{-\varepsilon t} x = 0,$$

con $\varepsilon > 0$. En la sección anterior ya vimos cómo era posible obtener una aproximación a la solución de esta ecuación mediante el uso de series de potencias. Veamos que aún podemos ir un poco más allá. Supongamos que consideramos el cambio de variable $s = ae^{bt}$, donde a y b son constantes que se eligirán posteriormente de modo conveniente. Con este cambio tendremos que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds} bs,$$

ya que $\frac{ds}{dt} = bae^{bt} = bs$, y

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds} bs\right)\frac{ds}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}(bs)^2 + \frac{dx}{dt} b^2 s.$$

De este modo la ecuación del resorte envejecido se transforma en

$$\frac{d^2x}{dt^2}(bs)^2 + \frac{dx}{dt} b^2 s + \frac{\kappa}{m}\left(\frac{s}{a}\right)^{-\varepsilon/b} = 0.$$

Eligiendo

$$a = \frac{2}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \quad \text{y} \quad b = -\frac{\varepsilon}{2}$$

llegamos a la ecuación

$$s^2\frac{d^2x}{ds^2} + s\frac{dx}{ds} + s^2 x = 0$$

que es la ecuación de Bessel con $\alpha = 0$. Según lo que acabamos de ver la solución general de esta ecuación es

$$x(s) = c_1 J_0(s) + c_2 Y_0(s),$$

para ciertas constantes arbitrarias c_1 y c_2. Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$x(t) = c_1 J_0(ae^{bt}) + c_2 Y_0(ae^{bt}) = c_1 J_0\left(\frac{2}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}e^{-\varepsilon t/2}\right) + c_2 Y_0\left(\frac{2}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}e^{-\varepsilon t/2}\right).$$

El argumento que aparece en las funciones J_0 e Y_0 va tendiendo a cero conforme avanza el tiempo, entonces es claro que el comportamiento a largo plazo del resorte envejecido se modeliza mediante el valor de las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden cero cerca del origen. Si $c_2 = 0$ la solución queda reducida a la función J_0 y el desplazamiento del resorte desde la posición de equilibrio tiende a comportarse como c_1 puesto que $J_0(0) = 1$. Si $c_2 \neq 0$, teniendo en cuenta que $Y_0(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0$ (la figura (11.6) muestra la función Y_0), el desplazamiento será $\pm\infty$ dependiendo del signo de c_2. Para $c_2 < 0$ el resorte oscilará con amplitud creciente y finalmente se estirará sin límite. En el caso $c_2 > 0$ es una compresión infinita del resorte. Esto es lo que predice la solución obtenida, la realidad es algo distinta. El resorte se estirará (comprimirá) hasta sobrepasar su límite elástico y se romperá o se comportará de un modo absolutamente inelástico que ya no estará modelizado por nuestra ecuación de partida. La figura 11.7 muestra la algunos casos particulares de la función $x(t)$ para distintos valores de las constantes c_1 y c_2 con $a = 100$ y $b = -1/100$.

11.9. Problemas

Problema 261. Sean las ecuaciones

$$x' = 2tx \qquad \text{y} \qquad x' + x = 1.$$

Encontrar, para las ecuaciones dadas, una solución en forma de serie de potencias de t, identificar el desarrollo encontrado y verificar el resultado resolviendo la ecuación directamente.

Problema 262. Desarrollar en serie de potencias la función $x = (\operatorname{arc\,sen} t)^2$. Para ello encontrar previamente una ecuación diferencial de segundo orden tal que $(\operatorname{arc\,sen} t)^2$ sea una de sus soluciones y resolver dicha ecuación por medio de series de potencias.

Problema 263. Resolver los problemas de valores iniciales

$$a)\ \begin{cases} x' = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \\ x(0) = (1, -1), \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & t \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ t^3 \end{pmatrix}, \\ x(0) = (1, 1). \end{cases}$$

Problema 264. Encontrar, mediante series de potencias de t y de $(t-1)$, la solución general de la ecuación de Airy

$$x'' = tx.$$

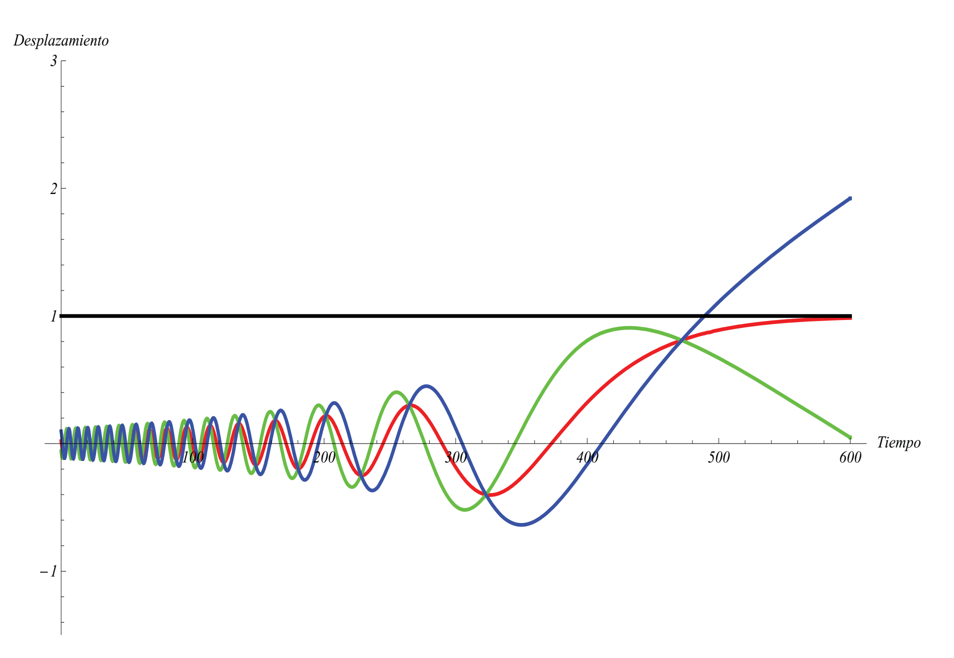


Figura 11.7: Representación de la función $x(t) = c_1 J_0(ae^{bt}) + c_2 Y_0(ae^{bt})$ con $a = 100$ y $b = -1/100$ para distintos valores de c_1 y c_2. Para la curva rojo se ha considerado $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ (observar que tiende a comportarse como la contante c_1), para la curva verde se ha tomado $c_1 = c_2 = 1$ y, finalmente, para la azul los parámetros han sido $c_1 = -c_2 = 1$.

Problema 265. Hallar, usando series de potencias de t, la solución general de la ecuación diferencial

$$x'' - tx' - 2x = 0.$$

Problema 266. Hallar, usando series de potencias de t, la solución general de la ecuación diferencial

$$(1 + t^2)x'' - 2x = 0.$$

Problema 267. Hallar, usando series de potencias de t, la solución general de la ecuación diferencial

$$x'' - tx' + x = 0.$$

Problema 268. Resolver, en forma de serie de potencias de t, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' + 8tx = 0, \\ 2x(0) = 2 = x'(0). \end{cases}$$

Problema 269. Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} (1 + t^2)x'' + tx' - 9x = 0, \\ x(0) = 2, x'(0) = -1. \end{cases}$$

Problema 270. Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' - 2tx' - 2x = 2, \\ x(0) = -1, x'(0) = 1. \end{cases}$$

Problema 271. Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' + t^3x' + 3t^2x = 0, \\ x(0) = 1, x'(0) = 0. \end{cases}$$

Problema 272. Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos la ecuación

$$(1 - t^n)x'' - 2nt^{n-1}x' - n(n-1)t^{n-2}x = 0.$$

a) Resolver el problema de valores iniciales asociado a la ecuación propuesta sujeta a las restricciones $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$.

b) Si x_1 es la solución del apartado anterior, obtener la solución general de la ecuación propuesta usando el cambio de función $x = x_1u$ (con $u = u(t)$).

Problema 273. Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} t(2-t)x'' - 6(t-1)x' - 4x = 0, \\ x(1) = 1, x'(1) = 0. \end{cases}$$

Problema 274. La ecuación

$$x'' + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{t^2}{4}\right)x = 0,$$

donde p es una constante real, tiene seguramente una solución en serie de potencias de t de la forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nt^n$.

a) Demostrar que los coeficientes a_n están relacionados por la fórmula de recurrencia a tres términos

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \left(p + \frac{1}{2}\right)a_n - \frac{a_{n-2}}{4} = 0.$$

b) Demostrar que el cambio de función $x = we^{-t^2/4}$ transforma la ecuación dada en

$$w'' - tw' + pw = 0.$$

c) Utilizar el apartado anterior para encontrar la solución general de la ecuación inicial.

Problema 275. Sea la ecuación

$$x'' + tx' + x = 0.$$

a) Encontrar la solución general para la ecuación dada de la forma

$$x(t) = a_0 x_1(t) + a_1 x_2(t),$$

con $x_1(t)$ y $x_2(t)$ series de potencias de t. Probar que las series son convergentes para $t \in \mathbb{R}$.

b) Demostrar que $x_1(t)$ es la serie de potencias correspondiente a la función $e^{-t^2/2}$. Utilizar este hecho para encontrar otra solución linealmente independiente de la ecuación dada. Comprobar que esta segunda solución admite un desarrollo en serie de potencias como el de $x_2(t)$.

Problema 276. La ecuación de Legendre viene dada por

$$(1 - t^2)x'' - 2tx' + p(p + 1)x = 0,$$

donde p es una constante.

a) Para $|t| < 1$ determinar dos soluciones linealmente independientes en forma de series de potencias para la ecuación dada. Probar que si $p = n$, con n un entero no negativo, entonces existe una solución polinomial de la ecuación.

b Definimos

$$x_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n,$$

para $n \geq 0$. Probar que x_n es un polinomio de grado n satisfaciendo la ecuación Legendre con $p = n$.

c) Definimos los polinomios de Legendre como

$$P_n(t) = \frac{1}{n!2^n} x_n(t),$$

para $n \geq 0$.

c1) Probar que

$$(1 - t^2)P_n'(t) = nP_{n-1}(t) - ntP_n(t).$$

c2) Probar que

$$tP_n'(t) - P_{n-1}'(t) = nP_n(t).$$

c3) Probar que

$$(n + 1)P_{n+1}(t) - (2n - 1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0.$$

d) Probar que si $n \neq m$, entonces

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\, dt = 0.$$

e) Probar que si $-\frac{1}{2} + (k^2 + \frac{1}{4})^{1/2}$ es un número natural, la función $x(t) = P_n(\cos t)$ satisface la ecuación

$$x'' + x' \cot(t) + k^2 x = 0.$$

Problema 277. Sea $\lambda(t)$ una función continua en algún intervalo I que contiene al origen. Considérese la denominada ecuación de Ermakov-Pinney

$$x'' + \lambda(t)x = \frac{1}{x^3},$$

que aparece en algunos problemas físicos. Para $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \neq 0$, sean u_1 y u_2, respectivamente, las soluciones de los problemas de valores iniciales

$$(P_1) \begin{cases} u'' + \lambda(t)u = 0, \\ u(0) = a, u'(0) = b, \end{cases} \qquad (P_2) \begin{cases} u'' + \lambda(t)u = 0, \\ u(0) = 0, u'(0) = c. \end{cases}$$

a) Probar que el wronskiano de u_1 y u_2 es igual a ac; es decir $\mathcal{W}(u_1, u_2)(t) = ac$.

b) Demostrar que la función

$$x(t) = \sqrt{u_1^2(t) + \frac{u_2^2(t)}{(ac)^2}}$$

es una solución de la ecuación de Ermakov-Pinney verificando que $x(0) = a$ y $x'(0) = b$.

c) Determinar la solución de la ecuación de Ermakov-Pinney para $\lambda(t) = -\frac{6}{1+t^2}$.
Indicación: Usar series de potencias en un entorno del origen para determinar una solución y un método de reducción de orden para obtener la segunda.

Problema 278. Para cada $a \in \mathbb{Z}^+$ consideramos la ecuación diferencial

$$x'' - \frac{a(a+1)x}{1+t^2} = 0.$$

a) Usando series de potencias en un entorno del origen, probar que la ecuación admite una solución $p_a(t)$ que es un polinomio de grado $a+1$.

b) Usando un método de reducción de orden apropiado, probar que la solución general de la ecuación es

$$x = p_a(t) \left(k_1 + k_2 \int \frac{dt}{p_a^2(t)} \right).$$

Problema 279. Resolver, mediante desarrollo en series de potencias de t convergentes a la derecha del origen, las ecuaciones siguientes:

a) $tx'' + x' - 4tx = 0$,

b) $tx'' - x' + 4t^3x = 0$.

Problema 280. Encontrar, utilizando series de Frobenius en un entorno de $t = 0$, la solución general de la ecuación

$$2t^2x'' + (3t - 2t^2)x' - (t + 1)x = 0.$$

Problema 281. Encontrar, utilizando series de Frobenius en un entorno de $t = 0$, la solución general de la ecuación

$$(t - t^2)x'' - 3x' + 2x = 0.$$

Comprobar que existe una solución polinómica.

Problema 282. Utilizando series de Frobenius, probar que la ecuación diferencial

$$t(t - 1)x'' + 3x' - 6x = 0$$

admite, en un entorno del origen, una solución polinómica y la solución $\frac{1}{(1-t)^2}$.

Problema 283. Utilizando series de Frobenius encontrar, dando una expresión explícita, dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$tx'' + (t - 1)x' - x = 0.$$

Problema 284. Utilizando series de Frobenius obtener expresiones explícitas para dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$t^2x'' - t^2x' + (t - 2)x = 0.$$

Problema 285. Sea la ecuación diferencial

$$t^2x'' + (2t - \alpha t^2)x' + (ct - m(m + 1))x = 0,$$

siendo $\alpha, c \in \mathbb{R}^+$ y $m = 0, 1, 2, \ldots$. Establecer una relación entre α, c y m de forma que la ecuación anterior tenga una solución polinómica. Obtener el grado de ese polinomio.

Problema 286. En la ecuación de Legendre

$$(1 - t^2)x'' - 2tx' + p(p + 1)x = 0$$

existe una única solución x_1 definida en el intervalo $(-1, 3)$ y tal que $x_1(1) = 1$. Hallar dicha solución en forma de potencias de $(t - 1)$.

Problema 287. Probar que la ecuación diferencial

$$t^2x'' + tx' + (1+t)x = 0$$

admite dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$x_1(t) = (\operatorname{sen}(\log t))\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

y

$$x_2(t) = (\cos(\log t))\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n,$$

para $t > 0$ y con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Problema 288. Se considera la ecuación diferencial

$$t^2x'' + tx' + (t^2-1)x = 0.$$

a) Determinar una solución en forma de serie de Frobenius en un entorno de $t = 0$.

b) Si $f(t)$ es la solución del apartado anterior, encontrar una segunda solución linealmente independiente de la forma

$$x(t) = f(t)\log t - \frac{\alpha}{t} + tg(t),$$

con α una constante real y $g(x)$ una función desarrollable en serie de potencia en un entorno del origen.

Problema 289. Consideremos la ecuación

$$t(1-t)x'' + (p-(p+2)t)x' - px = 0.$$

a) Probar que $t = 0$ es un punto singular regular para dicha ecuación. Demostrar que si $p \notin \mathbb{Z}$ existen dos soluciones linealmente independientes en forma de serie de Frobenius convergentes para $|t| < 1$.

b) Encontrar la solución general de la ecuación dada, expresada en términos de funciones elementales, para $p \notin \mathbb{Z}$.

c) Obtener la solución general de la ecuación dada en el caso $p = 1$.

Problema 290. Sea b un parámetro real verificando que $b > 1$ y $b \notin \mathbb{N}$. Consideramos la ecuación confluente de Kummer

$$tx'' + (b-t)x' - ax = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Determinar dos soluciones en forma de serie de potencias para la ecuación dada.

b) Para $a = b$, determinar la solución general de la ecuación. (Dar la expresión de la solución general sin emplear series de potencias.)

Problema 291. Encuentre la solución general de la ecuación

$$(1 - e^t)x'' + \frac{1}{2}x' + e^t x = 0$$

cerca del punto $t = 0$, cambiando la variable independiente a $s = e^t - 1$.

Problema 292. Consideremos la ecuación

$$4t^2 x'' + (1 - t^2)x = 0.$$

a) Obtener una solución x_1, acotada en un entorno del origen, de la ecuación propuesta.

b) Probar que la ecuación admite una segunda solución x_2, tal que $x_2 = ux_1$ con $u' = Cx_1^{-2}$, donde C es una constante real.

Problema 293. Consideremos la función

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k t^k,$$

donde $f_1 = 1$ y $f_{m+1} = \frac{1}{m+3/2} \sum_{k=1}^{m} f_k f_{m+1-k}$, si $m \geq 1$.

El objetivo de este problema es determinar una expresión en términos de funciones elementales para la función dada haciendo uso de nuestros conocimientos sobre ecuaciones diferenciales.

a) Demostrar que la función f satisface la ecuación la ecuación diferencial

$$x' - \frac{x^2}{t} + \frac{x}{2t} - \frac{3}{2} = 0.$$

b) Comprobar que el cambio de función

$$x = -\frac{t}{u}\frac{du}{dt}$$

nos transforma la ecuación del apartado anterior en

$$t\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{2}\frac{du}{dt} + \frac{3}{2}u = 0.$$

c) Encontrar, usando series de Frobenius en un entorno de $t = 0$, dos soluciones linealmente independientes para la ecuación del apartado previo.

d) Concluir de todo lo anterior una expresión para la función f.

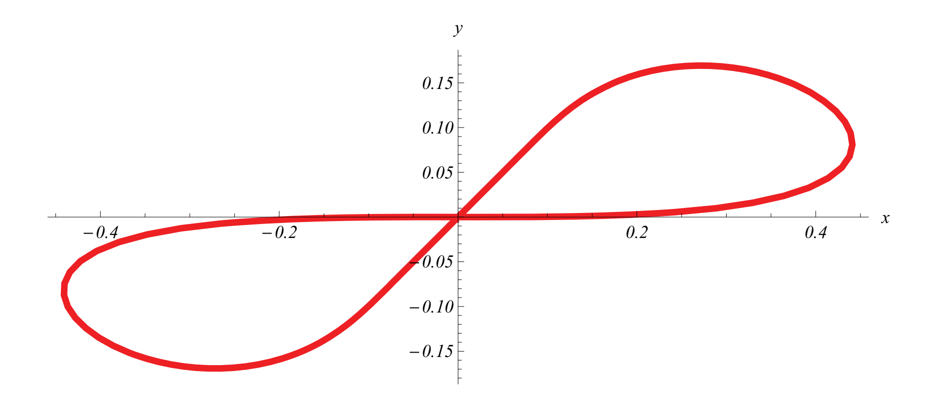


Figura 11.8: Curva solución del Problema 294.

Problema 294. Las coordenadas paramétricas de una cierta curva vienen dadas por

$$x(t) = e^{-t^2} \int_0^t u(s)\, ds \qquad \text{e} \qquad y(t) = e^{-t^2} \int_0^t v(s)\, ds,$$

donde las funciones u y v satisfacen las ecuaciones $u' = 2sv$ y $v' = 2su$, con las condiciones iniciales $u(0) = 1$ y $v(0) = 0$.

Probar que las funciones u y v verifican la ecuación $sz'' - z' - 4s^3 z = 0$. Resolviendo la ecuación anterior por el método de Frobenius, determinar las funciones u y v. La curva en cuestión (un curioso lazo) aparece representada en la imagen de la figura 11.8.

Problema 295. Las ecuaciones paramétricas de una curva vienen dadas por

$$x(t) = \int_0^t u_1(s)\, ds \qquad \text{e} \qquad y(t) = \int_0^t u_2(s)\, ds,$$

donde las funciones u_1 y u_2 verifican las ecuaciones $u_1' = -2su_2$ y $u_2' = 2su_1$ y las condiciones $u_1(0) = 1$ y $u_2(0) = 0$.

a) Probar que tanto u_1 como u_2 satisfacen la ecuación diferencial

$$su'' - u' + 4s^3 u = 0.$$

b) Determinar la solución general de la ecuación del apartado anterior.

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la curva propuesta.

La curva solución de este problema es una clotoide o espiral de Cornu, recordar que ya analizamos esta curva en el Capítulo 3, mostrando algunas de sus interesantes propiedades.

Problema 296. Para cada λ real positivo, consideramos la ecuación diferencial $t^4x'' + \lambda x = 0$. Resulta obvio que el punto $t = 0$ es un punto singular no regular para la ecuación dada. Usando el cambio de variable $t = 1/s$, transforma la ecuación en otra en la que el origen sea un punto singular regular. Deducir de este hecho la solución general de la ecuación propuesta.

Problema 297. Consideremos la ecuación de Gauss (o ecuación hipergeométrica)

$$(t - t^2)x'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)t]\, x' - \alpha\beta x = 0,$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

a) Comprobar que, al solucionarla mediante series de Frobenius en un entorno de $t = 0$, las raíces de la ecuación indicial son $m = 0$ y $m = 1 - \gamma$ y la relación de recurrencia que aparece es

$$a_n = \frac{(m+n-1)(m+n+\alpha+\beta-1)+\alpha\beta}{(m+n)(m+n+\gamma-1)} a_{n-1}.$$

b) Llamaremos x_1 y x_2 a las soluciones correspondientes a $m = 0$ y $m = 1-\gamma$, respectivamente, con $a_0 = 1$ y denotaremos $x_1(t) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; t)$.

b1) Probar que

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} t^n,$$

donde $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n+1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$, $n = 1, 2, \ldots$.

b2) Probar por último que

$$x_2(t) = t^{1-\gamma}{}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; t).$$

Problema 298. Probar las siguientes propiedades de las funciones de Bessel:

a) $\dfrac{d}{dt}[t^p J_p(t)] = t^p J_{p-1}(t)$,

b) $\dfrac{d}{dt}[t^{-p} J_p(t)] = -t^{-p} J_{p+1}(t)$.

Problema 299. Consideramos la ecuación diferencial

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + (2c+1)t\frac{dx}{dt} + [a^2b^2t^{2b} + (c^2 - p^2b^2)]x = 0,$$

donde a, b y c son constantes.

a) Probar que el cambio de variable y función $z = at^b$, $w = xt^c$ ($w = w(z)$) transforma la ecuación dada en una ecuación de Bessel.

b) Usar este hecho para encontrar la solución general de la ecuación dada.

c) Probar que la solución general de la ecuación de Airy

$$x'' + tx = 0$$

es

$$x(t) = t^{1/2}\left[c_1 J_{1/3}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right) + c_2 J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right)\right].$$

Problema 300. Consideramos la ecuación de Riccati

$$\frac{dx}{dt} + Bx^2 = Ct^m,$$

con B y C constantes.

a) Comprobar que el cambio de función $Bx = \frac{1}{u}\frac{du}{dt}$ transforma la ecuación dada en

$$\frac{d^2u}{dt^2} - BCt^m u = 0.$$

b) Usar este hecho y el problema anterior para probar que la solución general de

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2$$

puede escribirse como

$$x(t) = t\frac{J_{-3/4}\left(\frac{1}{2}t^2\right) + cJ_{3/4}\left(\frac{1}{2}t^2\right)}{cJ_{-1/4}\left(\frac{1}{2}t^2\right) - J_{1/4}\left(\frac{1}{2}t^2\right)}.$$

Problema 301. Sean $\alpha \geq -1/2$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x, y > 0$, $x \neq y$, $u = x^2 - y^2$, $v = x^2 + y^2$,

$$\begin{aligned}
F_1(x,y) &= \sqrt{xy}J_\alpha(x)J_\alpha(y),\\
F_2(x,y) &= \sqrt{xy}J'_\alpha(x)J_\alpha(y),\\
F_3(x,y) &= \sqrt{xy}J_\alpha(x)J'_\alpha(y),\\
F_4(x,y) &= \sqrt{xy}J'_\alpha(x)J'_\alpha(y),
\end{aligned}$$

y

$$K_\alpha^m(x,y) = \sqrt{xy}\int_0^1 s(1-s^2)^m J_\alpha(xs)J_\alpha(ys)\,ds.$$

Probar que, si $\mathcal{D}$ denota el operador diferencial $\mathcal{D} = \frac{1}{u}\left(y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x}\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
&K_\alpha^m(x,y) =\\
&\quad\times \frac{2^m m!}{u^{2m}}\left(A_m F_1(x,y) - B_m\frac{x}{u}F_2(x,y) + C_m\frac{y}{u}F_3(x,y) - D_m xyF_4(x,y)\right),
\end{aligned}$$

donde A_m, B_m, C_m y D_m son polinomios en x e y dados por las relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned}
A_{m+1} &= u^2\mathcal{D}(A_m) + 4mvA_m + (\alpha^2 - x^2)B_m + (\alpha^2 - y^2)C_m,\\
B_{m+1} &= u^2\mathcal{D}(B_m) + u^2A_m + 2(2m+1)vB_m + u^2(\alpha^2 - y^2)D_m,\\
C_{m+1} &= u^2\mathcal{D}(C_m) + u^2A_m + 2(2m+1)vC_m + u^2(\alpha^2 - x^2)D_m,\\
D_{m+1} &= u^2\mathcal{D}(D_m) + B_m + C_m + 4mvD_m,
\end{aligned}$$

con $A_0 = D_0 = 0$ y $B_0 = C_0 = 1$.

Problema 302. Considérese el modelo

$$x'' + (a^2e^{-\varepsilon t} - b^2)x = 0$$

para un resorte envejecido. Demostrar que las soluciones son de la forma

$$x(t) = c_1J_p(s) + c_2Y_p(s)$$

donde $p = \frac{2b}{\varepsilon}$ y $s = \frac{2}{\varepsilon}e^{-\varepsilon t/2}$. Trazar las soluciones para distintos valores de los parámetros a, b y ε e interpretarlas en función de los movimientos del resorte.



Servicio de Publicaciones
Biblioteca Universitaria
C/ Piscinas, s/n
26006 Logroño (La Rioja)
Teléfono: 941 299 187

http://publicaciones.unirioja.es
www.unirioja.es